逻辑代数简介

四川师范学院数学系

一九八〇年一月

前　言

逻辑代数是用数学工具和方法来研究逻辑问题的学科。它不但是数学的基础知识，而且在一些现代科学技术中，有着广泛的应用。因而在统编中学数学教材中，也增加了逻辑代数的内容。

《逻辑代数简介》是为培训中学数学教师而编写的。曾多次在短训班和我系毕业生中试用过。由于目前逻辑代数的参考书籍缺乏，今特重新加以修改出版，以作中学数学教师短训班的教材，也可作中学数学教师和数学爱好者的参考读物。

本书内容包括数的进位制，逻辑代数和电子计算机。在取材时，除了注意逻辑代数的基本理论外，还把中学数学中所规定的有关内容，作了适当的加深加宽和提高，并把中学数学教材中这部分的习题，全部作为例题加以处理，以帮助中学数学教师能较深入的掌握和处理好有关教材，以利提高教学质量。

本书是由李南峰、隆贤斌、邓超成编写的。黄苹枝同志对本书的初稿提出了许多很好的修改意见。

由于我们水平有限，经验不足，加以时间仓促，缺点和错误一定很多，殷切希望读者提出意见和批评。

编　者

1979年12月于川师

目　录

第一章　数的进位制

第二章　逻辑代数

第三章　电子计算机

第一章　数的进位制

在日常生活中和科学技术中，除了使用通常的10进位数外，还广泛的使用各种不同的进位数。例如在秒、分、小时之间使用60进位数，小时、天之间使用24进位数，月、年之间使用12进位数。又如8人为一桌，使用8进位数，两支鞋为一双，使用2进位数。而二进位数在近代科学技术，特别是电子计算机中，有着广泛的应用。现在，中学数学教材中，也新增加了数的进位制的内容。为了适应中学数学教学和进一步学习科学技术的需要，在这一章里我们来研究数的进位制。在§1中，研究一般的r进位数的记数法。在§2中研究二位数的四则运算。在§3中，讨论不同进位数间的转换。

§1　記数法

我们首先来看看常用的10进位数的记数方法。这种记数法，就是用0，1，2，…，8，9共10个数码来表示数的方法。

例1.　$258=2\cdot 10^2+5\cdot 10^1+8\cdot 10^0$

$$7036.28=7\cdot 10^3+0\cdot 10^2+3\cdot 10^1+6\cdot 10^0+2\cdot 10^{-1}+8\cdot 10^{-2}$$

对于一般的10进位数$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2}\cdots a_{-}$我们有表达式：

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2}\cdots a_{-n}$$

$$=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0$$
$$+a_{-1}\cdot 10^{-1}+a_{-2}\cdot 10^{-2}+\cdots+a_{-n}\cdot 10^{-n}$$

其中a_i是数码0,1,2,…,8,9之一

$(i=m,m-1,\cdots,1,0,-1,\cdots,-n)$

10进位数记数法的特点是每一数位上所使用的数码为0、1、2、…8、9共10个，这些数码的个数10，叫做10进位数的基数。并且进位的法则为逢10进1。

将10进位数记数法的方法一般化，我们就有下面的r进位数的记数法。

设r是大于1的自然数，则我们有r进位数的表达式：

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2}\cdots a_{-n\,(r)}$$
$$=a_m\cdot r^m+a_{m-1}\cdot r^{m-1}+\cdots+a_1\cdot r^1+a_0\cdot r^0+a_{-1}\cdot r^{-1}$$
$$+a_{-2}\cdot r^{-2}+\cdots+a_{-n}\cdot r^{-n}$$

其中a_i是r个数码0、1、2、…之一

$(i=m,\ m-1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots,\ -n)$

r进位数记数法特点是每一数位上所使用的数码为0、1、2,…等共r个,这些数码的个数r，叫做r进位数的基数。并且进位的法则为逢r进1。

由于除了10进位数外，我们还会遇到各种不同的进位数，为了避免混乱起见，凡遇$r(r\neq 10)$进位数时，就在这数的右下角附以(r)，以示区别。

例2　$101_{(2)}=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$

$$1101.101_{(2)}=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$$
$$+1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}$$

