荣誉物理

写给未来科学家和工程师的高中物理学教程

（力学部分）

RONGYUWULI

陆天明 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

荣誉物理

写给未来科学家和工程师的高中物理学教程

（力学部分）

陆天明　编著

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

荣誉物理:写给未来科学家和工程师的高中物理学教程. 力学部分/陆天明编著. —南京:东南大学出版社,2013.11

ISBN 978-7-5641-4463-0

Ⅰ. ①荣… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①中学物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第195948号

荣誉物理——写给未来科学家和工程师的高中物理学教程(力学部分)

编　　著　陆天明
责任编辑　宋华莉
编辑邮箱　52145104@qq.com

出版发行　东南大学出版社
出 版 人　江建中
社　　址　南京市四牌楼2号
邮　　编　210096
网　　址　http://www.seupress.com
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　兴化印刷有限责任公司
开　　本　787 mm×1092 mm　1/16
印　　张　19.25
字　　数　480千字
版　　次　2013年11月第1版
印　　次　2013年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5641-4463-0
定　　价　48.00元

高中物理校本课程建设专家顾问团成员

陈　娴(南京师范大学教师教育学院教授,硕士生导师)

戴玉蓉(东南大学物理系教授,硕士生导师)

刘建成(南京市教研室高中物理教育专家)

陆建隆(南京师范大学教师教育学院教授,硕士生导师)

倪振华(东南大学物理系教授,博士生导师)

童培庆(南京师范大学物理科学与技术学院院长,博士生导师)

施智祥(东南大学物理系博士生导师)

王德飞(南京市江宁区教研室高中物理教育专家)

吴　伟(南京师范大学教师教育学院教授,硕士生导师)

叶　兵(江苏省教研室高中物理教育专家)

叶　平(南京市江宁进修学校特级教师)

杨树峤(南京师范大学附属中学江宁分校特级教师)

杨震云(南京市教研室高中物理教育专家)

周久璘(南京师范大学附属中学特级老师)

序

为什么中国的古代文明没有发展出现代科学技术？为什么我们的学校总是培养不出杰出人才？李约瑟之惑和钱学森之问重重地敲打着中国的教育，也深深地刺痛了国人的教育良心。

对于拔尖创新人才的培养，我们通常采用行政化的办法，开设“重点班”、“实验班”，让成绩好的学生进入这些班学习。不可否认，这种做法简单而且容易操作，也的确培养出了一批学业上非常优秀的学生。但其整齐划一的教学要求和忽视学生个性特征与倾向的教育所造成的伤害已逐渐显现，并被越来越多的一线教育工作者和决策者所认识到。

南京师范大学附属中学110多年的历史就是一部锐意改革的课程文化史。这所学校的课程实践一直处于中国基础教育改革的前沿，其课程特色全国闻名。这所学校办学成绩卓越，培养了近60位两院院士、数以万计的社会中坚和合格劳动者。“尊重差异、适应个性，促进学生充分发展”是百年附中课程文化的概括。从全国范围看，南师附中是最早开发校本课程的中学之一，至今已有30多年。南师附中的教育实践已经证明，校本课程建设是进行个性化教育的必要条件和有力保障。丰富多样的校本课程为学生的全面发展提供了巨大的空间，为学生的个性化发展搭建了广阔的平台，为学生的终生发展打下了坚实的基础。

南师附中江宁分校秉承了南京师大附中的优良传统，自创立之时，就致力于校本课程的研究。南师附中江宁分校基于自己的培养目标，着力进行了立体化校本课程体系的设计，并具体开发了众多校本课程。办学10年来，创造了一个又一个教育教学奇迹。培养社会各领域的领跑者，让优秀者更优秀，是南师附中江宁分校的教育追求之一。增设“荣誉课程”选修课，让学生有更多自由选择的空间，并用“走班制”的教学班来弥补行政班的不足，是南师附中江宁分校对创新拔尖人才培养的一种尝试。这也是当前一些发达国家科学教育所普遍采用的做法。

南师附中江宁分校高中物理教研组在校本课程的开发和建设方面独领风骚，成绩斐然，由陆天明老师开发的《荣誉物理》就是一个例证。目前，高中物理校本课程的立体化结构已架构完成，在这个立体化课程空间中已设计了近20门校本课程，这些课程满足了不同个性倾向和不同个性特征的学生需求。

