初等数学研究 I

丁亥福赛　樊正恩　周瑞宏　著

甘肃人民出版社

初等数学研究 I

丁亥福赛　樊正恩　周瑞宏　著

甘肃人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究Ⅰ/丁亥福赛,樊正恩,周瑞宏著.
-- 兰州：甘肃人民出版社，2014.5
ISBN 978-7-226-04589-3

Ⅰ.①初… Ⅱ.①丁… ②樊… ③周… Ⅲ.①初等数学—师范大学—教材 Ⅳ.①012

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 077304 号

出 版 人:吉西平
责任编辑:马晓燕
装帧设计:蔡志文

初等数学研究Ⅰ

丁亥福赛 樊正恩 周瑞宏 著
甘肃人民出版社出版发行
（730030 兰州市读者大道 568 号）
兰州大众彩印包装有限公司印刷
开本 710 毫米×1020 毫米 1/16 印张 11.5 插页 1 字数 225 千
2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
印数:1~1 000
ISBN 978-7-226-04589-3 定价:29.80 元

前　言

《初等数学研究Ⅰ》是《初等数学研究》的上篇，也称《初等代数研究》，是高等师范院校数学与应用数学专业开设的一门必修课。内容涉及数系、解析式、函数、方程、不等式和算法。开设本课程的目的是培养师范生高屋建瓴地认识中学数学相应内容。新一轮基础教育课程改革中，基础教育数学课程的内容也发生了一些变迁。高素质的教师队伍是推动课程改革顺利进行的核心之一。传统的《初等数学研究》的内容已不适应新型教师学科知识的基本要求，我们结合中学新课程的内容，将中学数学基本问题分成若个专题进行研究，在内容上适当加深和拓广，在理论、观点、思想和方法上予以总结提高。

本书的框架设计、内容安排、呈现方式及陈述方式均体现数学新课程标准的理念，内容力求反映基础教育数学新课程内容的理论基础，全面结合中学数学课程改革的内容和理念，借鉴在初等数学研究方面最新的理论与实践成果，着力突出理念创新。内容编写的体例结构上，体现教师教育课程的实践性、综合性和选择性，满足基础教育多样化发展和师范生终身发展的需要。在阐述理论或观点的过程中，设计了大量的学生直接参与和实践活动的内容。凸显了学生的“做”和“学”，突出了自主学习和探究性学习，教学中提倡学生自学、教师精讲和学生课外探究的教学理念。着力培养学生的学习能力和研究能力，为培养创新型中学数学教师奠定基础。本书可以作为师范类院校的《初等数学研究》课程的教材，也可作为在职教师的研究性资料。

本书编撰过程中，参考应用了许多专家学者的著作和研究成果，在此表示衷心的感谢。

本书在编撰过程中得到了甘肃民族师范学院数学系领导的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

本书的编撰得到了甘肃民族师范学院院长科研基金(12－19)“新课程背景下《初等数学研究》教学内容改革与教材建设”的资助。

本书由甘肃民族师范学院丁亥福赛老师任主编,第一章、第五章由甘肃民族师范学院樊正恩老师编撰,第二章、第四章由丁亥福赛编撰,第三章、第六章由甘肃民族师范学院周瑞宏老师编撰,全书由丁亥福赛统稿。

本书内容虽然经过各编委多次讨论、审阅、修改,但限于编者的水平,书中难免有不当之处,恳请各位专家、广大师生批评指正。

编者

2014 年 2 月

此为试读,需要完整PDF请访问

目　录 CONTENTS

第一章　数　系

§1.1　数系的扩充 …… 001
§1.2　自然数集 …… 006
§1.3　整数环 …… 011
§1.4　有理数域 …… 015
§1.5　实数域 …… 018
§1.6　复数域 …… 024
习题一 …… 031

第二章　解析式

§2.1　解析式概念 …… 032
§2.2　多项式 …… 035
§2.3　分式 …… 041
§2.4　实数域上的根式 …… 044
§2.5　指数式与对数式 …… 048
§2.6　三角式 …… 053
习题二 …… 061

第三章　初等函数

§3.1　函数概念 …… 062
§3.2　用初等方法讨论函数 …… 068
§3.3　基本初等函数与函数图像 …… 077
§3.4　函数的思想方法 …… 083
§3.5　数列 …… 085

