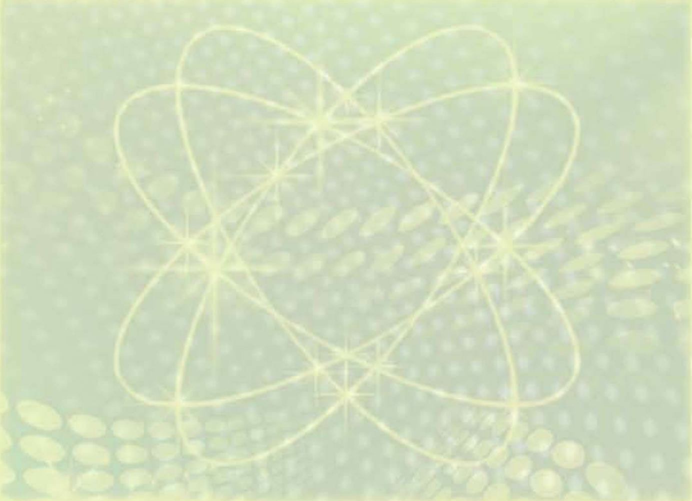
高 等 代 数

主编　高建芳　牛　晶　高晓爽



黑 龙 江 教 育 出 版 社

高 等 代 数

主编　高建芳　牛　晶　高晓爽

黑 龙 江 教 育 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数 / 高建芳,牛晶,高晓爽主编. —— 哈尔滨
:黑龙江教育出版社,2012.3
ISBN 978−7−5316−6241−9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… ②牛… ③高… Ⅲ.①高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 040307 号

高等代数

Gaodeng Daishu

主编　高建芳　牛　晶　高晓爽

责任编辑　徐永进
封面设计　李海波
责任校对　程　丽
出版发行　黑龙江教育出版社
(哈尔滨市南岗区花园街 158 号)
印　　刷　黑龙江远东联达教育文化传媒有限公司
开　　本　787×1092 毫米　1/16
印　　张　13.75
字　　数　400 千
版　　次　2012 年 4 月第 1 版
印　　次　2012 年 4 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978−7−5316−6241−9　　**定　　价**　30.00 元

黑龙江教育出版社网址:www.hljep.com.cn
如需订购图书,请与我社发行中心联系。联系电话:0451−82529593　82534665
如有印装质量问题,请与我社联系调换。联系电话:0451−82529347
如发现盗版图书,请向我社举报。举报电话:0451−82560814

前　　言

本书主要介绍了高等代数中的一些基本的常用的知识，包括行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换，欧几里得空间以及λ—矩阵。考虑到综合大学数学专业和高等师范院校数学专业两方面的需求，书中包含的内容对每个学校未必是必要的。还有些内容，如行列式的拉普拉斯展开定理、线性变换的值域和核、线性空间按特征值分解成不变子空间的直和以及λ—矩阵是选学内容，不作基本要求。因此在采用本书作为教材时，教师可根据实际情况作适当的取舍。

我们在编写该书的过程中，力求做到以下几点：

(1) 结构清楚，层次分明，论证严谨，语言简练，文字通俗，教师易于讲授，学生便于自学。

(2) 根据课程性质和学生的接受能力，适当地介绍了近年来出现的新成果，并有选择性地吸收国外的一些有益的想法。

(3) 按照由简到繁，由易到难的原则，每章后面都配备了复习题以供教师在教学中选用，并适当的增大了一些题的难度。希望这些题在检查学习效果和复习方面能发挥作用。

(4) 在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性，供不同的高等院校数学专业的学生使用。

本书的第一章、第二章和第三章由高建芳老师编写，第四章、第五章和第九章由高晓爽老师编写，牛晶老师负责编写第六章、第七章和第八章。虽然我们在编写的过程中，努力做到准确规范，但是书中一定还存在一些问题，希望大家在使用的过程中不断提出宝贵意见，以便今后写出高质量的教材。此外，黑龙江省教育出版社的徐永进主任及工作人员对本书的出版提供了大力支持，对此我们表示衷心的感谢。

编　者

2012 年 3 月

目　　录

CONTENTS

第一章　预备知识

高等代数是数学专业的重要基础课程.高等代数作为中学代数的继续和提高,与其有着很大的不同,这不仅表现在内容上,更重要的是表现在研究的观点和方法上.

