

各向异性板热弯曲问题的传递矩阵解法*

王元淳 许飞

(上海交通大学, 上海 200030)

摘要 对板热弯曲问题不作任何假设, 从三维正交各向异性热弹性力学的基本方程出发, 导出其状态方程, 用传递矩阵求解, 为解决薄板、中厚板、厚板和复合材料层压板的热弯曲问题提供了一种统一解法。

关键词 板热弯曲问题; 状态方程; 正交各向异性; 复合材料层压板

0 引言

通常, 在求解板热弯曲问题时, 采用基尔霍夫假设或考虑横向剪切变形的各种精化理论, 每种假设均适用于一定的范围。为此, 本文将文献[1]的方法进一步应用于板的热弯曲问题, 对板的位移和应力分布不作任何假设, 直接从三维正交各向异性热弹性力学的基本方程出发, 以四边简支矩形板为例, 导出其状态方程并求解。本文方法精度高, 适用性强, 可解薄板、中厚板、厚板和复合材料层压板的热弯曲问题。

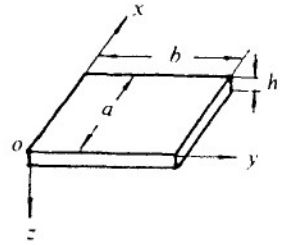


图1 正交各向异性板四边简支

1 单层板的状态方程及其解

设图1所示正交各向异性板四边简支, 受温度 $T(x, y, z)$ 。自三维热弹性力学的物理方程和平衡方程中消去 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} , 得

$$\frac{\partial}{\partial z} [u \ v \ \sigma_z \ \tau_{zx} \ \tau_{yz} \ w]^T = \bar{D} [u \ v \ \sigma_z \ \tau_{zx} \ \tau_{yz} \ w]^T + \bar{T} \quad (1)$$

式中 $\bar{T} = T[0 \ 0 \ 0(C_2\alpha_1 + C_3\alpha_2)\gamma + (C_3\alpha_1 + C_4\alpha_2)\beta\alpha_3 - C_1\alpha_1 + C_5\alpha_2]^T$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & -\beta & 0 \\ -C_2\gamma^2 - C_6\beta^2 & -(C_3 + C_6)\gamma\beta & C_1\gamma & 0 & 0 & 0 \\ -(C_3 + C_6)\gamma\beta & -C_6\gamma^2 - C_4\beta^2 & C_5\beta & 0 & 0 & 0 \\ C_1\gamma & C_5\beta & C_7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

* 国家自然科学基金资助项目

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial y}$$

而

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}, & C_2 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, & C_3 = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, & C_4 = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \\ C_5 = -\frac{C_{23}}{C_{33}}, & C_6 = C_{66}, & C_7 = \frac{1}{C_{33}}, & C_8 = \frac{1}{C_{55}}, & C_9 = \frac{1}{C_{44}} \end{cases} \quad (2)$$

式中, C_{11}, C_{12}, \dots 和 C_{66} 为沿主方向的刚度系数, α_1, α_2 和 α_3 为沿主方向的热膨胀系数.

被消去的应力分量由下式得到

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2\gamma & C_3\beta & -C_1 \\ C_3\gamma & C_6\beta & -C_5 \\ C_6\beta & C_6\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_2\alpha_1 + C_3\alpha_2 \\ C_3\alpha_1 + C_4\alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

取

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ w \\ T \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \sigma_{zmn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \tau_{zxmn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \tau_{yzmn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ w_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ T_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 可知, 简支边的边界条件得到满足. 将式 (4) 代入式 (1), 得状态方程

$$\frac{d}{dz} R(z) = \tilde{D}R(z) + \tilde{E}T_{mn}(z) \quad (5)$$

式中

$$R(z) = [\mu_{mn}(z) \ v_{mn}(z) \ \sigma_{zmn}(z) \ \tau_{zxmn}(z) \ \tau_{yzmn}(z) \ w_{mn}(z)]^T$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 \\ C_2\xi^2 + C_6\eta^2 & (C_3 + C_6)\xi\eta & C_1\xi & 0 & 0 & 0 \\ (C_3 + C_6)\xi\eta & C_6\xi^2 + C_4\eta^2 & C_5\eta & 0 & 0 & 0 \\ -C_1\xi & -C_5\eta & C_7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E} = [0 \ 0 \ 0 \ (C_2\alpha_1 + C_3\alpha_2)\xi(C_3\alpha_1 + C_4\alpha_2)\eta\alpha_3 - C_1\alpha_1 + C_5\alpha_2]^T$$

其中

$$\xi = \frac{m\pi}{a}, \quad \eta = \frac{n\pi}{b}$$

方程(5)的解为^[2]

$$R(z) = D'(z)R(0) + E'(z) \quad (6)$$

式中

$$D'(z) = e^{\tilde{D}z}, \quad E'(z) = \int_0^z e^{\tilde{D}(z-\zeta)} \tilde{E} T_{mn}(\zeta) d\zeta$$

在式(6)中令 $z = h$, 有

$$R(h) = D'(h)R(0) + E'(h) \quad (7)$$

按已知的力和温度载荷, 由上式的第 3, 4 和 5 式可求出未知的 $u_{mn}(0)$, $v_{mn}(0)$ 和 $w_{mn}(0)$. 板上表面的力学量 $R(0)$ 全部已知后, 便可按式(6)和(3)求出板任一点的位移分量和应力分量.