习题三 …… 096

第四章　方程与方程组

§4.1　方程与方程的同解性 …… 098
§4.2　几种特殊类型方程的解法 …… 105
§4.3　方程组 …… 121
习题四 …… 127

第五章　不等式

§5.1　不等式(组)及其性质 …… 129
§5.2　解不等式(组) …… 132
§5.3　证明不等式的常用方法 …… 143
§5.4　几个重要不等式 …… 148
习题五 …… 155

第六章　算法

§6.1　算法概述 …… 157
§6.2　算法的基本结构 …… 163
§6.3　算法设计的基本方法 …… 167
习题六 …… 174

主要参考文献 …… 175

第一章　数　系

数学是研究现实世界空间形式与数量关系的学科.空间形式与数量关系的研究,都离不开数.所以说,数是数学最基本的概念之一.

虽然我们已学习了不少关于数的知识,知道了自然数,整数,有理数,实数,复数等,但是,我们对数的理论体系真正知道多少呢?比如,为什么$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$?为什么两个负数相乘得正数?为什么讨论数要引进数轴?数学归纳法的依据是什么?实数与有理数的本质区别是什么?等等.因此,为了深刻理解、掌握数的本质,有必要建立科学的数系.本章重点介绍数的理论.

§1.1　数系的扩充

数,既是最基本的数学概念,也是研究数学和解决各种实际问题的重要工具.讨论数总离不开运算.通常把对某种运算封闭的数集叫做数系.自然数集、整数集、有理数集等都是数系,分别称为自然数系、整数系和有理数系,仍用 **N**、**Z**、**Q** 等表示.

在中小学数学课程中,学生从认识自然数开始,逐步学习分数、小数、有理数、无理数、实数、复数等.因此,数的运算和扩充是中学数学的重要组成部分.

活动 1.1　数系扩充的过程和方式

目标:总结数系扩充的过程和方式

时间:20 **分钟**

过程：

1. 回忆自己的学习经历，思考下列问题：

(1)数扩充的过程如何？ (2)数系扩充中应遵循哪些原则？

2. 在小组主持人的主持下，组内讨论自己对上述问题的看法，小组内达成共识.

3. 小组发言人就本组讨论的结果向全班展示汇报，全班互动，分享经验.并将全班讨论的要点记录在笔记本上.

数的概念是抽象思维的产物，也是现代数学的基本概念之一，它的产生与人类的生产、生活是分不开的.数的概念产生于对实物的记量.通过物件的多少、线段的长短、面积的大小等的测量，最终归结到某个特定的数.但是，真正与实体直接相关的、用日常生活经验可以获得的数只有自然数.其他的数都需要进行理性思考才能获得.在漫长的史前时代，人类已经认识了抽象的自然数，随着人类文明的进步，数的概念先后经历了多次重大的变化.首先，数的概念从实体的测量发展为抽象的存在，如正方形对角线的测量得到脱离经验的无理数.其次是代数运算的需要，因减法、开方运算的需要产生了负数、无理数和复数.到了近代，“数”不再只是单个的量的表示，数系发展为一个完备化的运算系统.人们为了追求运算的无矛盾性，接受了理想的“数”，包括复数、四元数、八元数等.数系的历史扩充途径与中小学关于数系的扩充过程是不同的，最明显的一个例证就是零和负数的出现并不像我们所想象的那样早.按照与实体分离的程度不同，历史上数按照以下途径扩充：自然数→正有理数→简单的代数无理数(如$\sqrt{2}$、$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$等)→零(公元650年左右)与负有理数→复数→严格的实数集.

一、数系的五次扩充

从数的起源至今，数系经历了五次扩充.随着社会生产的发展，在土地测量、天文观测、土木建筑等活动中，常常会发生度量不尽的情况，如果要精确的度量下去，就必然产生自然数不够用的矛盾.同时为了保证自然数集中除法的封闭性，使得方程$ax = b$有解，分数(指正分数)就应运而生了.这是数系的第一次扩充，由自然数集扩充为正有理数集.