对于一般的2进位数，我们有表达式：

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1}\cdots a_{-n\,(2)}$$
$$=a_m\cdot 2^m+a_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 2^0$$

$$+a_{-1}\cdot 2^{-1}+\cdots+a_{-n}\cdot 2^{-n}$$

其中a_i为数码0、1、之一$(i=m,m-1,\cdots,1,0,-1,\cdots,-n)$

2是2进位数的基数，进位法则为逢2进1

例3 $543_{(8)}=5\cdot 8^2+4\cdot 8^1+3\cdot 8^0$

$76.245_{(8)}=7\cdot 8^1+6\cdot 8^0+2\cdot 8^{-1}+4\cdot 8^{-2}+5\cdot 8^{-3}$

$25.\dot{3}\dot{7}_{(8)}=2\cdot 8^1+5\cdot 8^0+3\cdot 8^{-1}+7\cdot 8^{-2}$

$+3\cdot 8^{-3}+7\cdot 8^{-4}+\cdots$

对于一般的8进位数，我们有表达式：

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 . a_{-1}\cdots a_{-n\,(8)}$$
$$=a_m\cdot 8^m+a_{m-1}\cdot 8^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 8^1+a_0\cdot 8^0+a_{-1}\cdot 8^{-1}$$
$$+\cdots+a_{-n}\cdot 8^{-n}$$

其中a_i为数码0、1、2、…，6、7之一

$(i=m,\ m-1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots,-n)$

8是8进位数的基数，进位法则为逢8进1。

例4 设$144_{(p)}=100$，求基数p

解 由题意得方程 $p^2+4p+4=100$，即 $p^2+4p-96=0$，

解之得 $p=-12$或$p=8$，但基数为正数，故$p=8$。

§2 2进位数的四则运算

在这一节中，我们来研究2进位数的四则运算。在学习算术时，我们都知道，只要掌握了加法表和乘法表（即九九表）以及一些运算规律，例如加法交换律，加法结合律，乘法交换律，乘法结合律，乘法对加法的分配律等，则四则运算就能得心应手，迅速而准确的进行计算。

与此类似，2进位数也满足这些运算规律。2进位数的加

法表和乘法表如次：

加法表

$+$	0	1
0	0	1
1	1	$10_{(2)}$

乘法表

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

利用加法表和乘法表以及运算规律，我们就能对2进位数，进行计算。而且计算的方法是完全类似的。但应特别注意一点，在10进位数时，是逢10进1，退1作10，而在2进位数时，是逢2进1，退1作2。

例1　计算$10101.101_{(2)}+1010.01_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 10101.101 \\ +)\ 1010.01 \\ \hline 11111.111 \end{array}$$

$\therefore\quad 10101.101_{(2)}+1010.01_{(2)}=11111.111_{(2)}$

例2　计算$1011.101_{(2)}+111.01_{(2)}+11.0011_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 1011.101 \\ 111.01 \\ +)\ 11.0011 \\ \hline 10110.0001 \end{array}$$

$\therefore\quad 1011.101_{(2)}+111.01_{(2)}+11.0011_{(2)}$

$=10110.0001_{(2)}$

例3　计算$101.1_{(2)}\times 10.1_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 101.1 \\ \times)\ 10.1 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ +)1011 \\ \hline 1101.11 \end{array}$$

$\therefore\quad 101.1_{(2)}\times 10.1_{(2)}=1101.11_{(2)}$

例4　计算$101.101_{(2)}\times1.1101_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 101.101 \\ \times\ 1.1101 \\ \hline 101101 \\ 000000 \\ 101101 \\ 101101 \\ +)\ 101101 \\ \hline 1010.0011001 \end{array}$$

$\therefore\ 101.101_{(2)}\times1.1101_{(2)}=1010.0011001_{(2)}$

例5　计算$101.111_{(2)}-11.01_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 101.111 \\ -)\ 11.01 \\ \hline 10.101 \end{array}$$