2 层压板的状态方程及其解

设图 2(a) 所示具有 p 个正交铺层的层压板四边简支, 受温度 $T(x, y, z)$. 对图 2(b) 所示第 j 单层的状态方程同式(5), 其解同式(7), 即

$$R_j(z) = D'_j(z)R_j(0) + E'_j(z) \quad 0 \leq z \leq h_j \quad (8)$$

当 $j=1$ 和 p 时, 有

$$R_1(h_1) = D'_1(h_1)R_1(0) + E'_1(h_1)$$

$$R_p(h_p) = D'_p(h_p)R_p(0) + E'_p(h_p)$$

考虑连续条件

$$R_j(h_j) = R_{j+1}(0) \quad (j=1, 2, \dots, p-1) \quad (9)$$

传递求解, 有

$$R_p(h_p) = \prod R_1(0) + \bar{\prod} \quad (10)$$

式中

$$\prod = D'_p D'_{p-1} \cdots D'_1$$

$$\bar{\prod} = D'_p (D'_{p-1} \cdots D'_2 E'_1 + \cdots + D'_{p-1} \cdots D'_3 E'_2 + \cdots + E'_{p-1}) + E'_p$$

$$D'_j = D'_j(h_j), \quad E'_j = E'_j(h_j) \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

同前节, 板上表面的力学量 $R_1(0)$ 全部解出后, 可按下式和式 (2) 求任一单层任一点的位移分量和应力分量.

$$R_j(z) = \prod_j(z)R_1(0) + \bar{\prod}_j(z) \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (11)$$

式中

$$\prod_j(z) = D'_j(z)D'_{j-1}(h_{j-1}) \cdots D'_1(h_1)$$

$$\bar{\prod}_j(z) = D'_j(z)[D'_{j-1}(h_{j-1}) \cdots D'_2(h_2)E'_1(h_1) + \cdots + D'_{j-1}(h_{j-1}) \cdots D'_3(h_3)E'_2(h_2) + \cdots + E'_{j-1}(h_{j-1})] + E'_j(z)$$

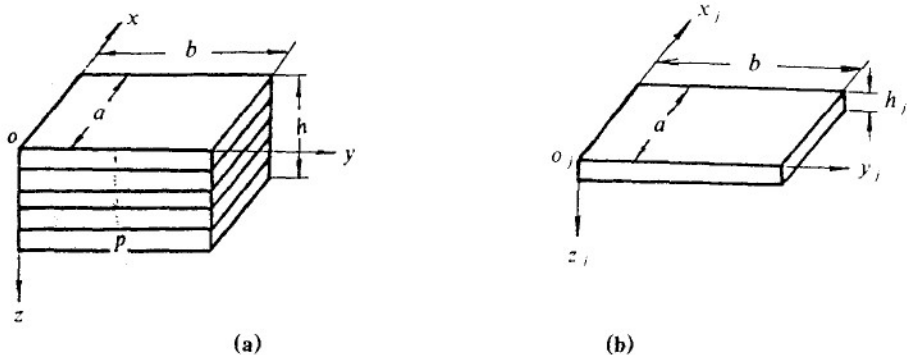


图 2 层压板四边简支

3 算例与结语

3.1 各向同性板的挠度

这时, 只需在式(2)中取

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

3.1.1 受均布载荷正方形板的挠度

设图 1 中的 $a = b$, 本文计算得到的板中心点 ($x = a/2, y = b/2, z = h/2$) 挠度与采用符拉索夫精化理论得到的该点挠度^[3] 如表 1 所示.

3.1.2 温度沿板厚线性变化正方形板的挠度

设温度 $T = T_0 z / h$

其中, T_0 为常数. 本文得到的板中心点的挠度与采用基尔霍夫假设得到的该点挠度^[4] 如表 2 所示.

4.2 层压板的热应力和挠度

设三层对称 ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) 等厚 Cross-Ply 正方形板的 $a = b = 0.9, a/h = 10, h_1 = h_2 = h_3,$

表 1 符拉索夫精化理论得到的挠度 (w/a)

h/a	本文解	文献[3]解
1/5	3.2420×10^{-4}	3.3473×10^{-4}
1/10	2.2992×10^{-3}	2.3320×10^{-3}
1/25	3.4858×10^{-2}	3.4949×10^{-2}

表 2 基尔霍夫假设得到的挠度 (w/a)

h/a	本文解	文献[4]解
1/10	1.0752×10^{-3}	1.0727×10^{-3}

材料参数取为

$$E_1 = E_0 = 25, E_2 / E_0 = E_3 / E_0 = 1.0, G_{12} / E_0 = G_{13} / E_0 = 0.5$$

$$G_{23} / E_0 = 0.2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \alpha_1 / \alpha_0 = 1.0$$

$$\alpha_2 / \alpha_0 = \alpha_3 / \alpha_0 = 3.0$$

温度沿板厚线性分布, 在面内正弦分布, 即

$$T = z T_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

其中, T_0 为常数. 本文得到的板上表面中点 $(a/2, b/2, 0)$ 的应力 $\sigma_x \times 10(\alpha_0 T_0 E_0 a)$ 和板中心点的挠度 $w / (\alpha_0 T_0 a^2)$ 与采用一阶剪切变形理论^[5] 和三阶剪切变形理论^[6] 得到的同一点应力和挠度分别如表 3 和表 4 所示.

表 3 一阶剪切变形理论得到的应力和挠度

本文解	0.984 0
	1.025 3*
三阶剪切变形理论解	1.049 9
一阶剪切变形理论解	1.046 0
经典 CPT	1.031 2

表 4 三阶剪切变形理论得到的应力和挠度

本文解	0.035 80
三阶剪切变形理论解	0.037 24
一阶剪切变形理论解	0.084 7
经典 CPT	0.026 3

* 板上、下表面中心点挠度的线性插值值.