作为万物之理，物理学研究的是自然界中普遍存在、普遍适用、最为一般的规律。作为自然科学，物理学充满着深邃的智慧和美丽的理性。《荣誉物理》这本教材包含了比当前高中通用课本更加全面、更加丰富、更加深刻的物理学知识。有不少同学对物理学特别感兴趣并有意以后在理工类发展，这本教材可以使得这部分同学的潜能得到激发，进而得到更加充分的、个性化的发展。

我相信，同学们在学习这一门校本课程的过程中，将会更加深刻地理解物理学的博大精深，更加全面地体验物理学的科学价值，更加深入地感受物理学的无穷魅力，必将受益终身！

2012年11月18日于随园

前　　言

不同人的学习时间表不同，不同人的学习风格不同，世上不仅没有两个完全相同的人，也没有完全相同的同一个人。统一内容、统一难度、统一进度，这种整齐划一的教育不符合心理学和教育学的基本规律。教育不应抹杀个性，而应尊重差异，适应个性，张扬个性。

所谓创造性人格特质就是具有丰富的想象力、浓烈的好奇心、广泛的学习兴趣和优秀的思维品质。要培养具有创造性人格特质的人，必须进行个性化教育。产生天才难，发现天才难，要有天才赖以生长的土壤更难。设计多样化、选择性的校本课程就是给天才的成长提供以肥沃的土壤，是培养拔尖创新人才的一条有效途径。第 8 次课程改革的亮点是实行课程的三级管理，这种课程管理的民主化给学校进行个性化教育提供了广阔的空间！

南师附中江宁分校秉承了南师附中的优良传统，自创立之时，就致力于校本课程的研究。学校基于自己的培养目标，构建了立体化的校本课程体系，开发了一系列校本课程。办学 10 年来，创造了一个又一个教育教学奇迹。南师附中江宁分校高中物理教研组响应学校号召，对校本课程的研究投入了大量精力，成绩斐然。目前，高中物理校本课程的立体化结构已架构完成，在这个立体化课程空间中已设计了近 20 门校本课程，我们有理由相信，这些课程可以满足不同个性倾向和不同个性特征的学生需求。

《荣誉物理》是高中物理教研组开发的众多课程中的一门。这门课程是为那些在中学阶段就显现出理科特长，并对物理特别感兴趣，立志以后当科学家或工程师的学生而设计的，其中包含了不少大学物理的内容，当然也包含了当前高中物理竞赛考纲所要求的全部内容。所以，本教材既可以用作物理竞赛的教材，也可以用作大学自主招生考试用的教材。

《荣誉物理》配了大量的例题和习题。每节内容后有强化训练，每章后设置了能力提升训练，书中有不少题目对学生的能力要求极高。通过本教材的教学，读者会对整个物理学有一个相对全面而系统的认识，不仅能使学生获得物理知识、物理思想和物理方法，提高学生的分析和解决问题的能力，而且可以培养学生学习物理的兴趣和百折不挠的探究精神，进而体验物理学的理性之美。

本书是在对优秀学生所开设讲座的讲稿基础上修订而成的，其中包含了笔者近 20 年竞赛辅导的经验。在成书的过程中，得到了我的很多学生的帮助，他们有的参与了本书中大量习题的验算工作，有的对本书提出了很具建设性的建议，有的甚至给我提供了很好的题目，其中特别要感谢如下同学：南京师范大学附属中学江宁分校：2013 届滕志伟同学、2012 届张新鹏同学、2011 届蒋楠同学，2009 届薄祥奕、陆明飞、史博和季张戎同学，2008 届唐俊、王刚和朱朗同学，2007 届仲克穷、夏士灿、张亮和刘晓戈同学，2006 届傅雷、刘子豪和顾一帆同学。江苏省六合高中：2005 届程超同学，2004 届叶良同学，2003 届宋军同学，2001 届李乐同学，2000 届王见槽同学，1999 届祈超同学，1996 届陆阳同学。南京师范大学物理科学与技术学院奥林匹克集训队：2015 届陆羽、孙一同学、2014 届刘若衡、朱嘉迪同学，2013 届孙韩超、王一婷、韩沛、汤皓月同学。

陆天明

2012 年 12 月于九龙湖

目　　录

第一章 力和物体的平衡

§1.1 力的概念和运算

1.1.1 力的概念

力是物体对物体的作用.力的作用效果实际上有两个,即:使物体发生形变和改变物体运动状态.力具有物质性、方向性(矢量性)、相互性.力的三要素是:大小、方向、作用点.一个物体,受到了另一物体施于它的力,则它的速度就要变化.所以用物体的加速度来度量力的大小是一件很自然的事,但实际进行力的量度的时候,常用弹簧秤来测量.力的分类的角度很多,如:效果、是否接触、方向、性质等.力按性质可以分为:重力、弹力、摩擦力、分子力、电磁力、核力等.