$\therefore\ 101.111_{(2)}-11.01_{(2)}=10.101_{(2)}$

例6　计算$110.101_{(2)}-1.11111_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 110.101 \\ -)\ 1.11111 \\ \hline 100.10101 \end{array}$$

$\therefore\ 110.101_{(2)}-1.11111_{(2)}=100.10101_{(2)}$

例7　计算$1001.11_{(2)}\div11_{(2)}$

解

$$\begin{array}{r} 11.01 \\ 11\overline{)1001.11} \\ -)\ 11 \\ \hline 11 \\ -)\ 11 \\ \hline 11 \\ -)\ 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore\ 1001.11_{(2)}\div11_{(2)}=11.01_{(2)}$

例8　计算$10100.0101_{(2)}\div1.101_{(2)}$

解

$$
\begin{array}{r}
1100.1 \\
1101\overline{)\ 10100010.1} \\
-)\ 1101 \\
\hline
1110 \\
-)\ 1101 \\
\hline
1101 \\
-)\ 1101 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$\therefore$ $10100.0101_{(2)} \div 1.101_{(2)} = 1100.1_{(2)}$

例9 计算$10101_{(2)} - 10.01_{(2)} \div 1.1_{(2)}$

$\times {}_{(}10_{2)} + [11_{(2)}]^2$

解 $10101_{(2)} - 10.01_{(2)} \div 1.1_{(2)} \times 10_{(2)} + [11_{(2)}]^2$

$= 10101_{(2)} - 1.1_{(2)} \times 10_{(2)} + 1001_{(2)}$

$= 10101_{(2)} - 11_{(2)} + 1001_{(2)}$

$= 10010_{(2)} + 1001_{(2)}$

$= 11011_{(2)}$

例10 求下列各数的平方根

1. 1024; 2. $1001_{(2)}$; 3. $110001_{(2)}$。

解 在10进位数中，两位数$ab = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$的平方为

$$[ab]^2 = (a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot a \cdot 10 \cdot b + b^2$$

$$= a^2 \cdot 10^2 + (20a + b)b$$

利用这个公式即可得到10进位整数开平方的法则，这一法则用下面的演算来说明：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ \ \underline{3}\ \ \underline{2} \\
 & \ \ 10\ 24 \\
 & -)\ 9 \\
\cline{2-2}
20 \cdot 3 = 60 & \ \ \ \ 1\ 24 \\
+)\ \ \ \ \ \ 2 & \\
\hline
62 & -)\ 1\ 24 \\
\cline{2-2}
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
\quad \therefore \sqrt{1024} = 32。
$$

完全类似，我们有

$$\begin{aligned}[ab_{(2)}]^2&=[a\cdot 2+b]^2=a^2\cdot 2^2+2\cdot a\cdot 2\cdot b+b^2\\&=a^2\cdot 2^2+(100_{(2)}a+b)b。\end{aligned}$$

利用这个公式，即可得到2进位整数开平方的法则，它与10进位数开平方不同的地方，只有将20a换为$100_{(2)}a$，其余步骤完全相同。

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 10 & 01 \end{array} \\
 & -)\ 1 \\ \cline{2-2}
100_{(2)}\times 1=100_{(2)} & \quad 1\ 01 \\
+)\qquad\qquad\qquad 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 101_{(2)} & -)\ 1\ 01 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{1001_{(2)}}=11_{(2)}$。

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 11 & 00 & 01 \end{array} \\
 & -)\ 1 \\ \cline{2-2}
100_{(2)}\times 1=100_{(2)} & \quad 10\ 00\ 01 \\
+)\qquad\qquad\qquad 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 101_{(2)} & -)\ \ 1\ 01 \\ \cline{2-2}
100_{(2)}\times 11_{(2)}=1100_{(2)} & \qquad 11\ 01 \\
+)\qquad\qquad\qquad\qquad 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 1101_{(2)} & -)11\ 01 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ \sqrt{110001_{(2)}}=111_{(2)}$。