本文以正交各向异性热弹性体为对象, 从三维热弹性力学基本方程出发, 给出了薄板、中厚板、厚板和复合材料层压板热弯曲问题的统一解法, 算例结果表明了本文方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Jiarang. Fan and Jianqiao Ye, An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers, Int. J. Solids Structures, 1990, 26(516), 655~662
- 2 郑大钟. 线性系统理论, 北京: 清华大学出版社, 1991, 49
- 3 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论. 西安: 西安交通大学出版社, 1993, 188
- 4 严宗达, 王洪礼. 热应力, 北京: 高等教育出版社, 1993, 311
- 5 Reddy J. N. and Hsu Y. S. Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates, Therm Stresses, 1980, 3, 475~413
- 6 Khdeir A. A. and Reddy J. U. Thermal Stresses and deflections of cross ply laminated plates using refined plate theories, Therm Stresses, 1991, 14, 419~438

Transfer Matrix Method for Thermal Bending Problems of Anisotropic Plates

Wang Yuanchun Xu Fei

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract Without imposing any assumption, the state equations are derived by starting from the fundamental equations of three-dimensional orthotropic thermoelasticity and solved by transfer matrix method. A unified solution is given in order to solve the thermal bending problems of thin plates, moderately thick plates, thick plates and composite laminates.

Key words thermal bending problem of plate; state equation; orthotropic; composite laminate

多层厚椭球壳热应力非线性 有限元计算研究

郁向东 罗群生

(中国工程物理研究院结构力学研究所, 610003)

摘要 本文给出了多层厚椭球壳有限元热传导和热应力计算结果, 对多层厚椭球壳, 在内层自热功率下进行瞬态温度分布计算, 计算中考虑了边界对流和辐射的影响, 并将结果与试验进行了比较. 紧跟着计算了相应温度下的热应力. 在热应力计算中, 考虑了非金属材料弹性模量与温度之间的相互关系; 对软垫层的非线性则用超弹性理论予以处理; 计算结果比较满意.

关键词 热传导; 热应力; 有限元; 非线性; 超弹性

0 前言

产品中温度分布和由于温度变化而产生的应力分布, 一直是我们所关心的问题. 研究温度场的计算和由此而产生的热应力, 对评价结构的安全性能, 对产品的未来发展, 具有重要意义.

经典的 Fourier 热传导理论是众所周知的, 但对复杂结构寻求 Fourier 方程的解析解是困难的, 因此近 20 年大量发展了数值解法, 尤其是有限元数值模拟, 近十几年来有突飞猛进的发展. E.L.Wilson, O.C.Ziekiewice, K.J.Bathe 等人在这些方面做出了卓越的贡献^[1~6]. 加上大型通用程序的编制和运用, 热传导和热应力分析, 已成为工程分析中不可缺少的部分.

国际上, 尤其是美国圣地亚实验室, 在热传导和热响应方面做过很多研究, 在 80 年代研制了用于非线性热传导问题的有限元计算程序 COYOTE^[7], 三维有限元热传导程度 TACO3D^[8], 和热传导的有限元方法^[9], 并对容器和壳体进行过许多热分析计算, 特别是在火烧环境试验和热响应分析中, 为评价火烧环境的可靠性发挥了相应的作用^[10], 并且, 在 80 年代末期, 发展了一维正、逆向温度分布计算方法^[11], 以解决由测量数据推算火烧试验表面温度的问题.

随着大型计算机程序的引进, 我院在热传导计算上也做过不少工作, 但大部局限于二维稳态和瞬态计算, 得到了许多有用的结果. 本研究项目的重点, 在于研究复杂结构非线性瞬态温度分布, 并紧跟着计算相应的热应力分布. 温度计算时, 考虑了边界对流和辐射的非线性特性; 热应力计算时, 考虑软垫层大变形的超弹性特性; 对非金属材料, 根据其实验曲线, 采用随温度变化的弹性模量, 进行非线性数值计算.

1 热传导控制方程

假设在椭球壳结构内, 温度分布函数为 $T = T(x, y, z, t)$, 密度为 ρ , 比热为 c ,

热传导系数为 K_x, K_y, K_z , 单位体积内的自热功率为 \bar{q} , 则热传导方程为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \bar{q} \tag{1.1}$$

这就是早在上个世纪 30 年代, 就导出 Fourier 热传导控制方程. 如果我们将 $T = T(x, y, z, t)$ 人为地进行变量分离, 从虚功原理出发, 将物体进行单元离散, 经过严格的推导, 可以得到有限元方程.

$$[C]\{T\} + [K]\{T\} = \{Q\} \tag{1.2}$$

其中 $[C]$ —结构的热容矩阵;

$[K]$ —结构的热传导矩阵;

$\{T\}$ —结构的节点温度矢量;

$\{Q\}$ —结构节点的热流矢量.

此方程适用于编制程序, 进行数值求解, 有了边界条件和初始温度条件, 就可以求得一个温度分布的有限元近似解. 由方程 (1.2) 可以看出, 当温度分布与时间无关时, 即有:

$$[K]\{T\} = \{Q\} \tag{1.3}$$

方程 (1.2) 称为瞬态方程, 而 (1.3) 称为稳态方程. 不论 (1.2) 或 (1.3) 方程中矩阵 $[c]$ 和 $[k]$ 均有可能与温度无关或有关. 如果无关, 则方程是线性的, 如果有关方程是非线性的.

2 结构的平衡方程

设应力矢量为 $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}^T$, 应变矢量为 $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}\}^T$, $\{\epsilon_t\} = \Delta T \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, 0, 0, 0\}^T$, V 为单元体积, $\Delta T = T - T_0$, T 是计算点的当前温度, T_0 是计算点的参考温度. 我们可以从虚功原理出发, 给出结构的平衡方程. 协调条件则可由所选择的位移函数加以保证. 再在边界上作适当处理, 给出有限元求解方程. 此处我们只给结果:

$$[K_c]\{u_c\} = \{F_t^c\} + \{F_p^c\} + \{F_n^c\} \tag{2.1}$$

式中: $[K_c] = \int_V [B]^T [D] [B] dv$ 称为单元刚度矩阵;

$\{F_t^c\} = \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_t\} dv$ 为单元热载荷矢量;

$\{F_p^c\} = \int_s \{N\}^T \{P\} ds$ 为单元压力矢量;

$\{F_n^c\}$ 单元节点矢量;

$[D]$ 为弹性矩阵.