1.1.2 重力

宇宙间的一切物体都是相互吸引的,两个物体间的引力大小跟它们质量的乘积成正比,跟它们距离的平方成反比,引力方向沿两个物体的连线方向.表达式为 $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$,其中$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot kg/m^2}$,称为引力常量.万有引力公式一般只适用于质点(即只有质量没有大小的点)之间引力大小的计算,如果相互吸引的双方是标准的均匀球体,则可将其视为质量集中于球心的质点,即 r 为球心的间距.如果是一个均匀球体和球外的质点,万有引力也适用,此时 r 为质点到球心的距离.

由于地球的吸引而使物体受到的力,方向竖直向下,在地面附近,可近似认为重力不变.重力的等效作用点称为重心.测得的地球表面上物体所受到的重力,是地球对物体引力的一个分量,由于地球并不是个严格的球体,质量分布也不均匀,加之地球的自转运动,使得同一物体,在地球表面不同位置处受到的重力略有不同.

1.1.3 弹力

物体发生弹性形变后,其内部原子相对位置改变,从而对外部产生宏观的反作用力.

弹力的大小取决于形变的程度,弹簧的弹力遵循胡克定律,在弹性限度内,弹簧弹力的大小与形变量(伸长或压缩量)成正比.

$$F = -kx$$

式中 x 表示形变量;负号表示弹力的方向与形变的方向相反;k 为劲度系数,由弹簧的材料、接触反力和几何尺寸决定.

反映固体材料弹性性质的胡克定律,建立了胁强(应力)$\sigma = \frac{F}{S}$ 与胁变(应变)$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 之间的

正比例关系，如图 1－1 所示：

$$\sigma = E\varepsilon$$

式中 E 为杨氏弹性模量，它表示将弹性杆拉长一倍时，横截面上所需的应力.

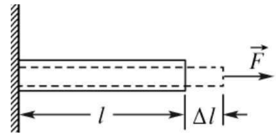


图 1－1

1.1.4　摩擦力

物体与物体接触时，在接触面上有一种阻止它们相对滑动的作用力称为摩擦力.

不仅固体与固体的接触面上有摩擦，固体与液体的接触面或固体与气体的接触面上也有摩擦，我们主要讨论固体与固体间的摩擦.

1. 摩擦分为静摩擦和滑动摩擦

当两个相互接触的物体之间存在相对滑动的趋势（就是说：假如它们之间的接触是“光滑的”，将发生相对滑动）时，产生的摩擦力为静摩擦力，其方向与接触面上相对运动趋势的方向相反，大小视具体情况而定，由平衡条件或从动力学的运动方程解算出来，最大静摩擦力为：

$$f_{\max} = \mu_s N$$

式中 μ_s 称为静摩擦因数，它取决于接触面的材料与接触面的状况等，N 为两物体间的正压力.

当两个相互接触的物体之间有相对滑动时，产生的摩擦力为滑动摩擦力. 滑动摩擦力的方向与相对运动的方向相反，其大小与两物体间的正压力成正比.

$$f = \mu_k N$$

μ_k 为动摩擦因数，取决于接触面的材料与接触面的表面状况，在通常的相对速度范围内，可看作常量，在通常情况下，μ_k 与 μ_s 可不加区别，两物体维持相对静止的动力学条件为静摩擦力的绝对值满足：

$$f \leqslant f_{\max} = \mu_s N$$

在接触物的材料和表面粗糙程度相同的条件下，静摩擦因数 μ_s 略大于动摩擦因数 μ_k.

