

QUANGUO
ZHUMING GAOXIAO
ZIZHU ZHAOSHENG
FUXI ZHIDAO

全国著名高校
自主招生复习指导

数学那玩意

—— 自主招生秘籍

韩 旭 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学那玩意

——自主招生秘籍

韩 旭 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学那玩意：自主招生秘籍 / 韩旭编著. — 杭州：浙江大学出版社，2010.11

ISBN 978-7-308-08072-9

I. ①数… II. ①韩… III. ①数学课—高中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 212905 号

数学那玩意——自主招生秘籍

韩旭 编著

策 划 潘学超 潘姝羽

责任编辑 王同裕

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址：<http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15

字 数 300 千

版 印 次 2010 年 11 月第 1 版 2010 年 11 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-08072-9

定 价 25.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

前言

随着高校招生自主权的扩大,高校自主招生的规模正逐年提升。通过校荐与自荐的方式,越来越多的同学有机会获得自主招生资格,参加高校的自主招生考试。自主招生已经成为进入理想大学的一个重要途径。

然而,自主招生的优惠不是随随便便能拿到的,能获得 20 分乃至 30 分加分的人数更是少数,选拔的方法当然只有一个——考试。自主招生的题目难度与风格同高考题有很大区别。别的不说,对于数学,一方面,自主招生更侧重对数学思想方法的考察,另一方面,自主招生会涉及很多高考内容不曾涉及的知识。可以说,自主招生的数学,夹在高考题与竞赛题之间,向下涉及高考难题,向上涉及竞赛中档题。而综观五门科目,数学是最有区分度、最能拉分的科目。所以,要想在自主招生中取得好成绩,必须要把数学拿下——这便引出了本书的编写目的:帮助你增长知识,开阔眼界,培养数学思维,掌握基本方法,提升数学素养,从容面对自主招生数学题!

本书按如下模式编写:基础知识+例题+练习。

在基础知识中,我先介绍一些基本的公式、定理、方法,并适当配以例题。有些时候,我会一个方法配一道题目,有时候我会先一口气将方法全说完,再举一堆例题。这是因为有些题目方法比较单一,可以专门作为某个方法的例题,但有些题目有多种方法,或者需要综合运用多种方法,这就很难将它放在某个方法下去做例子了。

例题中,我按照“分析”+“解”+“小结”的模式论述。目前市面上的大部分教辅书,都是冷冰冰的题目和答案,这固然可以激发读者思考,但有时也会让读者难以理解,不知道是怎么想到的。我也是过来人,深知读这种书的痛苦。所以,在“分析”中,我会介绍这道题的想法——应该往什么方向考虑,为什么要往这个方向考虑,有时对一些新的知识与方法先做介绍。在“解”中,展示完整的过程。在“小结”中进行一些总结。

大部分章节的最后都附有练习,练习后附有提示,书后有参考答案。希望你能先自己思考,若有困难再看看提示或者与他人讨论,最后再求助于答案。看完答案后,也要加以总结,想想为什么要这么想,从题目中要学到想法,而不是具体的做法。

本书是一本介绍知识、思想与方法的书,不是题典,书中题目并不多。所以,要想熟练掌握这些知识与思想方法,在通过自己思考理解的基础上,还得通过更多的题目来巩固,这就得靠你自己了。

读数学书,不能像看小说似的一带而过,必须要动脑子思考。在看每一道例题的解答前,建议你自己先做一遍。遇到不理解的地方,要想办法去搞懂,比如问同学老师、百度一下——网络是一个非常有用的宝库——抱怨或者放弃是不可取的。通过自己的思考,领悟到的知识才是印象最深的。

相信这本书能在通过自主招生考试之路上助你一臂之力!