应变可以与节点位移发生关系:

$$\{\epsilon\} = [B]\{u_c\} \tag{2.2}$$

其中 $[B]$ 是应变位移矩阵, 而 $\{u_c\}$ 是单元节点位移矢量. $[N]$ 表示形状函数矩阵. $\{P\}$ 为作用面上的压力矢量; 方程 (2.1) 是离散后单元的平衡方程. 将整个结构的所有单元进行叠加, 将单元刚度矩阵扩展成结构刚度矩阵, 外载荷矢量扩展成结构的载荷

矢量, 则去掉方程(2.1)中的下标后, 该方程就是整个结构的平衡方程.

用位移法求得各节点的位移 $\{u\}$, 应变和应力则由下述方程求得:

$$\{\varepsilon^e\} = [B]\{u_e\} - \{\varepsilon_f\} \quad (2.3)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} \quad (2.4)$$

由(2.1)可知, 如果结构刚度矩阵 $[K]$ 与位移的大小无关, 则方程是线性的, 否则是非线性的. 在多层椭球壳中, 非金属材料的性能与温度有关; 软垫层则有较大的弹性变形, 只能在 $\{u\}$ 的增量很小时, 才能近似将 $[K]$ 看成常数, 因此需要进行增量迭代求解, 这两种材料给问题带来了复杂的非线性.

3 非线性的处理

在本课题中, 我们所遇到的非线性有两类, 一类是边界非线性, 这类非线性在瞬态温度计算, 处理对流和辐射边界时, 需要考虑. 只要考虑辐射边界的温度计算问题, 都是非线性的, 因为热辐射率 E , 是温度 T^4 的函数; 对流边界上如果对流系数 h_f 也是温度的函数, 也同样给问题带来非线性. 另一类是材料非线性, 这里又分为两种情况, 一种情况是材料热学性能的非线性, 若将其传导系数 k 和热容量 c 看成是随温度变化的, 则在温度计算的需要考虑非线性; 另一种情况是, 在应力计算时, 材料的力学性能的非线性, 如软垫层材料, 虎克定律所确定的关系已不适用, 非金属材料的弹性模量也随温度而改变, 这些都是本计算中遇到的非线性问题. 对于在温度计算时, 所遇到的边界和材料的热学性能的非线性问题, 它们最终在方程(1.1)中, 都是使系数矩阵与温度相关, 在解非线性方程组时, 必须使用迭代求解, 并注意在时间步长上间隔不要取得过大, 往往能得到较好的收敛结果, 我们在温度分布计算时, 已经证明了这一点. 在应力计算时, 则复杂得多, 我们分别加以说明.

3.1 非金属材料性能

我们的目的是寻找非金属材料力学性能随温度变化的相关函数, 这样在方程(2.1)中, 刚度矩阵 $[K]$, 就只与温度载荷矢量相关, 在求解时, 采用增量迭代法, 只不过是迭代、求解时, 每步的增量要足够小, 此时刚度矩阵 $[K]$ 可以近似地认为是常数, 因此方程(2.1)仍然适用, 理论上与求解温度场非线性稳态分布相类似.

有文献表明, 该材料的力学性能是很复杂的, 在单向拉伸试件中不同的加载速率, 不同的温度下, 所给出的应力—应变曲线都呈现出非线性性质. 在温度应力计算时, 不可能考虑如此多的复杂因素, 我们力求抓住主要矛盾, 进行大胆的取舍. 首先, 温度应力的计算, 不考虑应变速率的问题, 因为实际上温度变化是相当缓慢的, 因此我们选取加载速率最小的那组数据. 假定应力—应变关系可以写成 $\sigma = f(\varepsilon, T)$, 实验结果给出在温度 $T = -10, 10, 35$ 及 45°C 四种温度下的四条 $\sigma \sim \varepsilon$ 曲线, 这四条曲线虽然不完全是直线, 但与直线差别不大, 近似处理时, 可以当作直线. 此时我们将 $\sigma = f(\varepsilon, T)$ 写成:

$$\sigma = E(T)\varepsilon$$

也即假定在温度 T 为常数时, σ 与 ε 成线性关系, 而不同的温度下, 又有不同的弹性模量. 我们以表格的形式给出对应温度下的弹性模量值, 那么在应力计算时, 可以根据当前温度, 进行插值, 求得 E 值, 再由虎克定律确定 $\sigma \sim \varepsilon$ 关系, 从而运用方程(2.1), 最终解出

位移和应力.

3.2 软垫层的超弹性

软垫层的压缩量可达到其厚度的 40%，已经属于大变形的范畴，我们在材料调研中所遇到的软垫层压缩应力—应变曲线，大体如图 1 所示，而且重复性较差. 该曲线的特点是：在应变较小时，应力值也较小，当应变达到 30%左右时，随着应变值的增大，应力增加很快，在曲线的很大一段范围内，随着应变值的增加，曲线的斜率逐渐增大. 它与金属材料的应力应变曲线有很大区别，对于金属材料，其应力—应变曲线，随着应变的增加，斜率逐渐降低，用增量法求解，还可以有比较好的收敛结果，但是对于软垫层这样的应力—应变曲线，用增量法进行非线性求解，往往是发散，而无法进行求解. 为此，我们采用超弹性非线性处理软垫层材料.