在小学数学课程中，“零”的引入作为数的第一次扩充.然而，最初人们计数时，并没有“零”的概念.后来在生产实践中，需要记录和计算的东西越来越多，逐渐产生了位值制计数法，有了这种计数法，“零”的产生就不可避免了，我国古代算筹中，用“空位”表示 “零”.公元6世纪.印度数学家开始用符号“0”表示“零”.这是数系的第二次扩充，自然数、零和正分数合在一起组成算术数集.

为了表示具有相反意义的量，引进了负数.反映在数学自身上，由于在非负有理数集中减法运算不封闭，像 $2+x=1$ 这样的方程没有解，引进负数才解决了这个矛盾.我国古代数学中很早就把负数与正数一起看成同一个数系的整体，用红色算筹记正数，黑色算筹记负数.在《九章算术》中对正、负数提出了一套完整的符号运算法则：

同名相除：$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$

异名相益：$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$

正无入负之：$0-(+a)=-a$

负无入正之：$0-(-a)=+a$

像这样，对于正数成立的运算法则，对于负数同样成立，算法的合理性使得负数获得承认.在欧洲直到 17 世纪才对负数有了一个完整的认识.此时数系扩充为有理数系，这是数系的第三次扩充.

无理数的引入是由于长度的度量引起的.公元 5 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派发现了单位正方形的边长与对角线是不可公度的.也就是不能用两个数之比的形式来表示其对角线的长度，引入无理数才解决了这个问题.在数学运算上，使得像 $x^2=2$ 这样的方程的解的问题得到了解决.无理数的产生在历史上是先于负数的，但直到 19 世纪下半叶，才在皮亚诺、戴德金、威尔斯托拉斯等数学家的努力下构建了严格是实数理论，形成了实数集.这是数系的第四次扩充.

实数理论建立之前，虚数的概念就已经产生了.虚数的产生不是源于计数或者测量，而是由于数学本身的需要.16 世纪前半叶，意大利数学家塔尔塔利亚发现了三次方程的求根公式，大胆地引进了负数开平方的运算，得到了正确答案.虚数作为一种合乎逻辑的假设得以引进，并在进一步的发展中加以运用.直到 19 世纪前期，数学家高斯等人才找到了复数的具体解释：复数表示复平面上的点.同时，复数在实际中得到了广泛的应用.这是数系的第五次扩充，引进虚数，形成复数集.

现行中小学数学教科书中，数的扩充过程为：自然数集（添零）→扩大的自然数集（添分数）→正有理数集（添负数）→有理数集（添无理数）→实数集（添虚数）→复数集.

中小学数学中，前两次扩充都是从测量某种量的实际需要来说明扩充的必要性的.例如，为了精确表示各种可分割的量，引进了正分数；为了表示具有相反意义的量，引进了负数.若从数学学科本身发展的需要来看，扩充的必要性常常从以下两方面说明：

（1）某一运算的逆运算在原有数集中不能完全实施；

（2）某一方程在原有数集中无解.

一般说来，这两个方面是相互等价而又互为补充的.例如，在非负整数集中，减

法运算不是总能实施的，这意味着方程 $a+x=b$，当 $a>b$ 时在 **N** 内无解；方程 $x^2-2=0$ 在有理数集 **Q** 内无解的事实表明，乘方运算的逆运算——开方，在有理数范围内不能完全实施.

二、数系扩充的途径

数系扩充一般通过两种基本途径来实现，一是添加元素法，即在已经建立的数系 A 中添加一类新的数系 $\overline{A}$，构成扩系 B，即 $B=A\cup\overline{A}$. 例如，在非负有理数集 $\mathbf{Q}^+\cup\{0\}$ 基础上添加负有理数集 $\mathbf{Q}^-$，构成有理数集 **Q**. 二是构造法，即以旧数系 A 为材料从理论上构造一个新数系 B，然后指出新数系 B 中某一真子集与 A 同构，复数系的建立就采用了这一种方法.

中小学数学教学中，为了适应学生的年龄特征和接受能力，关于数系的扩充，主要是渗透近代数学观点，采用添加元素并强调运算的方法来进行的.