2. 摩擦力作用的时间

因为只有当两个物体之间有相对运动或相对运动趋势时，才有摩擦力，所以要注意摩擦力作用的时间. 如图 1－2，一个小球竖直落下与一块在水平方向上运动的木块碰撞后，向斜上方弹出，假设碰撞时间为 t，但可能小球不需要 t 时间，在水平方向上便已具有了与木块相同的速度，则在剩下的时间内小球和木块尽管还是接触的，但互相已没有摩擦力.

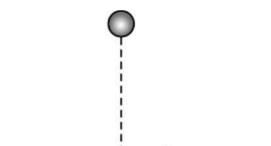


图 1－2

1.1.5　力的合成

求几个力的等效力的方法就是力的合成.

求共点力的合力要用到平行四边形法则，如图 1－3(a) 所示，力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 的合力 $\vec{F}$ 就是以 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 为邻边所构成的平行四边形的对角线，图 1－3(a) 所示的平行四边形定则可以衍生出三角形法则. 即：将 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 通过平移使其首

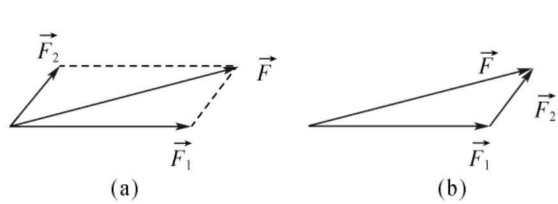


图 1－3

尾相接，则由起点指向末端的力 $\vec{F}$ 即为 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 的合力，如图 1－3(b) 所示.

如果有多个共点力求合力，可在三角形法则的基础上，演化为多边形法则. 如图 1－4 所示，图 1－4(a) 为有四个力共点于 O，图 1－4(b) 表示四个力矢首尾相接，从力的作用点 O 连接力 $\vec{F}_4$ 力矢末端的有向线段就表示它们的合力. 而图 1－4(c) 表示五个共点力组成的多边形是闭合的，即 $\vec{F}_1$ 力矢的起点与 $\vec{F}_5$ 力矢的终点重合，这表示它们的合力为零.

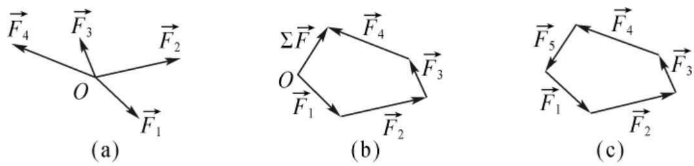


图 1－4

力的分解是力的合成的逆运算，也遵循力的平行四边形法则，一般而言，一个力分解为两个力有多组解答，为得确定解还有附加条件，通常有以下三种情况：

① 已知合力和它的两个分力的方向，求这两分力的大小. 这有确定的一组解答.

② 已知合力和它的一个分力，求另一个分力. 这也有确定的解答.

③ 已知合力和其中一个分力的大小及另一个分力的方向，求第一个分力的方向和第二个分力的大小，其解答可能有三种情况：一解、两解和无解.

1.1.6　平面共点力系合成的解析法

如图 1－5 所示，任何一个力都可以分解为 x 方向上的分力 F_x 和 y 方向上的分力 F_y. 这种将力向两个相互正交的方向上分解的方法称为正交分解法. 所以，在多力合成时，我们可以先建立坐标系，然后把所有的力均沿相互垂直的两个方向上分解，然后再把两个方向上的合力分别求出，从而有：

$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

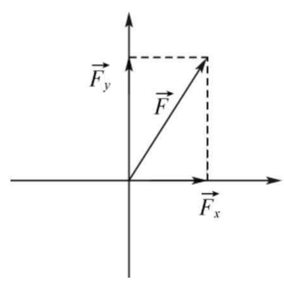


图 1－5

合力的方向可用合力 $\sum F$ 与 x 轴所夹的角的正切值来确定：

$$\tan\alpha = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

图 1－6 是用三角形法求合力时的情形. 由图也可以看出各力在两坐标轴上的投影的和与合力在坐标轴上的投影是相等的，即：合力在任意一轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和，这就是合力投影定理.