在高等代数的研究过程中,将一再体现由具体事物抽象出一般概念,再以一般概念回到具体事物去的辩证观点和严格的逻辑推理方法.

在这一章里,我们把本课程要用到的一些基本知识介绍一下,为今后的学习做必要的准备.

1.1　集　合

1.1.1　集合的概念

若干个确定事物的集体,称为一个集合,其中每个事物称为这个集合的元素.

我们常用大写英语字母 A、B、C……来表示集合,常用小写英语字母 a、b、c……来表示集合的元素,如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$,如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

对于一些经常用到的集合,我们习惯上用一些特定的字母来表示,例如:

N 表示全体自然数的集合,

Z 表示全体整数的集合,

Q 表示全体有理数的集合,

R 表示全体实数的集合,

C 表示全体复数的集合.

在记述一个集合时,最常用的有下面两种方法.

1. **列举法**:把集合的元素一一列举出来.

在记述含有少量元素的集合时常用列举法.例如,集合 $\{1,2,5\}$,$\{0\}$ 等,都是用列举法记述集合.这时,用大括号将元素列出,用逗号分隔;有时集合元素很多,甚至无限多,但呈现有确定的规律性,也可以用列举法.

例如

$\{1,2,3,4\cdots\}$ 表示自然数集合 N,

$\{1,2,3,4,\cdots,100\}$表示$\leqslant 100$的自然数集合.

2. **描述法**:利用集合元素的根本特征给出集合.

我们在用描述法给出一个集合时,方法不是固定的,有时我们用语言叙述给出一个集合.例如:"1的平方根的全体"给出了一个集合.这个集合用列举法表示则为$\{1,-1\}$.还是这个集合,我们可以用下面的方法来记述,即$\{x \mid x^2-1=0\}$.在这种方法中,大括号中的内容分为两部分,用竖线隔开,竖线前写元素的一般形式,竖线后写元素的具体特征,当我们使用数学式子来描述元素的具体特征时,又称这种记述方法为解析法.

根据集合所含元素的多少,我们给出下面几个概念.

只含一个元素的集合称为单元素集,例如$\{a\}$,在这里,集合$\{a\}$与元素a在概念上是不同的.

不含任何元素的集合称为空集合,通常记作$\varnothing$,注意$\varnothing$与$\{0\}$不同,$\{0\}$是一个单元素集,它含有一个元素0.

含有有限个元素的集合称为有限集.空集合被视为有限集.有限集S的元素个数是一个非负整数,用记号$|S|$来表示,例如

$|\{1,2,3\}|=3$,$|\{0\}|=1$,$|\varnothing|=0$.

含有无限个元素的集合称为无限集.

为了以后叙述问题的方便,我们引入几个符号:

符号"$A\Rightarrow B$"表示"若A则B";

符号"$A\Leftrightarrow B$"表示"A成立必要且只要B成立";

符号"$\forall$"表示"对任意的"或"对每一个",例如,"$\forall_x$"表示"对每一个x";

符号"$\exists$"表示"至少存在一个",例如,"$\exists_x$"表示"至少存在一个x".

关于集合之间的关系,我们主要给出集合的包含与相等两个概念.

定义 1.1 设A、B是两个集合,如果A的每一个元素都是B的元素,则称A包含于B,记作$A\subseteq B$,或称B包含A,记作$B\supseteq A$.这时,又称A是B的子集,B是A的扩集.否则称A不包含于B,记作$A\nsubseteq B$,或称B不包含A,记作$B\nsupseteq A$.

显然有

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B).$$

$$(A\nsubseteq B)\Leftrightarrow(\exists x, x\in A \text{ 但 } x\notin B).$$

进一步我们又有

定义 1.2 若集合A包含于集合B,并且B至少有一个元素不属于A,则称A真包含于B,记作$A\subset B$,或称B真包含A,记作$B\supset A$,又称A是B的真子集.

显然有

$$(A\subset B)\Leftrightarrow(A\subseteq B \text{ 且 } \exists x\in B \text{ 但 } x\notin A).$$

定义 1.3 如果集合A和集合B含有完全相同的元素,则称A与B相等,记作$A=B$.