掌握了2进位数的四则运算后，遇着其他r进位数的四

则运算，可用完全相仿的方法来进行，只须记住，在r进位时，进退位的法则是：逢r进1，退1作r就够了。

例11　计算

1．$20.1_{(3)}+111.021_{(3)}$　2．$211.012_{(3)}-21.21_{(3)}$

3．$102.1_{(3)}\times 2.11_{(3)}$　4．$200.22_{(3)}\div 1.2_{(3)}$

解　3进位数的加法表和乘法表如次：

加法表

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	$10_{(3)}$
2	2	$10_{(3)}$	$11_{(3)}$

乘法表

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	$11_{(3)}$

$$\begin{array}{rr} & 20.1 \\ +) & 111.021 \\ \hline & 201.121 \end{array}$$

$\therefore\ 20.1_{(3)}+111.021_{(3)}=201.121_{(3)}$。

$$\begin{array}{rr} & 211.012 \\ -) & 21.21 \\ \hline & 112.102 \end{array}$$

$\therefore\ 211.012_{(3)}-21.21_{(3)}=112.102_{(3)}$。

$$\begin{array}{rr} & 102.1 \\ \times) & 2.11 \\ \hline & 1021 \\ & 1021 \\ +) & 2112 \\ \hline & 1000.201 \end{array}$$

$\therefore\ 102.1_{(3)}\times 2.11_{(3)}=1000.201_{(3)}$。

$$
\begin{array}{r}
102.1 \\
12\overline{)2002.2} \\
\underline{12} \\
102 \\
\underline{101} \\
12 \\
\underline{12} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore\ 200.22_{(3)} \div 1.2_{(3)} = 102.1_{(3)}$。

例12 计算

1. $53.12_{(8)} + 105.374_{(8)}$； 2. $743_{(8)} - 67.54_{(8)}$；

3. $3.102_{(8)} \times 51.3_{(8)}$； 4. $20.072_{(8)} \div 3.1_{(8)}$。

解 8进位数的加法和乘法表如次：

加 法 表

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	$10_{(8)}$
2	2	3	4	5	6	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$
3	3	4	5	6	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$	$12_{(8)}$
4	4	5	6	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$	$12_{(8)}$	$13_{(8)}$
5	5	6	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$	$12_{(8)}$	$13_{(8)}$	$14_{(8)}$
6	6	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$	$12_{(8)}$	$13_{(8)}$	$14_{(8)}$	$15_{(8)}$
7	7	$10_{(8)}$	$11_{(8)}$	$12_{(8)}$	$13_{(8)}$	$14_{(8)}$	$15_{(8)}$	$16_{(8)}$

乘　法　表

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	$10_{(8)}$	$12_{(8)}$	$14_{(8)}$	$16_{(8)}$
3	0	3	6	$11_{(8)}$	$14_{(8)}$	$17_{(8)}$	$22_{(8)}$	$25_{(8)}$
4	0	4	$10_{(8)}$	$14_{(8)}$	$20_{(8)}$	$24_{(8)}$	$30_{(8)}$	$34_{(8)}$
5	0	5	$12_{(8)}$	$17_{(8)}$	$24_{(8)}$	$31_{(8)}$	$36_{(8)}$	$43_{(8)}$
6	0	6	$14_{(8)}$	$22_{(8)}$	$30_{(8)}$	$36_{(8)}$	$44_{(8)}$	$52_{(8)}$
7	0	7	$16_{(8)}$	$25_{(8)}$	$34_{(8)}$	$43_{(8)}$	$52_{(8)}$	$61_{(8)}$

$$
\begin{array}{rr}
 & 53.12 \\
+) & 105.374 \\
\hline
 & 160.514
\end{array}
$$

$\therefore\quad 53.12_{(8)}+105.374_{(8)}=160.514_{(8)}$

$$
\begin{array}{rr}
 & 743 \\
-) & 67.54 \\
\hline
 & 653.24
\end{array}
$$

$\therefore\quad 743_{(8)}-67.54_{(8)}=653.24_{(8)}$

$$
\begin{array}{rr}
 & 3.102 \\
\times) & 51.3 \\
\hline
 & 11306 \\
 & 3102 \\
+) & 17512 \\
\hline
 & 201.3526
\end{array}
$$