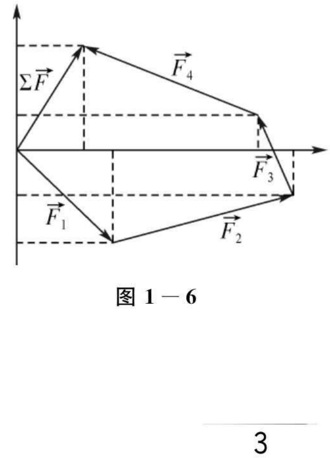


图 1－6

1.1.7 空间中力的投影与分解

力在某轴上的投影定义为力的大小乘以力与该轴正向间夹角的余弦，如图 1－7 中的 $\vec{F}$ 力在 Ox、Oy、Oz 轴上的投影 X、Y、Z 分别定义为：

$$\begin{cases} X = F\cos\alpha \\ Y = F\cos\beta \\ Z = F\cos\gamma \end{cases}$$

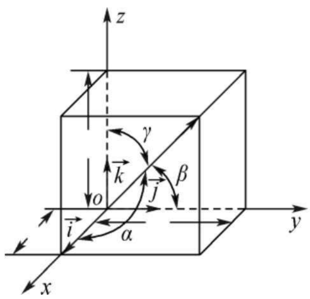


图 1－7

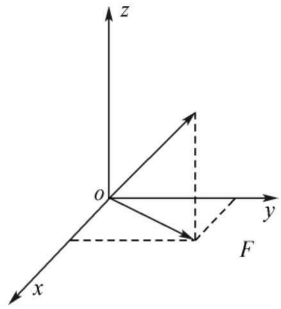


图 1－8

这就是直接投影法所得结果，也可如图 1－8 所示采用二次投影法. 这时：

$$|\vec{X}| = |\vec{F}_{xy}|\cos(\vec{F}_{xy}, x)$$

式中 $\vec{F}_{xy}$ 为 $\vec{F}$ 在 xOy 平面上的投影矢量，而：

$$|\vec{F}_{xy}| = |\vec{F}|\sin(\vec{F}, z)$$

力沿直角坐标轴的分解式：

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

即力 $\vec{F}$ 可以被表示成在三个方向中的分力的合力（矢量和）.

1.1.8 全反力和摩擦角

令静摩擦因数 μ_s 等于某一角 φ 的正切值，即 $\mu_s = \tan\varphi$，这个 φ 角就称为摩擦角. 在临界摩擦（将要发生滑动）状态下，$\dfrac{f_{\max}}{N} = \mu_s = \tan\varphi$. 物体对支承面的摩擦力的反作用力和物体对支承面的压力的反作用力的合力（称为接触反力）与法线方向的最大夹角（即支承面作用于物体的沿法线方向的弹力 N 与最大静摩擦力 $f_{\max}$ 的合力 F 与接触面法线方向的夹角）等于摩擦角. 如图 1－9 所示（图中未画其他力）. 在一般情况下，静摩擦力 f_s 未达到最大值，即：

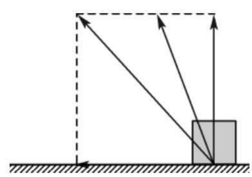


图 1－9

$$f_s \leqslant \mu_s N$$

$$\frac{f_s}{N} \leqslant \mu_s$$

$$\frac{f_s}{N} \leqslant \tan\varphi$$

因此接触面反作用于物体的全反力 F' 的作用线与面法线的夹角 $\alpha=\arctan\frac{f_0}{N}$ 不会大于摩擦角，即 $\alpha\leqslant\varphi$. 物体不会滑动. 由此可知，运用摩擦角可判断物体是否产生滑动的条件.

如图 1－10 所示，用力 F 去推放在平面上的物体 A，设摩擦角为 φ，推力 F 与法线夹角为 α，当 $\alpha<\varphi$ 时，无论 F 多大，也不可能推动物块 A，只有 $\alpha>\varphi$ 时，才可能推动 A.

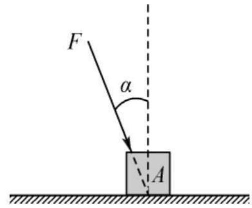


图 1－10

例 1　如图 1－11 所示，在倾角为 α 的斜面上有一个质量为 m 的静止木块，现用与斜面底边平行的水平外力推动木块，使其在斜面上做匀速运动，若已知木块与斜面间的动摩擦因数 μ，求推力的大小和木块运动的方向.