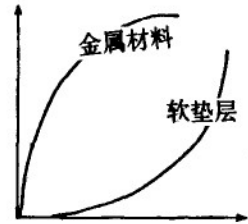


图 1 应力应变曲线

超弹性指的是应力可以从应变能密度函数得到的一类材料，橡胶和许多其它聚合材料，归入这个范畴. 它的定义是：如果存在一个弹性势函数 W (或应变能密度函数)，它是应变或应变张量的比例函数，它对应变分量的导数，确定了相应的应力分量. 这种材料称为超弹性材料. 用公式表述为：

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \tag{3.1}$$

其中： σ_{ij} ——为二阶 Piola - Kirchhoff 应力张量分量；

W ——单位未变形体应变能函数；

ε_{ij} ——拉格朗日应变张量分量；

C_{ij} ——加权的柯西—格林变形张量分量.

拉格朗日应变可表达为：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \tag{3.2}$$

其中 $\delta_{ij} = 1.0 (i = j)$ 或 $\delta_{ij} = 0.0 (i \neq j)$

变形张量 C_{ij} 可以由变形的斜度 f_{ij} 乘积构成：

$$c_{ij} = f_{ki} \cdot f_{kj} \quad \text{此处 } f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{3.3}$$

X_i ：在 i 方向未变形点的位置；

x_i ： $X_i + u_i$ 点在 i 方向变形后的位置；

u_i ：在 i 方向点的位移.

在对橡胶作了大量的实验的基础上，Rivlin 和 Saunders 提出了能量密度函数的建议，其形式为：

$$W = A(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \tag{3.4}$$

对各向同性超弹性，可以写成：

$$W = A(I_1 - 3) + B(I_2 - 3) + \beta(I_3^2 - I_3^{-2})^2 \tag{3.5}$$

其中： $I_1 = J_1 J_c^{-1/3}$ ； $I_2 = J_2 J_c^{-2/3}$ ； $I_3 = \det f_{ij} = I_c^{1/2}$

A, B 是Mooney - Rivlin材料常数

$\beta = \left(\frac{1+\gamma}{1-2\gamma} \right) \left(\frac{A+B}{24} \right)$ ν 是泊松系数.

J_1, J_2, I_c 是加权柯西-格林变形张量 C_{ij} 的不变量.

$$J_1 = c_{ij}, J_2 = \frac{1}{2}(I_c - c_{ij}C_{ij}), I_c = \det c_{ij}$$

在我们的实际计算中, 取 $A=0.01044, B=0.1416$, 这是一个密封圈橡胶材料的材料常数. $\nu=0.499$.

3.3 软垫层材料单元的增量刚度矩阵

用增量法解非线性问题时, 如果单元本构关系采用能量密度函数, 则必须给出单元增量刚度矩阵. 显然从能量守恒和变分原理, 经过仔细的推导(此处从略):

$$[K_c(u)]\{\Delta u\} = \{F_{pr}\} + \{F_{nd}\} - \{R(u)\} \quad (3.6)$$

其中: $[K_c(u)]$ ——为当前的单元刚度矩阵;

$\{F_{pr}\}$ ——垂直于单元面的压力;

$\{F_{nd}\}$ ——当前单元的结点力;

$\{R(u)\}$ ——当前的Newton - Raphson恢复力矢量;

$\{\Delta u\}$ ——需求解的节点位移增量;

$\{u\}$ ——单元的结点当前位移.

4 计算结构和模型

4.1 结构几何尺寸

多层厚椭球壳几何结构如图2, 坐标轴的原心取在椭球中心, x, y 轴取为椭球的短轴和长轴方向, z 轴按右手坐标系确定. 确定了坐标后, 椭球是一个以 y 轴为对称轴的旋转体(橡皮垫除外), 工程上简称椭球壳; 共分四层(五种材料). 图2中圆圈内号码为各层材料编号. 软垫层有若干条, 平均分布在椭球壳的两端, 按绕 y 轴旋转方向均布, 因此, 每条之间相隔角度 30° , 中心点与坐标轴原点的连线和 y 轴之间夹角 $\beta=30^\circ$.

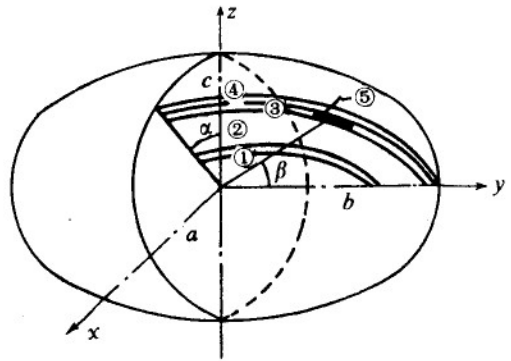


图2 椭球壳结构示意图

4.2 结构材料

各层材料在常温下热学性能如表所示: (此处略去)在我们进行瞬态温度计算时, 考虑到温度变化的幅值不大, 因此本文没有考虑由于热学性能随温度变化的问题. 在数值计算上, 可以考虑这个影响因素, 但是没有相应的实测曲线, 因此按常数处理. 我们在做研究课题计算时, 使热传导系数和热容量随温度变化, 也能同样予以计算, 并得到较好的结果.

4.3 计算模型

考虑到结构的对称, 我们不需将整个多层椭球壳结构进行计算, 而只计算其中的一部分, 其它部分则以对称条件得到. 这可大大地降低计算工作量.

椭球结构有 6 个平行并通过 y 轴的对称面, 按此对称面将椭球切开成 12 个瓜瓣形体, 然后再用 xz 平面将每个瓜瓣形体对分成两部分. 计算则采用 $y \geq 0$ 的那一半. 再将这部分进行有限元离散, 共分 8 层, 每层 161 个节点, 共 1288 个节点, 软垫层较薄, 因此只能划一层单元, 而且必须是比较规整的六面体元, 否则可能会导致较大的计算误差. 空气间隙层, 在温度计算时, 按等效热传导单元进行处理; 但在应力计算时, 由于空气不传力, 此时用空白单元予以取消. 在模型建立时, 就要考虑到温度分布结果, 转到应力计算时数据传输的可靠性, 因此在单元的处理上, 要充分注意热分布计算和应力计算两者的协调性.