三、数系扩充遵循的原则

不论添加元素法还是构造法，从数系 **A** 扩充到数系 **B** 都要遵循下列原则：

(1) $A\subset B$，即集合 A 是集合 B 的真子集；

(2) 数系 A 中已定义的元素之间的基本关系和运算，在数系 B 中被重新定义，而且对于 A 的元素来说，重新定义的运算和关系，与原来 A 中的定义一致；

(3) 在 A 中不是总能施行的某种运算或无解的某类方程，在 B 中总能施行或有解；

(4) 在同构的意义下，B 是满足上述三个原则的 A 的所有扩充中的最小扩充. 且由 A 唯一确定.

数系的每一次扩充，都解决了原有数集中不能解决的一些问题，从而扩大了应用范围. 但是数系的每一次扩充也会失去某些性质. 例如，从自然数系扩充到整数系后，整数系中减法具有封闭性，但失去了自然数的良序性质，即自然数集中任何非空子集都有最小元.

在以后的各节中，我们将在自然数的基础上，依次讨论数的每一次扩充. 通过数的理论体系的建立，进一步掌握近代数学观点和方法，同时也为“居高临下”地分析、处理中学数学教科书中有关数的内容打下良好基础.

先睹为快

为了便于后面的讨论，我们先学习几个概念.

1. 代数系统

设 S 是一个非空集合，如果存在一个法则“$\circ$”，使得对 S 中任意两个元素 a 与 b，有 S 中唯一确定的元素 $a\circ b$ 与之对应，则称“$\circ$”是 S 的一个代数运算，并称 S 对运

此为试读，需要完整PDF请访问

算“$\circ$”构成一个代数系统，记为$(S,\circ)$.

2. **同构**

设$(S,\circ)$与$(A,*)$是两个代数系统，若存在A到S的一个一一映射f，并对$\forall a,b\in S$有$f(a\circ b)=f(a)*f(b)$，则称A与S同构，并说f是A到S的同构映射.

同理，当A与S内有两种代数运算时，同样可以定义他们同构的意义.

3. **扩充**

如果代数系统A与代数系统S的一个真子集同构，则称S是A的一个扩充.

4. **群、环、域**

设$(S,\circ)$是代数系统，如果运算“$\circ$”满足下列条件：

(1)(满足结合律)$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c,a,b,c\in S$；

(2) 存在单位元I，使$I\circ a=a\circ I=a,\forall a\in S$；

(3) 对S中任一元素a，存在逆元a^{-1}，使$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=I$，则称$(S,\circ)$为群.

如果“$\circ$”还满足

(4)(交换律)$a\circ b=b\circ a,a,b\in S$，则称$(S,\circ)$为交换群.

在群$(S,\circ)$中，如果运算“$\circ$”仅满足结合律，未必有单位元或逆元，则称$(S,\circ)$为半群.

如果$(S,+)$是交换群，$(S,\circ)$是半群，且满足“$\circ$”对“$+$”的分配律. 即

(5)$a\circ(b+c)=a\circ b+a\circ c,a,b,c\in S$，则称代数系统$(S,+,\circ)$是一个“环”. 在环$(S,+,\circ)$中，如果运算“$\circ$”满足交换律，并且单位元与非零元素的逆元存在，则称$(S,+,\circ)$是“域”.

5. **全序集**

如果集合S的元素之间有一个关系“$<$”满足

(1) 反自反性：$a\not<a,\forall a\in S$；

(2) 传递性：若$a<b,b<c$，则$a<c$；

(3) 全序性：对S中任意两个元素a、b，下列三种情况有且仅有一种成立：$a<b,a=b,a>b$，则称S是全序集，记为$(S,<)$.

◆◆◆课外阅读

阅读《中学代数研究》(张奠宙、张广祥主编，高等教育出版社)第1页至第6页，了解数系的历史发展过程.

◆◆◆课外讨论

查阅资料，讨论数系扩充到复数系后是否还能继续扩充，并说明理由。

§1.2 自然数集

自然数是人类最早认识的数，与其他数学概念一样，自然数也是在实践的需要中产生的.

在实际生活中，自然数的作用有两个：一是计数，回答有多少的问题；二是排序，回答第几的问题. 因此，由此抽象出来了自然数的基数理论与序数理论.

活动 1.2 自然数及其性质

目标：讨论自然数的概念及其性质

时间：20 分钟

过程：

1. 回忆数学学习经历，回答下列问题：(1) 自然数是如何定义的?(2) 自然数有哪些性质?你能证明这些性质吗?(3) 为什么 $2+3=5, 2\times 3=6$?