最后,由衷地感谢潘姝羽、潘学超、施文博、嵇晨同学为本书的出版提供的无可替代的帮助,没有你们的热心与奉献,本书不可能这么快与读者见面。

另外,在此还要特别感谢我高中三年的数学老师——南师附中兰松斌老师——千言万语,尽在不言中。

韩 旭

2010年8月8日

序 言

现在我这个无名小卒在这儿耽误您点时间。呵呵,没别的意思,就是想和您谈谈韩旭和他的这本书。

韩旭和我都是南京师范大学附属中学 2010 届的毕业生。南京师大附中是一所发展中的百年名校,培养出无数杰出人才,校友中包括巴金、袁隆平、汪道涵、彭珮云、胡风等享誉世界的文学家、科学家、政治家;另外还拥有人数位居全国普通高中前列的 52 位院士,2 位全国人大副委员长以及 5 位中国教育部副部长。

哈!到这您可能会想:只介绍学校的辉煌历史有什么用?得来点实质性的内容啊!那请您接着往下看。

韩旭,在我这种普通人看来一直是神一般的存在。也许他名气没有某些同学大,但那是因为他是一位极其实干低调的竞赛强人。哦。对了!都忘了给您介绍了,韩旭在高中三年中一共获得 3 个省一等奖,并且拥有 2 个保送资格。分别是:高一获得全国中学生信息学竞赛江苏省一等奖以及保送资格;高三获得全国中学生物理竞赛江苏省一等奖;最重要的是高三获得全国中学生数学竞赛江苏省一等奖以及保送资格。这些成绩在旁人看来有些不可思议,但是韩旭确实做到了。随后他便收到了复旦大学伸出的橄榄枝,并直接被复旦大学数学系摘走。

当然,韩旭并没有像大多数保送生那样彻底放松对自己的要求,而是深入思考了如何进一步发挥自己在数学方面的特长。当他听周围同学抱怨市面上准备自主招生考试的书籍种类少而质量并不太高时,决定结合自己高中三年数学学习的经验和教训以及自己总结归纳出的一系列数学学习的窍门和方法,来写一本突破传统的好书。

这所谓的“突破传统”是指,这本书完全是由刚刚毕业的高中学生通过反思总结自己数学学习历程来编写的。这种模式十分独特,当然也具有明显的优点。我想主要有以下三点:1. 最大的优点就是由高中生来编写高中生用的书,十分贴近学习生活实际。身为一名高中生,对整个高中生群体的想法和需求十分了解,也十分清楚一名高中生在备战自主招生考试时应如何迅速提高自己的学科解题能力和综合思维能力。

2. 高中生自己总结出的一套数学学习模式,与众不同,通过不同模块分解后呈现出来,十分清晰。并且思维习惯的相似性,决定了高中生更易于接受,从而收获更多。

3. 全书语言平实、一针见血,废话套话空话较少,且常采用与读者对话的形式,可读性强,达到提升学生学习兴趣、使学生愿意学的目的。

总而言之,我十分看好韩旭的这本书,也希望他这本辛勤劳动的结晶能使更多的学弟学妹们提升自己的数学素养,在自主招生考试中取得满意的成绩!

东南大学 信息科技与工程学院

潘学超

2010.10

目 录

前 言	1
序 言	1
一、数 列.....	1
1. 数列通项求法	1
2. 数列求和问题	18
二、三角函数	21
1. 六个三角函数	21
2. 三角函数公式	21
3. 三角函数最值问题	36
三、解析几何(1).....	44
1. 直线	44
2. 圆锥曲线	47
3. 参数方程	52
4. 极坐标	58
5. 图像对称问题	62
四、解析几何(2).....	65
1. 直线系	65
2. 二次曲线系	67
3. 过原点的两条直线	70
五、函 数	77
1. 导数	77
2. 函数的性质	78
3. 韦达定理	81
4. 根的分布问题	82
5. 反函数	84
6. 函数的变换——平移、伸缩、对称	87
7. 函数的最大值最小值问题——切比雪夫多项式	89

8. 函数的值域或最值	94
六、立体几何	99
1. 基础知识	99
2. 空间中量的计算	101
七、不等式(1)	111
1. 含绝对值的不等式	111
2. 含根号的不等式	113
3. 分式不等式	113
4. 作差法	113
5. 放缩	114
6. “暴力”	115
7. 考虑局部不等式	115
8. 通过函数单调性证明	115
9. 数学归纳	115
八、不等式(2)	127
0. 符号	127
1. 基本不等式	128
3. 基本方法	131
4. 两个要点	137
九、复数	156
1. 复数的代数表示	156
2. 三个很重要的概念	156
3. 复数相等的充要条件	157
4. 复数是不能比较大小的!	157
5. 复数的运算	158
6. 复数的模	158
7. 共轭复数	159
8. 复数的三角形式	162
9. 一个很重要的复数——三次单位根	166
10. 单位根的一个性质	167
11. 虚根成对原理	168
十、组合数计算	170
0. 什么是组合数?	170
1. 利用 $(1+x)^n$ 展开式	171