显然有

$$(A=B)\Leftrightarrow(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A).$$

$$(A=B)\Leftrightarrow(\forall x \ :x\in A\Leftrightarrow x\in B).$$

1.1.2 集合的运算

定义 1.4 由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集(简称为交),记作 $A\cap B$.

例如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,5,6\}$,则 $A\cap B=\{2\}$.

根据定义,我们有

$$(x\in A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\in B).$$

$$(x\notin A\cap B)\Leftrightarrow(x\notin A \text{ 或 } x\notin B).$$

定义 1.5 由至少属于集合 A 和 B 之一的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的并集(简称为并),记作 $A\cup B$.

例如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$.

根据定义,我们有

$$(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ 或 } x\in B).$$

集合的交与并满足以下运算律.

1) $A\cap A=A,A\cup A=A$;

2) $A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$;交换性

3) $\left.\begin{array}{l}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\\(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\end{array}\right.$结合性

4) $\left.\begin{array}{l}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);\end{array}\right.$分配性

5) $A\cap(A\cup B)=A,A\cup(A\cap B)=A$. 我们只对 4)中的第一个式子加以证明,其余的,读者可自行练习.

证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 $\forall x\in A\cap(B\cup C)$,那么 $x\in A$,且 $x\in B\cup C$,于是 $x\in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 中之一,若 $x\in B$,那么因为 $x\in A$,所以 $x\in A\cap B$;同样若 $x\in C$,则 $x\in A\cap C$,不论哪种情形都有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,所以 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

反之,若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,那么 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$. 但 $B\subseteq B\cup C$,$C\subseteq B\cup C$,所以不论哪种情形都有 $x\in A\cap(B\cup C)$. 故 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$,因此有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

两个集的交与并的概念可以推广到任意 n 个集上去,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是给定的集,由 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的一切公共元素所成的集叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$;由 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的一切元素所成的集叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

于是有

$$(x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\Leftrightarrow(x \text{ 至少属于某一 } A_i,i=1,2,\cdots,n)$$

$$(x\in A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\Leftrightarrow(x \text{ 属于每一 } A_i,i=1,2\cdots,n)$$

定义 1.6　设 A,B 是两个集，由一切属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集，称为 B 在 A 中的余集，或者称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

例如，$R-Q$ 就是一切无理数所组成的集，应注意的是，在 $A-B$ 的定义里，并没有要求 B 是 A 的子集，例如 $Q-C=\varnothing$.

定义 1.7　设 A,B 是两个集，令

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\},$$

$A\times B$ 称为 A 与 B 的积.

$A\times B$ 是由一切元素对 (a,b) 所成的集，其中第一个位置的元素 a 取自 A，第二个位置的元素 b 取自 B.

例如：$A=\{0,1\}$，$B=\{a,b\}$，则

$$A\times B=\{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}.$$

又如，在平面直角坐标系中，平面上所有的坐标的集就是 R 与 R 的积：

$\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathrm{R}\}$.

两个集合的积的概念也可以推广. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合. 由一切从 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 里顺序取出的元素组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_i\in A_i)$ 所组成的集合叫做集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

1.2　映　射

在中学数学里，已经学习过映射的概念，映射是数学中最基本的概念之一. 在这一节里，我们将讨论这个概念和它的一些简单性质.

1.2.1　映射的概念

定义 1.8　设 A,B 是两个非空集合. A 到 B 的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合 A 中每一元素 x，有集合 B 中一个唯一确定的元素 y 与之对应.

我们常用字母 f,g……表示映射. 用记号 $f{:}A\to B$ 表示 f 是 A 到 B 的一个映射.

如果通过映射 f，A 中元素 x 对应的 B 中元素是 y，那么就写作

$$f{:}x\longmapsto y$$

这时 y 叫做元素 x 在 f 之下的象，记作 $f(x)$，而 x 称为 y 在映射 f 下的一个原象.

如果对每一个 $x\in A$，$f(x)$ 都已确定，那么映射 f 就完全给出了.

例 1　令 Z 是一切整数的集合，对于每一整数 n，令 $f(n)=2n$ 与之对应，那么 f 是 Z 到 Z 的一个映射.