2. 在小组主持人的主持下，组内讨论，记录员做好记录.

3. 小组发言人就本组讨论的结果向全班汇报，全班互动，分享经验. 并将全班讨论的要点记录在笔记本上.

一、自然数的公理化系统

19 世纪中叶，在数学公理化思潮的影响下，皮亚诺(G. Peano)1889 年建立了自然数的序数理论. 这种理论以两个不加定义的概念“集合”和“后继”为基础，通过一组公理刻画了自然数关于顺序的基本性质.

1. 皮亚诺公理

定义 1 一个非空集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做自然数，如果 $\mathbf{N}$ 的元素之间有一个基本关系“后继”(用符号“′”表示)，并满足下列公理：

(1) $1\in\mathbf{N}$，对任意 $a\in\mathbf{N}$，$a'\neq 1$；

(2) 对任何 $a\in\mathbf{N}$，有唯一的后继元素 a'(即 $a=b\Rightarrow a'=b'$)；

(3)1 以外的任何元素，只能是一个元素的后继元素(即 $a'=b'\Rightarrow a=b$)；

(4)(归纳公理) 若 $M\subseteq\mathbf{N}$，且

1° $1\in M$；2° 当 $a\in M$ 时，有 $a'\in M$，则 $M=\mathbf{N}$.

定义 1 中的一组公理，叫做皮亚诺公理. 显然，我们日常所用的自然数满足上述定义. 如果把 N 中的 1 放在最前面，后面紧跟它的后继数，依此类推，可以把 N 中元素排成一列：$1, 1', (1')', ((1')')', \cdots$. 如果选用适当的符号，如，记 $1'=2, 2'=3, \cdots$，便是我们所熟悉的自然数列：1,2,3,4,…. 有了这组公理，自然数集里的元素就可以完全确定下来. 此外，归纳公理是数学归纳法的理论根据. 由它可以直接推

出第一数学归纳法.

定理 1　设是一个与自然数有关的命题,如果

(1)$P(1)$ 成立;

(2) 假设 $P(k)$ 成立,则 $P(k+1)$ 成立;

那么对任意自然数,$P(n)$ 都成立.

证明　设 M 是由满足命题 $P(n)$ 的自然数组成的集合,$M \subseteq \mathbf{N}$. 因为 $P(1)$ 成立,所以 $1 \in M$;又由(2)$k \in M \Rightarrow k+1 \in M$,根据归纳公理,$M = \mathbf{N}$. 即 $P(n)$ 对任意自然数都成立.

2. **自然数的运算**

在皮亚诺公理基础上,可以用公理化方法定义自然数的加法与乘法运算.

定义 2　自然数的加法是指这样的对应:对于每一对自然数 a,b,有且仅有一个自然数(记为 $a+b$) 与之对应,且具有下列性质:

(1) 对任意 $a \in \mathbf{N}$,$a+1 = a'$,

(2) 对任意 $a,b \in \mathbf{N}$,有 $a+b' = (a+b)'$,其中 a,b 叫做加数,$a+b$ 叫做它们的和. 求和的运算叫做加法.

这种形式的定义称为归纳定义,即首先确定 $a+1$ 等于什么,然后在 $a+b$ 的基础上定义 $a+b'$. 根据这个定义,对于任意两个自然数,都可以求出它们的和.

例 1　求 $2+3$.

解　先求 $2+1$,$2+1 = 2' = 3$;

再求 $2+2$,$2+2 = 2+1' = (2+1)' = 3' = 4$;

再求 $2+3$,$2+3 = 2+2' = (2+2)' = 4' = 5$.

定理 2　两个自然数的和存在且唯一.

证明　设任意 $a,b \in \mathbf{N}$,M 是所有使得命题成立的 b 组成的集合.

对任意给定的自然数 a,下证当 $b=1$ 时命题成立:由加法定义 $a+1 = a'$ 及皮亚诺公理,a' 存在且唯一,所以当时 $b=1$,命题成立,即 $1 \in M$.

设当 $b=k$ 时命题成立,即 $b+k$ 存在且唯一. 由加法定义的条件(2)得 $b+k' = (a+k)'$,由皮亚诺公理知 $(a+k)'$ 存在且唯一,所以当 $k \in M$ 时,有 $k' \in M$. 由归纳公理知命题对一切自然数成立.

