

台大圖書館

1695

柯氏微積分學  
上卷



193800  
238946

基本館藏

柯氏微積分學

下卷

46



書號：15733

定價人民幣 41,000元

乙酉學社叢書第一集

# 柯氏微積分學

上 卷

DIFFERENTIAL-UND INTEGRAL-RECHNUNG

BAND I  
VON

R. COURANT

朱言鈞編譯

中華書局出版

乙酉學社叢書第一集

# 柯氏微積分學

下 卷

DIFFERENTIAL-UND INTEGRAL-RECHNUNG

~~BAND II~~

中華書局出版

22c

一九五二年一月三版

大學用書

柯氏微積分學(上卷)(全二冊)

◎定價人民幣三萬六千元

編譯者 朱 鈞

原書名 Differential-und Integralrechnung  
原作者 Richard Courant

出版者 上海河南中路二二一號 中華書局股份有限公司

印刷者 上海澳門路四七七號 中華書局上海印刷廠

發行者 三聯中華商務印書館聯合組織 中國圖書發行公司

各地分店

三聯書局  
中華書局  
商務印書館  
開明書店  
聯營書店

總目編號(14528) (2起)印數2,001-3,000

## 原 序 要 旨

近年以來，微積分學課本之印行於世者，不可謂不多。然欲求一提綱鉤玄，引人入勝之作，使一讀之後，能瞭然於此學之影響及其應用之關係者，殊不易得。若專求理論之謹嚴而不問思想之起源，則初學見之，將茫然不知所措；或注意應用之例題而不講系統之聯繫，則易流於支離瑣碎之病。然則如何將基本與枝節問題加以應有之明辨，去其支蔓，明其精蘊，而後建立一完整之體系，俾會通於理論與應用之相應相倚，得左右逢源之樂；甚矣著述之難也。

本書係修訂前在德國荷廷根大學歷年之講稿而成；倉促從事，何敢自炫為理想之作。惟所敢自信者，此書之付印，在今日尚非贅事。就其所赴之目的及敘述之方式言之，似有其特殊之處，不僅材料之選擇與排次與衆不同而已。其最顯著者，為微分與積分學之混合編述，與一般之先論微分，後論積分者大異其旨。考微積之先後分論，實由於偶然之習慣，殊乏理論之根據，其結果使學者不能直捷觸及中心問題，即對於定積分、不定積分及導數之關係未能融會領悟，不可謂非憾事。自 Felix Klein 首創混合講述之法而風氣為之一變。今師其意以編本書；上卷所論，為一個自變數之函數問題，至二個以上自變數之理論及應用，擬留待下卷研討之；蓋採用是法以編課本者，前似未嘗見也。

近代數學所以能發生濃厚之美感者，要為推理方法之謹嚴。故立論必求符合謹嚴之最高標準，斯固然矣。雖然，管見所及，以為原始要

終，必追溯數學認識之本源而後可。考數學最後之所本，是否起自觀覺 (Anschauung)，爲一哲學問題，惟觀覺之有助於認識，則爲無可否認之事。因此之故，本書在不失謹嚴之條件下，擬力求觀覺之發揮與運用。凡基本概念與原理之闡明，必先求其淵源於觀覺之中；至其細密之分析，嚴正之證明，則列入每章之附錄中（初讀時可略去，俟感覺需要時細讀之）；凡此所爲，不特爲初學設想，蓋有深意存焉。

復次，本書所注意者，爲微積分學與應用問題之密切關係，晚近應用科學之昌明，固爲理論發展之結果，而應用問題之發生，常足以刺激理論之精進，其間互爲因果之關係，實爲科學發展之原動力。明乎是，乃可益見數學思想之優美與偉大，本書僅舉其大者要者，甚望讀者由此啓途，深思研尋，進窺此學之本原耳。



## 本書內容提要

本書根據 R. Courant 所著 *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung* 及最近出版之英譯本編譯而成，計分上下兩卷，此為下卷，以多變數之函數作題材，觀極限問題之發展。先論偏導數及全微分，繼以重積分、線積分及面積分說明其間之關係及物理學中之應用。復就旁義積分之含參變數者與無盡級數作比較之研討，從而創造各種新式函數，大有引人入勝之感。最後應用全部原理以治複變數之函數，使微積分學得一完整之體系。國內理工大學採作教本，甚為適宜。