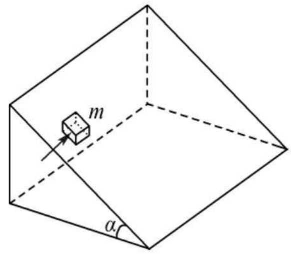


图 1－11

【解析】 物体在重力、推力、斜面的支持力和摩擦力四个力的作用下做匀速直线运动，所以受力平衡. 但这四个力不在同一平面内，不容易看出它们之间的关系. 我们把这些力分解在两个平面内，就可以将空间问题变为平面问题，使问题得到解决.

我们从斜面的侧面观察，如图 1－12(a) 所示.

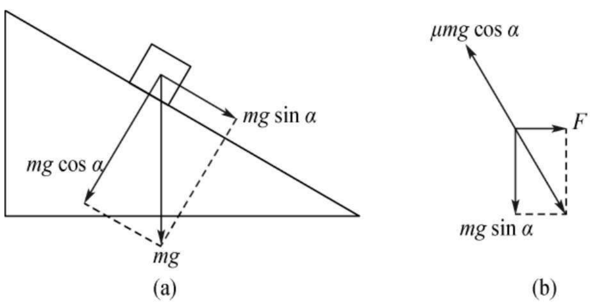


图 1－12

将重力沿斜面、垂直于斜面分解. 重力沿斜面的分力为 $mg\sin\alpha$，木块与斜面间的弹力为 $mg\cos\alpha$.

再从垂直于斜面的方向观察，如图(b) 所示.

$$F=\sqrt{(\mu mg\cos\alpha)^2-(mg\sin\alpha)^2}$$

推力 F 与从上面、在图(a) 中，F' 的方向沿斜面向下与推力成 α 角，则：

$$\tan\alpha=\frac{G_1}{F}=1$$

显然木块运动的方向和 F 的夹角 β 满足下式：

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{\mu\cos\alpha}$$

【总结】 物体不沿推力的方向运动，很有意思，也很难让人理解，同学们可以做实验.

例 2　试证明：一质量分布均匀的球壳对球壳内任一质点的万有引力为零.

【解析】 如图 1－13，设想在一均匀球壳内的任一点 A 处置一质量为 m 的质点，在球面上取任一极小的面元 ΔS_1，以 r_1 表示 ΔS_1 与 A 点的距离，且设此均匀球面每单位面积的质量为 σ，则面元 ΔS_1 的质量 $\Delta m_1 = \sigma \Delta S_1$，它对 A 处质点的吸引力为

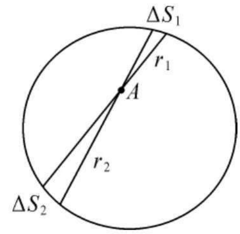


图 1－13

$$\Delta F_1 = \frac{Gm\Delta m_1}{r_1^2} = \frac{Gm\sigma\Delta S_1}{r_1^2} \quad ①$$

又设想将 ΔS_1 边界上各点与 A 点的连线延长，分别与 ΔS_1 对面的球壳相交而围成面元 ΔS_2，设 A 与 ΔS_2 的距离为 r_2，由于 ΔS_1 和 ΔS_2 都很小，可以把它们看成是一个平面图形，显然可以想象到它们是相似图形，因而其面积与边长的平方成比例，而其边长又与该处到 A 点的距离成比例，故有：

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad ②$$

则面元 ΔS_2，对 A 处质点的吸引力为：

$$\Delta F_2 = \frac{Gm\Delta m_2}{r_2^2} = \frac{G\sigma m\Delta S_2}{r_2^2} \quad ③$$

由 ①②③ 式可得：

$$\Delta F_2 = \Delta F_1$$

注意到 ΔS_2 与 ΔS_1 对 A 处质点的吸引力方向相反，即 ΔF_2 与 ΔF_1 的方向相反，则其合力为零. 显然，整个球面可以分成无数对像 ΔS_1 和 ΔS_2 这样的小面元，而每对小面元对 A 处质点的吸引力的合力都必须是零，则整个球壳对 A 处质点的吸引力也是零，即一均匀球壳对其内任一点处质点的吸引力都是零.

【点评】 本题所用的思维方法值得体会学习.

例 3　如图1－14所示，在密度为 ρ_0 的无限大的液体中，有两个半径为 R、密度为 ρ 的球，相距 d，且 $\rho > \rho_0$，求两球受到的万有引力.