4.4 边界条件

温度计算边界:

假定在计算结构的外表面上, 已知热流强度 q^* , 则有:

$$\{q\}^T \{n\}_n = -q^* \quad (4.1)$$

对流换热的物理本质是很复杂的, 在理论上为了简化计算, 假定对流表面上热流强度与流体和对流表面上的温度差成正比:

$$\{q\}^T \{n\}_{s_3} = -h_f(T_B - T) \quad (4.2)$$

T_B 是表面邻近流场按体积计算的平均温度, T 为表面温度, h_f 为对流系数, 常由实验测定, 而且可随温度 T 而变化.

对于辐射边界条件, 则按 Stepham - Boltzmann 辐射定律, 在承受辐射面上的热流强度可表示为:

$$\{q\}^T \{n\}_{s_4} = \varepsilon f \sigma (T_r^4 - T^4) \quad (4.3)$$

在对称面上有 $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$.

假设椭球的初始温度为 20°C , 置于 20°C 的恒温空气中, 当椭球因自热引起外表面温度升高时, 表面和空气之间可产生两种热交换, 一种是对流, 按公式(4.2), 对流系数为 h_f , 在计算中, 我们考虑到了对流系数随温度变化. 另一种是热辐射传热, 辐射系数中黑度值取为 $\varepsilon = 0.5$, 形状因子由程序直接计算. 最内层材料自身放出热量, 此功率所提供的热量向椭球外部流动. 应力计算边界: 我们计算的热应力, 是单纯由温度引起的应力, 称温度应力; 在温度应力计算时, 所有对称面上, 法向位移为零, 内外表面为自由面.

5 计算结果

5.1 瞬态温度分布

我们按时间步, 对方程(1.2)进行积分迭代, 每步 1.2 h, 到 12 h, 温度分布基本达到了稳态过程, 各点的温度已不再随时间变化. 图 3 至图 4, 分别是时间 $t = 6.0$ 和 12 h 时, 椭球各层的温度分布. 到稳态分布时($t = 12$ h), 内层的最高温度达到 30.558°C , 升高了 10.558°C ; 外层温度为 23.519°C , 升高了 3.519°C . 由图中可以看出, 软垫层局部, 由

于其导热系数比空气间隙大, 因此热阻较小, 使该局部区域的等温线向内层偏移. 在短半轴方向上, 外层与内层分别比长轴方向上外层与内层的温度略高. 图 5 是 $t=2.4$ h, 3.6 h, 6.0 h, 9.6 h 和 12 h, 在 $\alpha=30^\circ$, $\beta=30^\circ$ 部位从内层到外层温度的分布曲线.

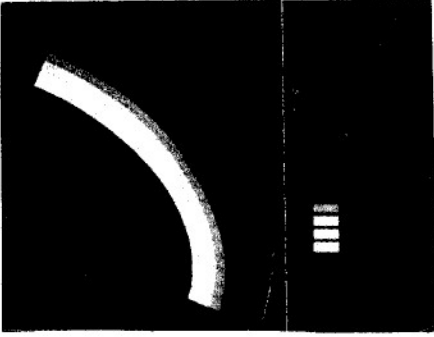


图 3 $t=6.0$ h 各层温度分布

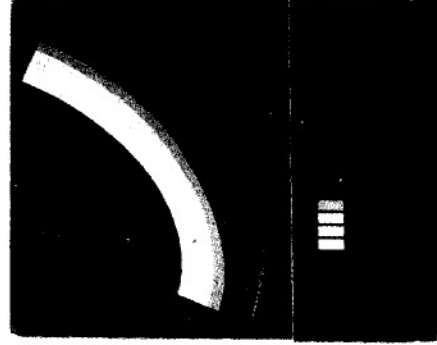


图 4 $t=12.0$ h 各层温度分布

5.2 温度分布与实测值的比较

我们没有按照计算结构的条件, 进行比较严格的试验测量. 我们将计算结果与温度试验结果进行比较, 计算和试验的某些数据如附表.

附表 计算结果与温度试验结果比较

	内表面温升/ $^\circ\text{C}$	外表面温升/ $^\circ\text{C}$	温度平衡时间/h
实验值	9.3	5.3	11.5
计算值	10.5	3.5	12.0

由表的数据可以看出, 计算值和实验值吻合较好, 只是外壳外表面的温升, 计算值偏低. 这与我们在计算中取黑度 $\varepsilon=0.5$, 使得辐射系数变大所造成. 因为黑度与外壳表面的颜色改变有关. 实验所用的是刚加工出的零件, 表面光洁, 黑度值较小, 使得外表面温度高于计算值.

5.3 热应力计算

(1) 热变形: 由于温度的升高, 多层椭球壳体各层均按材料本身线胀系数产生热膨胀, 同时在变形过程中又受到相邻层结构材料的约束. 图 6 显示了各层结构变形前(虚线表示)和变形后(实线表示)的位移状态. 长轴端向外膨胀量略大于短轴端向外膨胀量, 最大变形量为 0.037 mm.

(2) 热应力: 图 7 显示了椭球壳在稳态温度分布时, 各层有效应力分布. 外层钢壳局部最大有效应力 $\sigma_{ef}=28.9$ MPa, 大部分区域在 5~7 MPa 之间; 内层应力稍低, 最大有效应力 14.57 MPa; 非金属材料应力从外到内应力逐渐变高, 如图 8, 局部最大有效应力 $\sigma_{ef}=4.04$ MPa, 大部分区域在 3.6 MPa 以下; 软垫层部分, 有效应力较低, 约 5.8 MPa. 在软垫层内外的结构, 从图中可以看到有较大的应力集中现象.

