线性代数

XIAN XING DAI SHU

修订说明

经过几年的教学实践证明,本教材适合应用型本科学生对线性代数课程的基本要求,教学效果良好。使用本书的过程中,虽然得到了教师和学生的充分肯定,同时也提出了一些中肯的意见和建议。根据出版社要求和广大教师、读者反映意见,结合实际教学中存在的问题,本次修订改正了原书中的一些错误和不妥之处,取消了部分章节带* 的内容,各章内容均有增删和优化。例如,用实例引入矩阵的乘法、严格了阶梯型矩阵的定义、逆矩阵求法的引入更加自然和清晰、增加了适量的更具针对性的例题、给出了部分定理的证明等。全书虽然对一些具体内容做了较大调整,但基本上保持了原书的风格与体系。通过本次修订,读者使用起来会更加方便,更加适用。

参加本次修订的有陈东立、燕列雅、马春晖、史艳维。

对本书中的错误与不妥之处,热诚欢迎广大读者批评指正。

编者

2011 年 7 月

前　言

线性代数是高等学校工科类、经管类学生的一门必修的重要数学类基础理论课。近年来,随着培养应用型人才的本科大学的迅速发展,适用于应用型本科学生的教材问题就显得尤为重要。本书是在陕西省教育厅的领导与组织下,为适应21世纪应用型本科教学的需要而编写的,涵盖了教育部制订的大学本科线性代数"教学基本要求"的内容。

全书共分六章,依次为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量以及实二次型。在内容编排与处理上力求简明易懂,不仅便于教学,而且便于读者自学,其特点表现在以下几个方面:

1. 根据培养应用型人才的特点,着重使学生在掌握基本概念、基本方法上下工夫,不过分强调解题技巧,在不降低基本要求的前提下,适当弱化了一些理论性较强的定理、结论的证明。对有些定理的证明,我们打了"* "号,教学时可根据不同学时和专业要求选讲或者不讲。

2. 根据应用型本科学生的实际,每节后配有基本训练题,以加强学生对本节知识的理解与掌握。考虑到部分学生进一步深造的需要,每章后又有适量的针对本章的总习题,且在题目的难易上与每节的基本训练题相比有较为明显的梯度,答案中对部分较难的习题做了提示。

3. 附录中有3套模拟试题,以便学生学完本书后对所学内容的掌握程度进行自我检验。

本教材的出版得到了西北大学出版社、西安建筑科技大学华清学院和部分兄弟院校的大力支持,特别是西北大学出版社为本书的

出版做了大量的工作,编者在此一并表示衷心的感谢!

本书是为适应21世纪应用型本科教学需要而做的一种尝试,由于编者水平有限,书中一定会有不少的缺点和错误,恳请读者批评指正。

编者

2008年7月

目　　录

第 1 章 行列式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，是线性代数的一个基本工具．在后面章节关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中都要用到行列式．

本章首先由求解二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式，进而给出 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，最后作为行列式的应用，给出求解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

1.1 行列式的定义与性质

1.1.1 二阶行列式与三阶行列式

在中学，我们学过解二元、三元一次方程组．下面简单地回顾一下求解过程．对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

消去 x_2，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$；消去 x_1，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

观察式(1.2)可知，分子和分母都是由 4 个数分两对相乘再相减而得. 为此，可引入二阶行列式的定义.

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称其为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式表示一个数值，数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，第一个下标 i 称为行标，第二个下标 j 称为列标.

通常称左上角到右下角的两个元素所在的直线为主对角线；右上角到左下角的两个元素所在的直线为次对角线. 于是，二阶行列式的运算可用对角线法则表示：主对角线两元素之积减去次对角线两元素之积.

式(1.2)中的分子也可用行列式表示：$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解式(1.2)可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同样，在解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

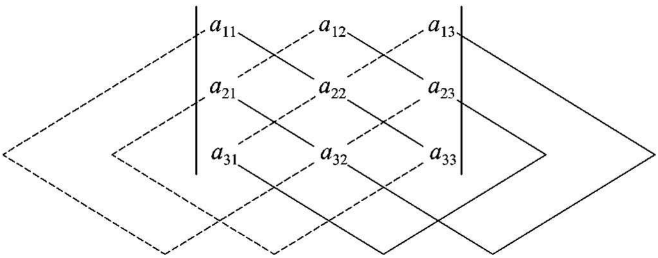
时，可引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称其为**三阶行列式**，它表示 6 项的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.3)$$

可按下图的方法记忆，其中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的负项.



利用行列式来表示线性方程组的解的方法可以推广到一般情形，这将在后面介绍 .

例 1.1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由式(1.3)，

$$\begin{aligned} D &= 2\times6\times1+3\times1\times4+2\times0\times0-2\times6\times4-3\times0\times1 \\ &\quad -2\times1\times0 \\ &= -24. \end{aligned}$$

由三阶及二阶行列式的定义可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

此公式也可作为三阶行列式的计算公式.

例 1.2 利用上面公式计算例 1.1.

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 6 - 3 \times (-4) + 2 \times (-24) = -24.$$

1.1.2 *n* 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

从上式看出,把一个三阶行列式可以归结为二阶行列式计算,上式右边各项的第一个因子分别是原行列式第一行的各元素,另一个因子是去掉第一个因子所在行和所在列的元素构成的比原行列式低一阶的行列式,且各项正负相间.

根据这个规律,可以归纳定义出 n 阶行列式.

定义 1.1 n 阶行列式定义为

当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

当 n 为大于 1 的正整数时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式也可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$，它表示一个数值.

显然，当 $n=2,3$ 时，就是二、三阶行列式.

习惯上，行列式的第 i 行可记为 r_i，第 j 列可记为 c_j.

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例 1.3 设

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&1&1\\0&4&-3\end{vmatrix},$$

求 M_{11},M_{12},M_{23} 与 A_{11},A_{12},A_{23}.

解 $M_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\4&-3\end{vmatrix}=-3-4=-7,$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-2&1\\0&-3\end{vmatrix}=6-0=6,$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3&-1\\0&4\end{vmatrix}=12-0=12,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-6,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-12.$$

引入余子式和代数余子式的概念后,可将行列式简记为

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}$$

或 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}.$

上式称为 n 阶行列式按第一行的展开式.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&3&4&0\\0&1&2&0\\3&0&0&4\end{vmatrix}.$$

解

$$D=1\begin{vmatrix}3&4&0\\1&2&0\\0&0&4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0&4&0\\0&2&0\\3&0&4\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0&3&0\\0&1&0\\3&0&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&3&4\\0&1&2\\3&0&0\end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 16 - 36 + 24 = -4.$$

由 n 阶行列式的定义,可以计算下述两个特殊行列式的值.

例 1.5 计算对角行列式(主对角线上的元素是 λ_i,其余的元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

的值.

解 由 n 阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & & & \\ & \lambda_4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-2}\begin{vmatrix} \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.6 计算下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 由 n 阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.1.3 行列式的性质

上面行列式的算例要么阶数较低,要么是特殊行列式,而要利用定义计算一般的高阶行列式往往比较复杂. 为了简化计算,我们需要研究行列式的性质 .

定义 1.2 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T},即如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

以三阶行列式为例说明 .

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

所以 $D = D^{\mathrm{T}}$.

例 1.7 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 由性质 1.1 和例 1.6,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由性质 1.1 知,在行列式中行与列具有同等“地位”,凡是对行成立的性质,对列也同样成立.

性质 1.2 互换行列式的两行(列),行列式的值变号.

以二阶行列式为例说明:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -D.$$

再以三阶行列式为例:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$,交换第一行与第二行,有

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8.$$