例 2　令 R 是一切实数的集合，R^+ 是一切正实数的集合，对于每一 $x\in\mathrm{R}$，令 $f(x)=x^2+1$ 与之对应，那么 f 是 R 到 R^+ 的一个映射.

例 3　设 A 是任意一个非空集合，对于每一 $x\in A$，令 $f(x)=x$ 与之对应.

$$f{:}x\longmapsto x$$

这自然是 A 到 A 的一个映射，这个映射称为集合 A 的恒等映射或单位映射，记作 j_A.

例 4　设$A=B=\{a,b,c,d\}$

$$f:a\longmapsto b,b\longmapsto c,c\longmapsto d,d\longmapsto a.$$

这是 A 到 B 的一个映射.

例 5　设 A 是一切非负实数的集合,B 是一切实数的集合,对于每一 $x\in A$,令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$与它对应,f 不是 A 到 B 的映射,因为当 $x>0$ 时,$f(x)$不唯一.

例 6　N 是一切自然数的集合

$$f:n\longmapsto n-1$$

不是 N 到 N 的映射,因为 $f(0)=-1\notin N$.

从上面的例子可以看出,关于 A 到 B 的映射应该注意以下几点:

1°　A 与 B 可以是相同的集合,也可以是不相同的集合,若 A 与 B 相同,A 到 B 的映射即 A 到自身的映射叫做集合 A 的一个变换.

2°　对于 A 的每一个元素 x,需要 B 中一个唯一确定的元素与它对应.

3°　一般说来,B 的元素不一定都是 A 中元素的象(参看例 1).

4°　A 中不相同的元素的象可能相同(参看例 2).

设 $f:A\to B,g:A\to B$ 都是 A 到 B 的映射. 若对于每一 $x\in A$,都有 $f(x)=g(x)$,则称映射 f 与 g 相等,记作 $f=g$.

例如　令　$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},x\longmapsto|x|$,

$$g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},x\longmapsto+\sqrt{x^2},$$

那么,$f=g$.

映射这个概念对我们来说并不陌生,它就是我们所熟悉的函数概念的推广,因此也常常把 A 到 B 的映射叫做定义在 A 上,取值在 B 内的函数.

设 $f:A\to B$ 是一个映射,对于 $x\in A$,x 的象 $f(x)\in B$,一切这样的象作为 B 的一个子集,用 $f(A)$表示:

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

叫做 A 在 f 之下的象,或者叫做映射 f 的象.

例如在上面例 1 里,$f(\mathrm{Z})$就是一切偶数的集合,在例 4 里,$f(A)=B$.

1.2.2　满射、单射、双射

A 到 B 的映射 f 的象 $f(A)\subseteq B$,$f(A)$可能是 B 的一个真子集,也可能等于 B. 我们有

定义 1.9　设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果对于 B 中的一个元素 y,都有 A 中元素 x,使 $y=f(x)$,这时称 f 是 A 到 B 的一个满映射(简称满射).

根据这个定义,$f:A\to B$ 是满射必要且只要 $f(A)=B$.

例 3 和例 4 都是满射,而例 1 和例 2 不是满射.

关于映射,只要求对于 A 中每一个元素 x,有 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应,但是 A 中不同的元素可以有相同的象. 例如,在例 2 里,对于绝对值相同的两个非零实数 x 和 $-x$,它们的象都是 x^2+1. 然而有的映射具有这样的性质:A 中任意两个不同元素的

象也不相同. 例 1、例 3、例 4 中的映射都具有这一性质. 对此, 我们有

定义 1.10 设 $f:A\to B$ 是一个映射. 如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2, 只要 $x_1\neq x_2$, 就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 那么就称 f 是 A 到 B 的一个单映射(简称单射).

根据这个定义, $f:A\to B$ 是单射的充分必要条件是对任意的 $x_1, x_2\in A$, 只要 $f(x_1)=f(x_2)$, 就有 $x_1=x_2$.

上面的例 1、例 3、例 4 都是单射.

定义 1.11 如果 $f:A\to B$ 既是满射, 又是单射, 即如果 f 满足下列两个条件:

1) $f(A)=B$;

2) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, 对一切 $x_1, x_2\in A$,

那么就称 f 是 A 到 B 的一个双射.

例 4 的映射是一个双射, 任意非空集合 A 的恒等映射(例 3)

显然是 A 到自身的一个双射.