2. 直接计算	173
3. 求导(取微分)	174
4. 利用一个组合恒等式	176
5. 构造实际意义	178
十一、极 限	180
0. ∞ 记号	180
1. 函数极限	180
2. 极限的运算法则	183
3. 一个重要的极限	189
4. 级数的极限	191
十二、大杂烩	193
1. 因式分解	193
2. 行列式	196
3. 解二元、三元一次方程组	197
4. 知道顶点坐标,求三角形面积	199
5. 向量叉乘	200
6. 解析几何的一些小知识	201
7. 不定方程 $ax+by=c$	202
8. 无穷集合元素个数的比较——有理数与自然数一样多,实数比自然数多	204
9. 平方倒数和	206
答 案	208

一、数 列

数列问题是高考难题和自主招生试题都很热衷的一类问题。很多题目形式新颖,且往往和函数融合在一起,给人以很恐怖的感觉。而且答案的方法巧妙神奇,让你摸不着头脑——不是看不懂,而是不知道为什么要这样变形,要这样想……

事实上,我要说:

数列是没有难题的!

数列与函数等融合,是因为它只能用貌似恐怖的外表吓唬你……

答案的神奇巧妙,是因为有些东西你还不知道……

1. 数列通项求法

下面,我要告诉你7种且仅7种关于数列题的想法,不需要再多的方法,你一定能征服所有的数列题——或者保守一点,99%的数列题:

1. 写几项,猜通项,美其名曰归纳猜想。
2. 数学归纳法,同一法。
3. 整体换元。
4. 三角代换,取对数,取倒数。
5. 两式相减。
6. 构造递推关系。
7. 特征方程。

没错,就7种,只需要这7种,只要你熟练掌握,一定会惊讶地发现,你能一眼将数列题望到底,再也不会会有数列题难倒你了!

下面就来简单说明一下这7种想法。

1. 写几项,猜通项,即归纳猜想

意思很容易理解,但这却是做数列题最重要的一个方法,应该是拿到数列题时的第一想法,因为这是你揭示一个数列本质的最简单的办法。

事实上,归纳猜想和数学归纳法、同一法是绑定的。猜出一个通项,要去证明它是对的,当然就是数学归纳或者同一法。至于这两个如何操作,一会再说。

很多数列题,看似有一个很吓人的递推公式,但是写出它的前几项后,你会惊讶地发现,原来有那么简单的规律。比如:

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$, 求 a_n 的通项。

正如上面提到的,拿到一道题,第一反应应该就是写几项看看。我们发现,这个数列前面几项是: 1, 3, 7, 15, 31, $\dots$, 那么很自然地可以猜测, $a_n = 2^n - 1$ 。然后数学归纳即可。

(2) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$, 求 a_n 通项。

同样,简单写出前几项: 1, 3, 5, 7, 9, $\dots$, 显然能够猜测 $a_n = 2n - 1$, 后证明之即可。

例子虽然简单,但是希望你能够理解,第一步就写几项猜通项是很必要的。

当然,这种办法依赖于以下两个条件:(1) 数列方便计算。(2) 敏锐的观察力。第一条是由题目决定的,算前感觉一下如果式子太繁就别算了,想别的办法。第二条,则是基于你自己的想象力与经验,要根据数字的特点大胆想象尝试。

2. 数学归纳法与同一法

前面已经提到了,这个方法是与第一个方法绑定的,是在猜出通项或者要你证明通项的情况下使用。数学归纳法就不多说了,下面着重说说同一法。

同一法利用的是数列的唯一性。只要能通过初始值和给出的数列各项的关系,能唯一确定这个数列,那么只需要将你猜出来的公式带入验证,如果关系是成立的,则该数列的通项就是那个式子。

比如 $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$ 这个数列,很显然,由这个公式,这个数列的每一项都由前一项唯一确定,且 $a_1 = 1$ 是确定的,所以该数列是唯一的。于是,将我们猜的公式 $a_n = 2^n - 1$ 带入验证,即 $2^{n+1} - 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$ 是成立的,于是 $a_n = 2^n - 1$ 。

卷面上可以这么写:

解: 注意到该数列被 $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$ 唯一确定,

又因为 $2^{n+1} - 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$, 且 $2^1 - 1 = 1$,

所以 $a_n = 2^n - 1$ 。

同一法是一个非常重要的方法,虽然很多时候能用同一法的地方数学归纳法也可以用,但是很多时候往往数列递推关系复杂繁琐,用数学归纳法不容易,这时候利用同一法会非常简洁快速。

最后还是要强调,同一法的关键: 唯一性!