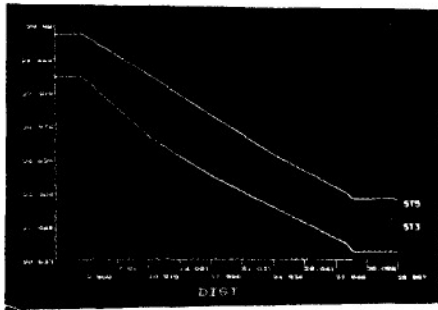


图5 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$ 从内层到外层温度分布曲线
 从下到上分别为 $t = 2.4, 3.6, 6.0, 9.6, 12.0$ h

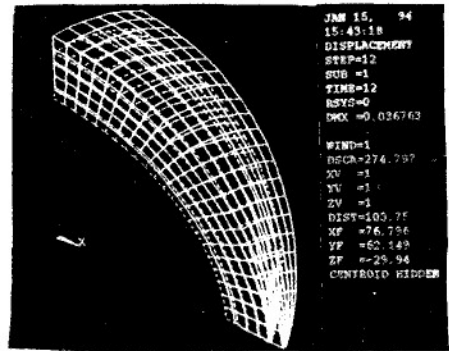


图 6 各层结构变形
 (虚线: 变形前, 实线: 变形后)

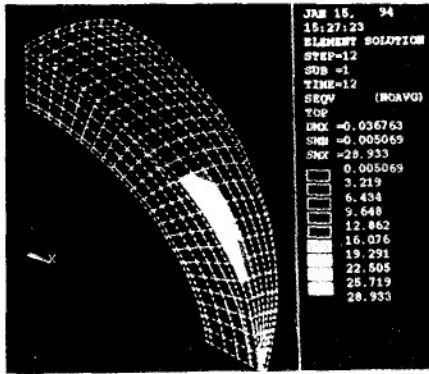


图 7 各层有效应力分布
 (最大有效应力 28.9 MPa)

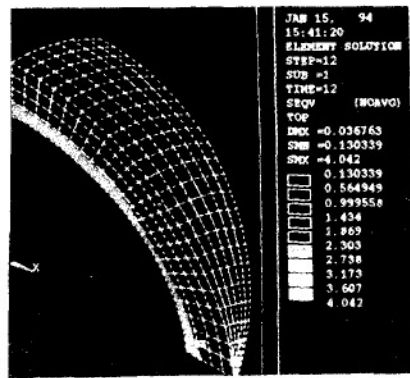


图 8 非金属材料有效应力分布
 (最大有效应力 4.0 MPa)

6 结论

我们先是对椭球壳各层材料的热学和力学性能进行了调研, 紧接着建立了温度和温度应力的有限元模型, 然后计算了厚椭球壳瞬态温度分布, 并与实验结果进行了比较, 结果比较满意, 在非线性应力的计算过程中, 对采用的非金属材料采用了随温度变化的力学特性. 所给的软垫层材料, $\sigma \sim \varepsilon$ 曲线造成了计算的不收敛, 采用超弹性非线性, 探讨用材料的能量密度函数, 进行数值计算, 获得了合理的收敛结果. 数值计算结果处理成各种图象和曲线, 可以更加直观地观察温度和应力的变化过程. 所得到的结果, 对温度和应力的变化过程. 对产品的温度和应力分析具有重要参考价值. 对软垫层材料的处理, 采用超弹性材料模式. 使得我们对材料特性有更加深入了解. 为开展这种材料的研究提出了新的方向.

参 考 文 献

- 1 E. L. Wilson and R E Nickell. "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis", *Nud Eng Des.* 1996, 4: 276~286
- 2 G. Comini, S. DelGuidice, R Lewis and O. C. Zienkiewicz, "Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special Reference to Phase Change". *Tnt. J. Num Mebh Eng ng.* 8, 1974, 6B~624
- 3 O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill. London, 1977
- 4 K. J. Bathe, *Numerical Methods in Finite Element Anatisys* Prentice-all. Englewood Cliff N. J., 1976
- 5 D. K. Gartling. *Finite Element Methods in Heat Transfer.* SAND, 1986, 85~1703
- 6 Jarmes M. Nelsen, *Derivation of Finite Element Conductivity and Capacitaru Matrices for 2-and 3-Dimensional Conduction Heat Transfer*, SANDIA REPORJ, 1985. SAND 85~0479

Nonlinear Fea For Thermal Stresses In Multilayer Ellipsoidal-shaped Thick Shell

Yu Xiangdong Luo Qunsheng

(Structural Mechanics Institute, CAEP, 610003)

Abstract In this paper, the heat transfer and thermal stresses analytical results of FEA in multilayer ellipsoidal-shaped thick shell are given. Considering the effects of boundary convection and radiation, this paper calculates the distribution of transient temperature under internal self-heating environment, then calculates thermal stresses in structure in consideration of the effect of temperature on elastic models of materials. Hyperelasticity is as well applied to deal with some nonlinear problems of soft materials. The caculation results are in good agreement with those from experiments.

Key words heat transfer, thermal stress, FEA, nonlinear, hyperelasticity.

拉氏变换域中三维广义热弹性问题的基本解*

张永元 宋 猛 钟 明

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 推广了边界积分方程—边界元法的适用范围. 通过对广义热弹性方程中耦合项系数表示为关于时间的线性函数, 即将控制方程进行“线性化”解耦. 然后, 用文^[1, 2]同样的方法导出了拉氏变换域中问题的基本解、位移互等原理和边界积分方程. 于是, 本文的结果奠定了数值求解广义耦合热弹性问题的理论基础.

退化表明: 当参数 $N \rightarrow 0$ 时, 本文结果与文^[1, 2]的对应结果完全一致.

关键词 广义热弹性力学; 耦合强冲击; 边界积分方程

0 引言

三维耦合热弹性问题在工程中有广泛的应用前景, 特别是当结构受瞬态热与瞬态机械载荷同时作用时的动力响应分析或安全性评定, 是工程上十分重要的研究课题.