# 柯氏微積分學

## 上 卷 目 次

| 原序要旨                    | (頁數) |
|-------------------------|------|
| 第一章 實數、函數與極限.....1      |      |
| 第一節 實數略說.....1          |      |
| 1.1.1 有理數之特性.....1      |      |
| 1.1.2 實數之連續性.....3      |      |
| 1.1.3 實數之表達形式.....5     |      |
| 第二節 函數概念.....6          |      |
| 1.2.1 函數之定義.....6       |      |
| 1.2.2 函數之圖示.....8       |      |
| 1.2.3 逆函數.....13        |      |
| 第三節 初等函數略論.....14       |      |
| 1.3.1 有理函數.....14       |      |
| 1.3.2 代數函數.....15       |      |
| 1.3.3 三角函數.....16       |      |
| 1.3.4 指數與對數函數.....17    |      |
| 第四節 數序之極限.....18        |      |
| 1.4.1 數序.....18         |      |
| 1.4.2 極限舉例.....21       |      |
| 1.4.3 極限之定義.....27      |      |
| 1.4.4 Cauchy 收敛法.....29 |      |

|        |                 |    |
|--------|-----------------|----|
| 1.4.5  | 獨行數序之收斂條件       | 30 |
| 1.4.6  | 極限之運算           | 30 |
| 1.4.7  | $e$ 與 $\pi$     | 32 |
| 第五節    | 連續變數之極限         | 35 |
| 1.5.1  | 再論極限之定義         | 35 |
| 1.5.2  | 舉例              | 36 |
| 第六節    | 函數之連續性          | 38 |
| 1.6.1  | 連續性之定義          | 38 |
| 1.6.2  | 間斷點             | 40 |
| 1.6.3  | 關於連續函數之定理       | 42 |
| 第一章附錄  |                 | 44 |
| 第一節    | 聚點原則及其應用        | 45 |
| A1.1.1 | 聚點原則            | 45 |
| A1.1.2 | 聚點與極限           | 46 |
| A1.1.3 | Cauchy 審斂法之證明   | 47 |
| A1.1.4 | 有涯獨行數序之收斂性      | 47 |
| A1.1.5 | 最大與最小聚點; 數集之上下涯 | 48 |
| 第二節    | 關於連續函數之定理       | 50 |
| A1.2.1 | 連續函數之最大與最小值     | 50 |
| A1.2.2 | 均勻連續性           | 51 |
| A1.2.3 | 介值定理            | 52 |
| A1.2.4 | 獨行連續函數之逆函數      | 53 |
| A1.2.5 | 其他定理            | 54 |
| 第三節    | 再論初級函數          | 54 |
| 第二章    | 微積分學之基本概念與定理    | 58 |
| 第一節    | 定積分             | 58 |