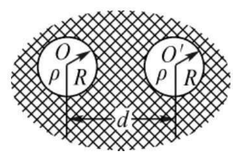


图 1－14

【解析】 设两球的球心分别为 O 与 O'. 如果去掉球 O'，只有球 O 单独处于无限大的液体中，由于四周液体对它的引力具有对称性，彼此平衡，故球 O 受到的合引力为零.

如果将球 O' 放回原处，相当于密度为 ρ 的球代替密度为 ρ_0 的同体积的液体，因为 $\rho > \rho_0$，代替的结果将使 O' 处的质量增加.

$$\Delta m = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_0)$$

则球 O 将受到来自球 O' 的引力. 因为球 O 的质量为

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

所以根据万有引力定律，两球的相互引力为：

$$F = \frac{Gm_0\Delta m}{d^2} = \frac{G16\pi^2 R^6 \rho(\rho - \rho_0)}{9d^2}$$

例 4　如图 1－15 所示，一个静止的圆锥体竖直放置，顶角为 α. 质量为 m、分布均匀的链条环水平地套在圆锥体上. 忽略链条与圆锥面之间的摩擦力，求链条环的张力.

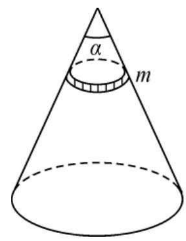


图 1－15

【解析】 设链条环半径为 R，在链条环中任取一小段 Δl，其质量为 $\Delta m=\frac{m}{2\pi R}\Delta l$，$\Delta l$ 作为研究对象，受力有：锥面支持力 N，其方向垂直于锥面，Δl 两端的张力 T 及重力 Δmg，如图 1－16(b) 所示. 平衡时在水平和竖直两个方向上的合力均为 0. 列方程即可求解.

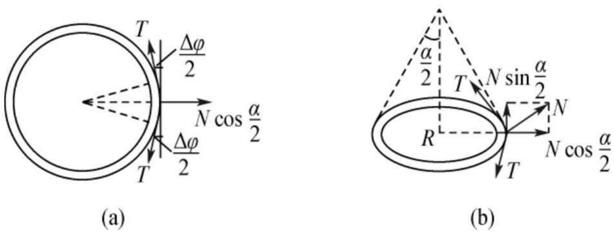


图 1－16

如图(a)、(b) 所示，设 Δl 对链条环中心的张角为 $\Delta\varphi$，根据共点力平衡条件知：

Δl 在水平方向上受力平衡　　$2T\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=N\cos\frac{\alpha}{2}$　　①

因 Δl 很短，$\Delta\varphi$ 很小，所以　　$\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\Delta\varphi}{2}$　　②

将 ② 式代入 ① 式，有　　$T\Delta\varphi=N\cos\frac{\alpha}{2}$　　③

Δl 在竖直方向上也受力平衡　　$\Delta mg=N\sin\frac{\alpha}{2}$　　④

④ 式 /③ 式，得　　$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\Delta m}{T\Delta\varphi}g$　　⑤

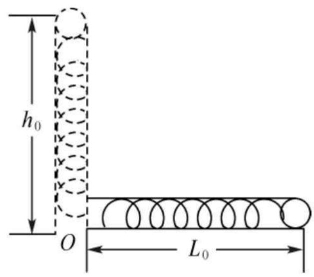
⑤ 式中　　$\Delta m=\frac{m}{2\pi R}\Delta l=\frac{m\Delta\varphi}{2\pi}$

将其代入 ⑤ 式可得：　　$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{mg}{2\pi T}$

所以链条环中的张力为　　$T=\dfrac{mg}{2\pi\tan\frac{\alpha}{2}}$

【点评】 本题中利用微元法得出一个近似关系 $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\Delta\varphi}{2}$($\Delta\varphi$ 取 rad)，它是一种思想，更是一种技巧，将在以后极为方便地论证一系列重要公式，还可使分析和解决问题的思路变得极为简捷.