特别地, 我们把一个有限集合 A 到自身的双射叫做一个置换. 这个概念以后我们还要用到, 例如, 例 4 的映射就是集合 $\{a,b,c,d\}$ 的一个置换.

如果存在集合 A 到集合 B 的一个双射, 我们有时也说, 在 A 与 B 之间存在着一一对应.

对有限集合来说, 两个集合之间存在一一对应的充分必要条件是它们所含元素的个数相同. 于是有限集合与其真子集之间不能建立一一对应. 但无限集合可以和其某一真子集建立一一对应.

例如: 整数集合与偶数集合之间就存在有一一对应

$$f:n\longmapsto 2n.$$

1.2.3 映射的合成

设 f 是 A 到 B 的一个映射, 而 g 是 B 到 C 的一个映射, 那么对每一 $x\in A$, $f(x)\in B$, 因而 $g(f(x))$ 是 C 中的一个元素. 因此, 对于每一 $x\in A$. 就有 C 中唯一确定的元素 $g(f(x))$ 与之对应, 这样就得到 A 到 C 的一个映射, 这个映射是由映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 所决定的, 称为 f 与 g 的合成, 记作 $g\circ f$. 于是有

$g\circ f:A\to C:g\circ f(x)=g(f(x))$, 对一切 $x\in A$.

例 7 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R};x\longmapsto x^2$,

$g:\mathrm{R}\to\mathrm{R};x\longmapsto \sin x$,

那么, $g\circ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R};x\longmapsto \sin x^2$.

例 8 设 $A=\{1.2.3\}$.

$f:A\to A;1\longmapsto 2, 2\longmapsto 3, 3\longmapsto 1.$

$g:A\to A;1\longmapsto 3, 2\longmapsto 1, 3\longmapsto 2.$

那么 $g\circ f:A\to A;1\longmapsto 1, 2\longmapsto 2, 3\longmapsto 3.$

例 9 集合 A 到 B 的任意一个映射 f 都有

$$j_B\circ f=f\circ j_A=f.$$

容易看出,映射的合成是复合函数概念的推广.

映射的合成满足结合律,设给定映射

$$f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D.$$

那么合成映射 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 都是 A 到 D 的映射. 我们有

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

事实上,对于 A 的任意元素 x,

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$,

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))$,

所以 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

映射的合成不满足交换律,首先,一般而言,如果 f 是集合 A 到 B 的映射,g 是 B 到 C 的映射,则 $g\circ f$ 是 A 到 C 的映射,而 $f\circ g$ 未必有意义,另外,即使 $A=B=C$,这时 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 均有意义,也未必有 $f\circ g=g\circ f$,例如,设 f 和 g 均为实数集合 R 到自身的映射.

$$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R};x\longmapsto 2x, \forall x\in\mathrm{R}.$$

$$g:\mathrm{R}\to\mathrm{R};x\longmapsto x^2, \forall x\in\mathrm{R}.$$

则　$(f\circ g)(x)=2x^2$,$(g\circ f)(x)=4x^2$,因而 $f\circ g\neq g\circ f$.

1.2.4　逆映射

设 f 是集合 A 到集合 B 的一个双射. 现在我们依据 f 定义一个集合 B 到集合 A 的映射 g.

$$g:B\to A;y\longmapsto x,\text{如果 } f(x)=y.$$

我们首先说明这个定义的合理性,即 g 确实是 B 到 A 的映射. 首先,由于 f 是满射,所以对 B 中任一元素 y,都在 A 中有元素 x,使 $f(x)=y$,即 B 中任一元素 y 在 g 下有象,又由于 f 是单射,所以这样的 x 是唯一的,即 y 在 g 下的象是唯一的,因此 g 是 B 到 A 的一个映射.

于是立刻有,对 $\forall x\in A$, $\forall y\in B$,

$$g\circ f(x)=g(f(x))=x,\text{即 } g\circ f=j_A.$$

$$f\circ g(y)=f(g(y))=y,\text{即 } f\circ g=j_B.$$

直观地说,x 在 f 的作用下成为 $f(x)$,接着又在 g 的作用下逆回变为 x;同样,y 在 g 的作用下变为 $g(y)$,接着又在 f 的作用下逆回变为 y.