|       |                   |    |
|-------|-------------------|----|
| 2.1.1 | 面積問題              | 58 |
| 2.1.2 | 定積分之定義            | 59 |
| 2.1.3 | 舉例                | 61 |
| 第二節   | 導數                | 66 |
| 2.2.1 | 導數與切線             | 66 |
| 2.2.2 | 導數與速度             | 69 |
| 2.2.3 | 求導數舉例             | 70 |
| 2.2.4 | 函數之可導性與連續性        | 71 |
| 2.2.5 | 高重導數及其意義          | 73 |
| 2.2.6 | 導數之中值定理           | 74 |
| 2.2.7 | 何謂微分              | 77 |
| 第三節   | 不定積分之定義;微積分學之基本定理 | 79 |
| 2.3.1 | 何謂不定積分            | 79 |
| 2.3.2 | 不定積分之導數           | 80 |
| 2.3.3 | 原函數、不定積分之普遍定義     | 82 |
| 2.3.4 | 定積分之計算            | 85 |
| 2.3.5 | 舉例                | 86 |
| 第四節   | 繪圖求積分之法           | 87 |
| 第五節   | 再論積分與導數之關係        | 89 |
| 第六節   | 積分估值法             | 91 |
| 2.6.1 | 積分之中值定理           | 91 |
| 2.6.2 | 中值定理之應用           | 92 |
| 第二章   | 附錄                | 95 |
| 第一節   | 定積分之存在定理          | 95 |
| 第二節   | 積分中值定理與導數中值定理之關係  | 96 |
| 第三章   | 初等函數之微積分學         | 98 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 第一節 求導數之法                     | 98  |
| 3.1.1 簡法四則                    | 98  |
| 3.1.2 有理函數之導數                 | 100 |
| 3.1.3 三角函數之導數                 | 100 |
| 第二節 不定積分之簡單求法                 | 101 |
| 3.2.1 與導數公式相對峙之積分公式           | 101 |
| 3.2.2 最簡單函數之積分                | 101 |
| 第三節 逆函數及其導數                   | 103 |
| 3.3.1 逆函數之導數                  | 103 |
| 3.3.2 冪函數之逆函數                 | 105 |
| 3.3.3 三角函數之逆函數                | 106 |
| 第四節 疊函數之導數                    | 109 |
| 3.4.1 鏈導法                     | 109 |
| 3.4.2 舉例                      | 111 |
| 3.4.3 再論 $x^x$ 之積分及導數         | 112 |
| 第五節 對數函數及其逆函數                 | 113 |
| 3.5.1 對數函數之定義及其特性             | 113 |
| 3.5.2 對數函數之逆函數、指數函數           | 116 |
| 3.5.3 普遍指數函數 $a^x$ 及冪函數 $x^2$ | 117 |
| 3.5.4 指數函數之另一形式               | 118 |
| 3.5.5 指數函數之應用                 | 120 |
| 第六節 雙曲函數及其逆函數                 | 125 |
| 3.6.1 雙曲函數之定義及其特性             | 125 |
| 3.6.2 雙曲函數之逆函數                | 127 |
| 3.6.3 論雙曲函數與三角函數之相似           | 128 |
| 第七節 函數之數量級                    | 130 |

|             |                      |     |
|-------------|----------------------|-----|
| 3.7.1       | 何謂數量級                | 130 |
| 3.7.2       | 指數及對數函數之數量級          | 131 |
| 3.7.3       | 函數在任何一點隣近之數量級        | 133 |
| 3.7.4       | 函數趨零之數量級             | 133 |
| 第三章附錄       |                      | 135 |
| 第一節         | 特殊函數舉例               | 135 |
| 第二節         | 再論函數之可導性             | 137 |
| 第三節         | 求導數法雜論               | 138 |
| A3.3.1      | 二項式定理之證明             | 138 |
| A3.3.2      | 高重導數之公式              | 139 |
| A3.3.3      | 再論鏈導法之應用             | 139 |
| 第四章 積分學理之研討 |                      | 141 |
| 第一節         | 最初淺之積分               | 141 |
| 第二節         | 變數交替法之討論及其應用         | 143 |
| 4.2.1       | 交替公式                 | 143 |
| 4.2.2       | 交替公式之另一證明            | 146 |
| 4.2.3       | 舉例                   | 148 |
| 第三節         | 分部積分法                | 151 |
| 4.3.1       | 分部積分之公式              | 151 |
| 4.3.2       | 舉例                   | 152 |
| 4.3.3       | 遞演公式                 | 153 |
| 4.3.4       | 關於 $\pi$ 之 Wallis 公式 | 154 |
| 第四節         | 有理函數之積分              | 156 |
| 4.4.1       | 有理函數之基本式             | 157 |
| 4.4.2       | 基本式之積分               | 157 |
| 4.4.3       | 有理函數之分解              | 158 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 第五節 函數之有理化 .....                   | 162 |
| 4.5.1 三角及雙曲函數之有理化 .....            | 162 |
| 4.5.2 再論交替法 .....                  | 166 |
| 第六節 不能用初等函數表達之積分 .....             | 167 |
| 4.6.1 以積分作函數之定義 .....              | 167 |
| 4.6.2 總論求積分與求導數 .....              | 169 |
| 第七節 積分概念之旁推 .....                  | 170 |
| 4.7.1 函數之有間斷點者 .....               | 170 |
| 4.7.2 積分變程爲無限者 .....               | 172 |
| 4.7.3 $\Gamma$ 函數 .....            | 173 |
| 4.7.4 Dirichlet 與 Fresnel 積分 ..... | 174 |
| 第四章附錄 .....                        | 177 |
| 積分之第二中值定理 .....                    | 177 |
| 第五章 微積分學之應用 .....                  | 179 |
| 第一節 莫大與莫小值問題 .....                 | 179 |
| 5.1.1 審莫大及莫小值之法 .....              | 179 |
| 5.1.2 舉例 .....                     | 183 |
| 第二節 論曲線之方程式 .....                  | 187 |
| 5.2.1 圓坐標之應用 .....                 | 187 |
| 5.2.2 參變數方程式 .....                 | 188 |
| 5.2.3 論曲線之導數 .....                 | 191 |
| 5.2.4 論曲線之幾何性質 .....               | 194 |
| 第三節 平面曲線略論 .....                   | 196 |
| 5.3.1 論面積之正負 .....                 | 196 |
| 5.3.2 面積之普遍公式 .....                | 198 |
| 5.3.3 曲線之弧長 .....                  | 201 |