强化训练



1．如图所示，原长 L_0 为 100 cm 的轻质弹簧放置在一光滑的直槽内，弹簧的一端固定在槽的 O 端，另一端连接一小球，这一装置可从水平位置开始绕 O 点缓缓地转到竖直位置．设弹簧的形变总是在其弹性限度内，试在下述(1)、(2) 两种情况下，分别求出这种装置从原来的水平位置开始缓缓地绕 O 点转到竖直位置时小球离开原水平面的高度 h_0．

(1) 在转动过程中，发现小球距原水平面的高度变化出现极大值，且极大值 $h_m = 40$ cm．

(2) 在转动过程中，发现小球离原水平面的高度不断增大．

【解析】弹簧在压缩状态下释放后，随着槽转动，与弹簧固连的小球在弹力、重力作用下运动，小球离水平面的高度是否有极值，能否不断增大取决于小球的合力．由于缓缓地转动，故小球的每一个状态都可以视为平衡态，由平衡条件可列出小球距水平面的高度 h 与转过的角度 θ 的函数关系，这是求解本题的基本思路．

(1) 设小球质量为 m，弹簧劲度系数为 k，当槽转至倾角 θ 时，球的高度为 h，由胡克定律有

$$k\left(L_0-\frac{h}{\sin\theta}\right)=mg\sin\theta \qquad ①$$

转到竖直时有

$$k(L_0-h_0)=mg \qquad ②$$

解得

$$h=-(L_0-h_0)\sin^2\theta+L_0\sin\theta$$

改写为

$$h=-(L_0-h_0)\left[\sin\theta-\frac{L_0}{2(L_0-h_0)}\right]^2+\frac{L_0^2}{4(L_0-h_0)} \qquad ③$$

由 ③ 式可知，当 $\sin\theta=\dfrac{L_0}{2(L_0-h_0)}$ 时，h 有极大值 h_m．

由此得

$$h_m=\frac{L_0^2}{4(L_0-h_0)}$$

$$h_0=L_0-\frac{L_0^2}{4h_m}$$

代入数据，得

$$h_0=37.5\text{ cm}.$$

(2) 由 ③ 式可知，当 $\dfrac{L_0}{2(L_0-h_0)}\geqslant 90^\circ$ 时，则在转动过程中，小球离原水平面的高度就随 θ 的增大一直不断地增大，由此得

$$\frac{L_0}{2(L_0-h_0)}\geqslant 1$$

解得 $h_0\geqslant\dfrac{L_0}{2}$，代入数据，可知

$$50\text{ cm}\leqslant h_0<100\text{ cm}.$$

2. 一薄壁圆柱形烧杯，半径为 r，质量为 m，重心位于中心线上，离杯底的距离为 H，今将水慢慢注入杯中，问烧杯连同杯中的水共同重心最低时水面离杯底的距离等于多少？为什么？(设水的密度为 ρ)

【解析】 开始注水时，共同重心在水面之上，这时如再加水，就等于在共同重心下方加质量，所以重心将会随着水的注入而逐渐下降.

当重心下降到水面时，重心最低，因为，此时如再加水，就是在共同重心上方加质量，重心就会升高.

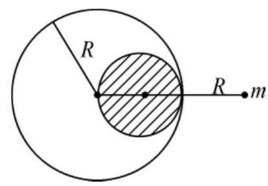
所以，重心最低时的高度 h 应满足

$$\rho\pi r^2 \cdot \frac{h}{2}g + mgH = (\pi r^2 h\rho + m)gh \qquad ①$$

解得：

$$h = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m H}}{\pi r^2 \rho} \qquad ②$$

3. 如图所示，在距一质量为 M、半径为 R、密度均匀的球体 R 远处有一质量为 m 的质点. 此时，M 对 m 的万有引力为 F_1，当从 M 中挖去一半径为 $R/2$ 的球体时，剩下部分对 m 的万有引力为 F_2，则 F_1 和 F_2 的比是多少？



【解析】 质点与大球球心相距为 $2R$，其万有引力为 F_1，

$$F_1 = G\frac{Mm}{(2R)^2} = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{R^2}$$

大球质量

$$M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

挖去的小球质量

$$M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{M}{8}$$

小球球心与质点相距 $\frac{3}{2}R$，小球与质点间的万有引力为

$$F' = G\frac{M'm}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = \frac{1}{18}G\frac{Mm}{R^2}$$

剩余部分对质点 M 的万有引力

$$F_2 = F_1 - F' = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{R^2} - \frac{1}{18}G\frac{Mm}{R^2} = \frac{7}{36}G\frac{Mm}{R^2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{R^2}\Big/\left(\frac{7}{36}G\frac{Mm}{R^2}\right) = \frac{9}{7}$$