$\therefore\quad 3.102_{(8)} \times 51.3_{(8)} = 201.3526_{(8)}$

$$
\begin{array}{r}
5.12 \\
31\,\overline{)\,200.72} \\
-)\ 175 \\
\hline
37 \\
-)\ 31 \\
\hline
62 \\
-)\ 62 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$\therefore\quad 20.072_{(8)} \div 3.1_{(8)} = 5.12_{(8)}$

例13　证明　$1331_{(p)} = (11_{(p)})^3$　$(p>3)$

证　$(11_{(p)})^3 = [11_{(p)} \times 11_{(p)}] \times 11_{(p)}$

$= 121_{(p)} \times 11_{(p)}$。

$= 1331_{(p)}$

§3 不同进位數間的轉換

我们常用的数是10进位数，在电子计算机中却常采用 2 进位数，而 2 进位数一般很长，书写起来很不方便，所以在编制电子计算机解题程序时，人们常用 8 进位数，这就需要我们掌握它们之间的相互转换。

3.1　将 2 进位数，8 进位数转换为10进位数。

由 2 进位数的表达式：

$a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-n\,(2)}$

$= a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1}$

$+ \cdots + a_{-n} \cdot 2^{-n}$

（a_i是0、1之一，$i=m,\ m-1, \cdots, 1,\ 0, -1, \cdots, -n$）

可以看出，将等式的右端照10进位数的计算方法进行计算的

结果，就把左端的2进位数化为10进位数了。

例1. 把下列各数转换为10进位数

1. $1101_{(2)}$; 2. $10.11_{(2)}$; 3. $11.\dot{1}_{(2)}$

解 $1101_{(2)}=1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$

$=8+4+1$

$=13.$

$10.11_{(2)}=1\cdot2^1+0\cdot2^0+1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}$

$=2+0+0.5+0.25$

$=2.75.$

$11.\dot{1}_{(2)}=1\cdot2^1+1\cdot2^0+1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+\cdots$

$$=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

$$=2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)$$

$$=2+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$=4$。

同样，由8进位数的表达式

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0.a_{-1}\cdots a_{-n(8)}$$
$$=a_m\cdot8^m+a_{m-1}\cdot8^{m-1}+\cdots+a_1\cdot8^1+a_0\cdot8^0$$
$$+a_{-1}\cdot8^{-1}+\cdots+a_{-n}\cdot8^{-n}$$

（a_i是0，1，2，…，6，7之一，

$i=m, m-1, \cdots, 1, 0, -1, \cdots, -n$）

可以看出，将等式的右端照10进位数的计算方法进行计算的结果，就把左端的8进位数化为10进位数了。

例2 把下列各数转化为10进位数。

1. $751_{(8)}$；　　2. $123.5_{(8)}$

解 $751_{(8)}=7\cdot 8^2+5\cdot 8^1+1\cdot 8^0$

$=448+40+1$

$=489.$

$123.5_{(8)}=1\cdot 8^2+2\cdot 8^1+3\cdot 8^0+5\cdot 8^{-1}$

$=64+16+3+0.625$

$=83.625.$

例3　证明　$0.\dot{1}_{(8)}=0.\dot{1}4285\dot{7}$

证　$0.\dot{1}_{(8)}=1\cdot 8^{-1}+1\cdot 8^{-2}+1\cdot 8^{-3}+\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7} \qquad (1)$$

$$0.\dot{1}4285\dot{7}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7} \qquad (2)$$

（10进纯循环小数化为普通分数的方法：将循环节的数码所构成的数作分子；把循环节的每一数码都换成9构成的数作分母，即得所求的分数）。

由（1）、（2）知　$0.\dot{1}_{(8)}=0.\dot{1}4285\dot{7}$。

由以上讨论可知，要把r进位数转换成10进位数，只须把r进位数写成r的各方幂的和的形式，然后按照10进位数的计算方法，计算其结果就行了。

3.2　将10进位数转换为2进位数和8进位数

10进位数，由整数和小数两部分组成。如果能将10进位整数转换为2（8）进位整数，同时又能将10进位小数转换为2（8）进位小数，那么任意10进位数，就可以转换为2（8）