对于三维耦合热弹性问题, 由于在动力学方程中存在着待定温度项, 而在热传导方程中又有待定位移项, 故两方程中的位移场与温度场是互相耦联的, 必须进行耦合求解. 然而, 热传导方程中的耦合项 $\eta \dot{u}_{k,k}$ 中的系数 $\eta(r, T)$ 并非常数, 使控制方程变为非线性的耦合方程组, 求解时将存在数学上的困难. 文^[1, 2]在将耦合项中的系数 η 简化为常数的基础上, 在拉氏变换域中导出了该问题的基本解及相应的边界积分方程; 文^[3, 4]则进一步利用拉氏变换—边界元法求得了此类问题的数值解. 但必须指出: 当温度变化 θ 较之标准的均匀温度 T_0 (此时没有应力, 也没有应变) 很小时, 将 η 简化为常数才是合理的. 而对于大多数工程问题, 温度变化较之 T_0 一般都大大超过 100°C , 其中的爆炸与爆轰问题, 甚至可达 $1500 \sim 4500^\circ\text{C}$, 这就是所谓的大温差情况, 上述简化将不再适用, 问题也就大大地复杂化了. 对于这种大温差的广义热弹性问题, 到目前为止, 连边界积分方程和相应的基本解都尚未给出. 正因为如此, 本文将耦合项进一步进行“线性化”解耦, 并用文^[1, 2]类似的方法, 获得了大温差情况, 即广义耦合热弹性问题的基本解、位移互等定理的普遍型式和相应的边界积分方程.

1 时域中的基本方程

考虑域为 V , 边界为 A 的均质各向同性弹性体, 耦合热弹性问题的控制方程为^[5]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,jj} - \beta \theta_{,i} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\text{和 } \theta_{,ii} - \dot{\theta} / k_d + Q_0 / k_d - \gamma T \dot{u}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

* 上海市自然科学基金资助项目

本构方程和几何关系为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \beta\theta)\delta_{ij} \quad (3)$$

$$\text{和 } \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (4)$$

其中 μ, λ 为弹性常数, $\beta = (2\mu + 3\lambda)\alpha$, $\gamma = \beta/k$, $k_d = k/\rho C_\rho$, $F_i = \rho f_i$, ρ 为质量密度, k 为导热系数, α 为热膨胀系数, Q_0 为内热源, f_i 为体力, C_ρ 为单位体积的常应变比热. 此外, u_i 为位移分量, $\theta = T - T_0$ 为温度变化量, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ 为应力和应变分量. 这里不特别指定边界条件, 且初条件为齐次的.

在式(2)中, 耦合项 $\gamma T \dot{u}_{i,i}$ 是唯一的非线性项, 表示温度 T 与应变的耦合作用. 为了模拟实际工程结构大温差作用——即强冲击工况下的响应, 必须实现非线性耦合方程组的数值求解. 为此, 本文以线性函数 $T_0 + Nt$ 来代替耦合项中的 T , 并用选取参数 N 来模拟温度的改变. 这时, 热传导方程(2)为

$$\theta_{,ij} - \dot{\theta}/k_d - \gamma(T_0 + Nt)\dot{u}_{i,i} + Q_0/k_d = 0 \quad (2')$$

式(1)和(2')即为广义热弹性问题在时域中的控制方程.

2 拉氏变换域中的基本方程

对所有方程分别进行拉氏变换, 并利用初始条件, 得

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{k,ji} - \rho s^2 \bar{u}_i - \beta \bar{\theta}_{,i} + \bar{F}_i = 0 \quad (5)$$

$$\bar{\theta}_{,ii} - s \bar{\theta}/k_d - \gamma(T_0 s - N) \bar{u}_{i,i} + \bar{Q}/k_d = 0 \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij} + (\lambda \bar{\varepsilon}_{kk} - \beta \bar{\theta}) \delta_{ij} \quad (7)$$

变换过程中利用了 $L(t\dot{u}_{i,i}) = -\frac{d}{ds}(s\bar{u}_{i,i}) = -\bar{u}_{i,i} - s\frac{d}{ds}(\bar{u}_{i,i})$, 为获得基本解, 将之并入热源项, 即 $\bar{Q} = \bar{Q}_0 + k_d \gamma N s \frac{d}{ds} \bar{u}_{i,i}$.

引进位移及体力分解式: $\bar{u}_i = \bar{\varphi}_{,i} + \varepsilon_{i,jk} \bar{\psi}_{j,k}$, $\bar{F}_i = \rho(\bar{X}_{,i} + \varepsilon_{ijk} \bar{Y}_{j,k})$, ε_{ijk} 为张量中 Levi-Civita 符号. 将分解式代入式(5)和(6), 得

$$\mathbb{U}_1^2 \bar{\varphi} - m \bar{\theta} + \bar{X}/C_1^2 = 0 \quad (8)$$

$$\mathbb{U}_2^2 \bar{\psi}_j + \bar{Y}_j/C_2^2 = 0 \quad (9)$$

$$D \bar{\theta} - \gamma(T_0 s - N) \nabla^2 \bar{\varphi} + \bar{Q}/k_d = 0 \quad (10)$$

其中 $m = \beta(\lambda + 2\mu)$, $C_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $C_2^2 = \mu/\rho$,

$$\mathbb{U}_i^2 = \nabla^2 - s^2/C_i^2, \quad i = 1, 2, \quad D = \nabla^2 - s/k_d.$$

3 拉氏变换域中的基本解

情况 I: 假定源系统 $\bar{Q} = \delta(x-y)$, $\bar{F}_i = 0$, 用“*”表示这种情况下的解. 于是, 式(8), (9)和(10)为

$$\mathbb{U}_1^2 \bar{\varphi}^* - m \bar{\theta}^* = 0 \quad (11)$$

$$\mathbb{U}_2^2 \bar{\psi}^* = 0 \quad (12)$$