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 5.3.4 曲線之曲率                                  | 205 |
| 5.3.5 質量中心與曲線矩                               | 207 |
| 5.3.6 轉成面之面積與體積                              | 208 |
| 5.3.7 轉動慣量                                   | 209 |
| 5.3.8 舉例                                     | 210 |
| 第四節 力學中最簡單之問題                                | 214 |
| 5.4.1 力學中之基本假設                               | 214 |
| 5.4.2 舉例                                     | 215 |
| 5.4.3 功量概念之應用                                | 223 |
| 第五章附錄                                        | 226 |
| 法包線之性質                                       | 226 |
| 第六章 函數之展開                                    | 230 |
| 第一節 近似表達法舉例                                  | 230 |
| 第二節 Taylor 定理                                | 233 |
| 6.2.1 關於整有理函數之 Taylor 公式                     | 233 |
| 6.2.2 關於任何函數之 Taylor 公式                      | 234 |
| 6.2.3 餘項之估計                                  | 235 |
| 第三節 初等函數之展開                                  | 237 |
| 6.3.1 指數函數之展開                                | 237 |
| 6.3.2 $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ 之展開 | 238 |
| 6.3.3 二項式級數                                  | 239 |
| 第四節 Taylor 定理在幾何學中之應用                        | 241 |
| 6.4.1 曲線之接觸                                  | 241 |
| 6.4.2 再論曲線之曲率圓                               | 243 |
| 6.4.3 再論莫大與莫小值問題                             | 244 |
| 第六章附錄                                        | 245 |



|       |                      |     |
|-------|----------------------|-----|
| 第一節   | 函數之不能展開者             | 245 |
| 第二節   | $e$ 爲無理數之證明          | 245 |
| 第三節   | 二項式級數收斂之證明           | 246 |
| 第四節   | 函數之零點與無限點,所謂不定式      | 247 |
| 第五節   | 插值公式及其與 Taylor 公式之關係 | 250 |
| 第七章   | 近似算法略論               | 254 |
| 第一節   | 積分之近似算法              | 254 |
| 7.1.1 | 矩形替代法                | 254 |
| 7.1.2 | 梯形替代法                | 255 |
| 7.1.3 | Simpson 法            | 255 |
| 7.1.4 | 舉例                   | 256 |
| 7.1.5 | 誤差之估計                | 258 |
| 第二節   | 中值定理及 Taylor 定理之應用   | 259 |
| 7.2.1 | 誤差問題                 | 259 |
| 7.2.2 | $\pi$ 之計算            | 262 |
| 7.2.3 | 對數之計算                | 263 |
| 第三節   | 求方程式之近似根             | 264 |
| 7.3.1 | Newton 法             | 264 |
| 7.3.2 | 伴設法                  | 265 |
| 7.3.3 | 疊代法                  | 266 |
| 7.3.4 | 舉例                   | 268 |
| 第七章附錄 |                      | 269 |
|       | Stirling公式           | 269 |
| 第八章   | 無盡級數綱要               | 273 |
| 第一節   | 基本概念                 | 273 |
| 8.1.1 | 收斂與發散                | 273 |