定理 3　自然数的加法满足结合律和交换律. 即对任意 $a,b,c \in \mathbf{N}$,有

(1)a+(b+c) = (a+b)+c;　　(2)a+b = b+a

证明　(1) 设 a,b 是任意给定的两个自然数,令使得(1) 式成立的所有自然数 c 组成的集合为 M,则 $M = \{c \mid a+(b+c) = (a+b)+c, a,b,c \in \mathbf{N}\}$,

由于(a+b)+1 = (a+b)′ = a+b′ = a+(b+1),所以 $1 \in M$;

若 $c \in M$,即 a+(b+c) = (a+b)+c,则

$a+(b+c')=a+(b+c)'=(a+(b+c))'=((a+b)+c)'=(a+b)+c'$

$\therefore c'\in M$.

根据归纳公理,$M=\mathbf{N}$.又a,b是任意的,所以$a+(b+c)=(a+b)+c$成立.

同理可证明(2).

定义 3　自然数的乘法是这样的对应:对于每一对自然数a,b,有且仅有一个自然数(记为$a\cdot b$)与之对应,且满足:

(1) 设$a\in\mathbf{N}$,则$a\cdot 1=a$;

(2) 设$a,b\in\mathbf{N}$,有$a\cdot b'=a\cdot b+a$,其中a,b叫做乘数,$a\cdot b$叫做a,b的积.求积的运算叫做乘法.

根据归纳公理容易证明

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b个}$$

再根据自然数和的存在唯一可知自然数的积也是存在且唯一的.

例 2　求$2\cdot 3$

解　因为$2\cdot 1=2,2\cdot 2=2\cdot 1'=2\cdot 1+2=4$,所以$2\cdot 3=2\cdot 2'=2\cdot 2+2=4+2=6$.

由归纳公理和定义 3,容易验证下面定理成立.

定理 4　自然数的乘法满足交换率和结合律.

定理 5　自然数的乘法对加法满足分配律.

证明　下证自然数的乘法满足右分配律,即对N中任意元素a,b,c,有$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

设a,b是任意给定的两个自然数,令使得上式成立的所有自然数c组成的集合为M,即$M=\{c\mid (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c\}$.

因为$(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$,所以$1\in M$.

假定$c\in M$,有$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$,于是

$(a+b)\cdot c'=(a+b)\cdot c+(a+b)$

$=(a\cdot c+b\cdot c)+(a+b)=(a\cdot c+a)+(b\cdot c+b)=a\cdot c'+b\cdot c'$.

$\therefore c'\in M$,由归纳公理得$M=\mathbf{N}$.

即$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$成立.

由于乘法满足交换律,所以乘法对加法的左分配律也成立,即

$c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$.

左分配律与右分配律统称为分配律.

在加法与乘法运算的基础上,可以定义自然数的减法与除法运算.

定义 4　设 $a,b \in \mathbf{N}$，如果存在 $x \in \mathbf{N}$，使得 $b+x=a$，则称 x 为 a 减去 b 的差，记作 $a-b$，a 叫做被减数，b 叫做减数. 求两数差的运算叫做减法.

自然数集中，由于方程 $b+x=a$ 不一定有解，所以减法不一定总能实施.

定义 5　设 $a,b \in \mathbf{N}$，如果存在 $x \in \mathbf{N}$，使得 $b \cdot x = a$，则称 x 是 a 除以 b 的商，记作 a/b，a 叫做被除数，b 叫做除数. 求两数商的运算叫做除法.

除法是乘法的逆运算，在自然数集中，由于方程 $b \cdot x = a$ 不一定总有解，所以除法也不一定总能实施.

3. **自然数的顺序关系**

定义 6　(1) 设 $a,b \in \mathbf{N}$，若 a' 与 b' 相同，则称 a 等于 b，记作 $a=b$.

(2) 设 $a,b \in \mathbf{N}$，若存在 $k \in \mathbf{N}$，使得 $a+k=b$，则称 a 小于 b(或 b 大于 a)，记作 $a<b$(或 $b>a$).