定义 1.12　设 f 是集合 A 到 B 的一个映射,如果存在一个 B 到 A 的映射 g,使

$$g\circ f=j_A, f\circ g=j_B,$$

则称 g 为 f 的逆映射.

由上面的分析可知,对于一个双射 f,总存在 f 的一个逆映射,并且进一步我们有

定理 1.1　设 f 是集合 A 到 B 的一个映射,则 f 存在逆映射的充分必要条件是 f 为双射,并且当 f 存在逆映射时,其逆映射是唯一的.

证　充分性已由上面分析得证.

现设 f 有逆映射 g,下证 f 是双射.

先证 f 是满射，对 $\forall y\in B$，令 $g(y)=x\in A$，由于 $f\circ g=j_B$，所以

$$f(x)=f(g(y))=(f\circ g)(y)=j_B(y)=y.$$

即 B 中任意元素 y 都是 A 中某元素 x 在 f 下的象，所以 f 是满射.

再证 f 是单射，设 $x_1,x_2\in A$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，由于 $g\circ f=j_A$，所以

$$x_1=j_A(x_1)=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))$$
$$=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=j_A(x_2)=x_2,$$

因此 f 是单射.

所以 f 是 A 到 B 的双射.

最后设 f 存在逆映射 g 和 h，根据逆映射定义有

$$g\circ f=h\circ f=j_A,\ f\circ g=f\circ h=j_B.$$

因此有

$$g=g\circ j_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=j_A\circ h=h.$$

所以 f 的逆映射是唯一的.

设 f 是集合 A 到 B 的一个映射，如果 f 有逆映射，则其逆映射是唯一的，我们把 f 唯一的逆映射记作 f^{-1}，于是，

$$f^{-1}\circ f=j_A,\ f\circ f^{-1}=j_B.$$

因此，当 f^{-1} 存在时，f^{-1} 也是可逆的，并有

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

例 10 设 $A=\{x\in \mathrm{R}\mid x\geqslant 0\}$.

$B=\{x\in \mathrm{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

$$f:A\to B;f(x)=\frac{x}{1+x}.$$

证明 f 是 A 到 B 的双射并求 f^{-1}.

证 因为当 $x\geqslant 0$ 时，

$$0\leqslant\frac{x}{1+x}<1.$$

即当 $x\in A$ 时，$f(x)\in B$，且 $f(x)$ 由 x 唯一确定，故 f 是 A 到 B 的映射.

设 $y\in B$，取

$$x=\frac{y}{1-y}.$$

因为 $0\leqslant y<1$，所以 $1-y\neq 0$，且 $x\geqslant 0$，所以 $x\in A$，我们有

$$f(x)=\frac{x}{1+x}=\frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}}=y.$$

所以 f 是满射.

设 $x_1,x_2\in A$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，那么

$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}.$$

由此得 $x_1=x_2$，所以 f 是单射.

综上 f 是 A 到 B 的双射. 由上述 f 是满射的证明容易看出

$$f^{-1}:B\to A;x\longmapsto\frac{x}{1-x}.$$

最后我们指出一种很重要的映射.

定义 1.13　设 A、B、C 是三个非空集合，由积 $A\times B$ 到 C 的映射叫 $A\times B$ 到 C 的代数运算. 特殊的，$A\times A$ 到 A 的代数运算也叫 A 的代数运算.

例 11　$\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}\to\mathrm{Z},(m,n)\longmapsto m+n$ 就是整数集 Z 的代数运算，实际它就是整数的加法.

例 12　设 $A=\{e\},B=\mathrm{R},C=\{y\in\mathrm{R}\mid\mathrm{R}>0\}$，

$$A\times B\to C,(e,x)\mid\longmapsto e^x$$

是 $A\times B$ 到 C 的代数运算，它是 R 中的以 e 为底的指数运算.

1.3　数学归纳法

数学归纳法是进行数学证明的有力工具之一，数学归纳法所依据的原理是自然数集的一个最基本的性质——最小数原理.

最小数原理　自然数集 N 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数，也就是 $a\in S$，对于 $\forall c\in S$ 都有 $a\leqslant c$.

注意　1°最小数原理并不是对任意数集都成立的. 例如，整数集 Z 就没有最小数.

2°设 c 是任意一个整数，令

$$M_c=\{x\in\mathrm{Z}\mid x\geqslant c\},$$

那么以 M_c 代替自然集 N，最小数原理对于 M_c 仍然成立，也就是说 M_c 的任意一个非空子集必含有一个最小数. 特别，当 $c=0$ 时，可得一切非负整数所成的集合 $M_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 的任一非空子集必含有一个最小数.

由最小数原理可得出以下的数学归纳法原理.

第一数学归纳法原理　设有一个与自然数 n 有关的命题，如果

1°　当 $n=1$ 时，命题成立；

2°　假设 $n=k$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时，命题也成立，

那么这个命题对于一切自然数 n 都成立.

证　假设命题不是对于一切自然数都成立，令 S 表示使命题不成立的自然数所成的集. 那么 $S\neq\varnothing$，于是由最小数原理，S 中有最小数 h，因为命题对于 $n=1$ 成立，所以 $h\neq1$，从而 $h-1$ 是一个自然数，因为 h 是 S 中的最小数，所以 $h-1\notin S$. 这就是说，当 $n=h-1$ 时，命题成立. 于是由 2°，当 $n=h$ 时命题也成立，因此 $h\notin S$，这就导致了矛盾.

注意　根据最小数原理的注意 2°，我们可以取 M_c 来代替自然数集 N. 也就是说，如果要证明某一个命题从某个整数 c 开始成立，这时仍然可以利用数学归纳法来证明，只要把第一数学归纳法原理中条件 1°的 $n=1$ 换成 $n=c$ 就行了.

我们看一个例子.

例 1 证明,当 $n\geqslant 3$ 时,n 边形的内角和等于 $(n-2)\pi$.

证 1° 当 $n=3$ 时,命题成立,因为三角形内角和等于 $\pi=(3-2)\pi$.

2° 假设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时命题成立,对于任意一个 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$,连接 A_1A_3,那么 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和等于三角形 $A_1A_2A_3$ 的内角和再加上 k 边形 $A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和. 前者等于 π,后者由归纳假设,等于 $(k-2)\pi$,因此 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和等于

$$\pi+(k-2)\pi=(k-1)\pi=((k+1)-2)\pi.$$

命题得证.

在有些情况下,归纳假定"命题对于 $n=k$ 成立"还不够,而需要较强的假定. 我们有

第二数学归纳法原理 设有一个与自然数 n 有关的命题. 如果

1° 当 $n=1$ 时命题成立;

2° 假设命题对于一切小于 k 的自然数来说成立,则命题对于 k 也成立;

那么命题对于一切自然数 n 都成立.

可仿照第一数学归纳法原理进行证明.

当然,在这个原理里,条件 1°也可以换成 n 等于某一个整数 c.

例 2 设 $a_1=3, a_2=7, a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}(n=3,4,\cdots)$,试证,对任意自然数 n 都有 $a_n=2^{n+1}-1$.

证 1)当 $n=1$ 时,$a_1=3=2^{1+1}-1$.

当 $n=2$ 时,$a_2=7=2^{2+1}-1$.

所以对于 $n=1,2$,命题成立.

2)假设 $n<k$ 时命题成立,要证 $a_k=2^{k+1}-1$,其中 $k\geqslant 3$.

因为 $a_k=3a_{k-1}-2a_{k-2}$,由归纳假设有

$$a_{k-1}=2^{(k-1)+1}-1, a_{k-2}=2^{(k-2)+1}-1,$$

所以
$$\begin{aligned} a_k&=3(2^k-1)-2(2^{k-1}-1)\\ &=2^{k+1}-1, \end{aligned}$$

这就是说,$n=k$ 时命题也成立.

1.4 数环和数域

我们进行数的四则运算,总是要在一定的数的范围内进行. 最初接触的一个重要的数的范围可以认为是自然数集合,在自然数集合中,数的四则运算中的加法和乘法可以永远进行,但减法和除法却不能永远进行,将自然数集合扩展到整数集合,则数的加法,减法,乘法可以永远进行,但除法即使在除数不为零的情况下,仍不能永远进行,再将整数集合扩展到有理数集合,则数的四则运算都能永远进行,只是除法有除数不为 0 的限制.

由此我们给出