定理 6　(加法单调性) 设任意 $a,b,c \in \mathbf{N}$，则

(1) 若 $a=b$，则 $a+c=b+c$；

(2) 若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

(3) 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

定理 7　(加法消去律) 设任意 $a,b,c \in \mathbf{N}$，则

(1) 若 $a+c=b+c$，则 $a=b$；

(2) 若 $a+c<b+c$，则 $a<b$；

(3) 若 $a+c>b+c$，则 $a>b$.

定理 8　自然数顺序关系具有下列性质：

(1)(对逆性) 设 $a,b \in \mathbf{N}$，当且仅当 $a<b$ 时，$b>a$；

(2)(传递性) 设 $a,b,c \in \mathbf{N}$，若 $a<b$ 且 $b<c$，则 $a<c$；

(3)(三分性) 对任意 $a,b \in \mathbf{N}$，在 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 中有且只有一个成立.

二、自然数集的性质

性质 1　自然数集是有序集.

有序集是指该集合中规定了顺序关系，并且具有传递性和三分性.

性质 2　自然数集具有阿基米德性质(即如果对任意 $a,b \in \mathbf{N}$，则存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $na>b$).

证明　取 $n=b+1$，即可得证.

性质 3　自然数集具有离散性(即任意两个相邻的自然数 a 与 a' 之间不存在自然数 b，使得 $a<b<a'$).

性质 4　(最小数原理) 自然数集的任一非空子集中必有一个最小数.

不难验证，自然数的归纳公理与最小数原理是等价的，由最小数原理可以证明

第二数学归纳法成立.

定理 9 （第二数学归纳法的基本形式）设 p(n) 是一个与自然数 n 有关的命题，如果

(1)P(1) 成立；

(2) 假设 P(n) 对于所有满足 $l < k$ 的自然数 l 成立，则 P(k) 成立；

那么 P(n) 对所有自然数成立.

证明　假设符合上述条件(1)、(2) 的 P(n) 对某些自然数并不成立，则

$M = \{n \mid P(n)$ 不是真命题$\}$是非空集合，因而 M 有最小数 n_0，$n_0 > 1$，

因为 n_0 是 P(n) 不成立的最小数，所以对于小于 n_0 的一切数 P(n) 都成立，由 (2) 知 $P(n_0)$ 成立，即 $n_0 \notin M$，矛盾. 所以 P(n) 对所有自然数成立.

三、扩大的自然数集

零的出现比分数还要晚，所以，早期所说的自然数只是正整数序列. 特别，皮亚诺公理告诉我们，1 是一个自然数，且 1 不是任何自然数的后继. 所以，皮亚诺公理系统中 1 是最小的自然数，0 不是自然数.

0 是不是自然数不会对数学内容产生实质的影响，但为了理论上的需要，在序数理论中，把 0 作为唯一的 1 前面的数而引入自然数列. $\{0\}$ 与自然数集的并集叫做扩大的自然数集. 这样，一方面，运算中两个相等的自然数相减为 0，在理论上更容易被接受；另一方面，0 可以起到联系正、负数桥梁的作用.

我国数学教科书在 20 世纪 90 年代前一直没有把 0 作为自然数，自然数从 1 开始. 1993 年颁布的《中华人民共和国国家标准》(*GB*3100 ～ 3102 － 93) 中《量和单位》(11－29) 第 311 页，规定自然数包括 0. 因此近年编写的中小学数学教科书也作了修改，用 0 表示一个物体也没有对应的计数.

在扩大的自然数集里，关于顺序关系和四则运算的定义，与原有的自然数集一样，但需要补充以下定义：

(1)0 是最小的自然数；

(2)$a + 0 = 0 + a = a(\forall a \in \mathbf{N})$；

(3)$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0(\forall a \in \mathbf{N})$.

不难验证，在扩大的自然数集里，原有的基本顺序关系和基本运算律仍然成立，但有些也需要作适当的修改. 例如，$a + b > a$ 应改为 $a + b \geqslant a$，$a > b \Rightarrow ac > bc$ 应该为 $a > b \Rightarrow ac \geqslant bc$ 等等. 以后的讨论中我们仍用 **N** 记自然数集，用 $\mathbf{N}^*$ 记扩大的自然数集.

拓展学习　自然数的基数理论

1. **自然数的定义**

此为试读，需要完整PDF请访问