3. 整体换元

所谓整体换元,就是用一字母代替掉一个整体。这里所谓的整体,关键在于形式的相同。

这样做的好处有以下几点:

一、使式子简洁,更容易观察,易于发现变形的方向。

二、能够抓住问题的本质。

下面看 2 个例子。

$$(1) (n+1)a_{n+1} = na_n + 3$$

初看似乎无从下手,但如果做如下换元:令 $b_n = na_n$,那么上式立刻变成: $b_{n+1} = b_n + 3$,豁然开朗。解出 b_n 后进而解出 a_n 。

$$(2) a_{n+1} + 1 = a_n a_{n-1} + a_n + a_{n-1} + 1$$

简单的因式分解后,我们发现 $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)(a_{n-1} + 1)$,当然就这样做下去也行,但是如果我们做换元:令 $b_n = a_n + 1$,那上式就变成 $b_{n+1} = b_n b_{n-1}$,不但形式简洁了许多,而且更容易进一步找出问题的解法。具体怎么解这里先不提。

整体换元需要注意以下几点:

1) 一般是把关于 n 呈递推关系的东西换掉。

具体来说,比如这个数列: $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$,那么这时候令 $b_n = \frac{a_n}{n}$ 是合理的,我们得到 $b_{n+1} = b_n + 1$ 。但如果是 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n} + 1$,我们再令 $b_n = \frac{a_n}{n}$ 就不太好了,因为这样只能得到 $\frac{n}{n+2}b_{n+1} = b_n + 1$,并不是我们想要的。如果你以为换元后你得到的是 $b_{n+1} = b_n + 1$,那你就还没理解这个换元是什么意思。

2) 换元就要换彻底。

比如这道题: $2(n+1)a_{n+1} = 4na_n + 3$,当然可以只做换元:令 $b_n = na_n$ 。但如果我们做换元: $b_n = 2na_n$,会使式子更加简洁。虽然说这个不是必要的,但是换彻底往往对观察、运算等都有很大的帮助。

4. 三角代换,取对数,取倒数

这三个办法是三个对式子变形的方式。除了移项、两边加减乘除等朴素的变形外,几乎就这三个变形的办法了。

首先,三角代换,是利用式子与三角公式的吻合。事实上,这个题目可能就是从三角公式演变来的。

比如: $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}{2}}$, 求 a_n 。

初看无从下手,但如果注意到三角函数的一个性质: $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$

于是对于锐角,我们有: $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

我们会发现:

$$a_1 = \sin \theta, a_2 = \sin \frac{\theta}{2}, a_3 = \sin \frac{\theta}{4}, \dots, \text{其中 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{那么便很容易证明 } a_n = \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}.$$

其次,是取对数,即式子两边同时取对数,比如 $\ln$ 。这个办法往往用在两边都是乘积

和幂(即二次、三次方等和二次、三次根号等)的情况下。

比如: $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$, 求 a_n 。

初看似乎没啥思路,但注意到两边都是乘积和幂的形式,于是取 $\ln$ 后,就变成了:

$\ln a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln a_n + \ln 2$, 于是立刻发现可以做代换: $b_n = \ln a_n$, 式子就变成了简单的

$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \ln 2$, 下面就可以做了。

最后就是取倒数,当你注意到分子就一项,而分母是个多项式时,可以考虑取倒数。

比如: $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n - 5}$, 求 a_n 。

注意到,如果取倒数,则式子就会变成: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3a_n}$, 然后做代换: $b_n = \frac{1}{a_n}$ 后,式

子就变成了很漂亮的 $b_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} b_n$ 。

OK,先简单介绍一下这三个变形方法——事实上,就这三个方法就够了。下面,说一下这三个办法需要注意的要点:

(1) 对于三角代换,

首先要注意 a_1 的范围。当 $a_1 \in (-1, 1)$ 时——最好是 $(0, 1)$ ——我们可以做 $\sin$ 或 $\cos$ 的代换。而要换成 $\tan$ 则没多少限制,因为它的值域为 $\mathbf{R}$ 。

其次,就是设 $a_1 = \sin \theta$ 或 $\cos \theta$ 或 $\tan \theta$ 的那个 θ 的范围,要选取合适。如果 $a_1 = \sin \theta \in [0, 1]$, 往往考虑 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; 如果 $a_1 = \cos \theta \in [-1, 1]$, 可以考虑 $\theta \in [0, \pi]$ 等等。当然,具体用什么三角函数需要根据递推公式的形式来定。

(2) 关于取对数,很重要的一点就是要保证两边都是正数。好在数列题往往都是正数,这个具体做时需要简单论证一下。

(3) 至于取倒数,只要小心不等于 0 就可以了。

5. 两式相减

两式相减,就是把题目给我们的关系式写两次,一次是关于 n 的,一次是关于 $n+1$ 的,然后这两个式子相减,得到一个式子。

这是一个非常重要但往往想不到的方法。举个简单的例子:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$, 求 a_n 通项。

我们有:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = (n+1)^2$$

下式减上式,便得到 $a_{n+1} = 2n+1$, 进而得到 $a_n = 2n-1$ 。但是,要注意的是,这个通项只在 $n \geq 2$ 时成立,还需要验证 $n=1$ 的时候是否成立。

当然,这是个很“弱智”的例子,仅仅为了解释什么叫两式相减,后面会有具体的题目。

那么,为什么要两式相减,两式相减有什么好处?

事实上,有以下几点好处:

(1) 可以把相同项减掉,特别是常数项。

(2) 很多时候可以进行因式分解,进而整理化简。特别的,当有平方项的时候,可以利用平方差公式。

总之,两式相减是一个非常值得一试的办法,虽然无法肯定地说减出来能怎么怎么样,而且很多时候会减出一个“废话”(就是一个没用的式子),但仍然值得一试,不要忘记它。

6. 构造递推关系

这是一个非常非常非常常见且重要的方法。

先举一个上面出现过的简单的例子: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

我们对式子做如下变形: $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

于是,我们发现,做代换 $b_n = a_n + 1$,式子立刻变形成 $b_{n+1} = 2b_n$,豁然开朗。

稍微复杂一点: $a_{n+1} = 2a_n + n$

我们可以变形成: $a_{n+1} + n + 1 + 1 = 2(a_n + n + 1)$

做代换 $b_n = a_n + n + 1$ 即可。

你可能会觉得神奇,你可能会问第一个式子为什么能想到两边同时加 1,第二个式子为什么能想到那样配。稍后你会发现,想到这些是自然的,理所应当的,你也能做到。

7. 特征方程

有一类问题,其实是有现成的结论的,就是利用特征方程与特征根。但是高考中出现时,答案往往会用其他高中的方法绕过去,或者干脆直接给出结果,让你不知道为什么要那样变形。如果能掌握特征方程,在高考中你就能首先知道了答案,然后再考虑怎么用高中的知识绕到它,在自主招生中,更是能直接使用,快速得出结果。

这里先介绍特征方程的理论,有关例子见后面的例题。

有两类特征方程,一类是形如 $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$ 形式的递推数列,另一类是形如 $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$ 的递推数列,我们这里只关心怎么去做,不关心为什么会这样,所以我直接给出结论,具体中间推导可以查看相关竞赛书籍。

(1) 对于 $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$ 的数列,它的特征方程为 $x^2 = ax + b$,它是这样得出的:
 a_{n+2}, a_{n+1}, a_n 分别用 $x^2, x, 1$ 代替。

解之,得两根 x_1, x_2 ,

如果 $x_1 \neq x_2$, 则 $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ 。

如果 $x_1 = x_2 = x$, 则 $a_n = (An + B)x$ 。

其中两个待定常数 A, B 由初始值 a_1, a_2 定出。

第一种情况很重要也很容易记。

第二种情况虽然也可以记公式, 但是在具体的题目中, 当遇到等根时, 你会发现此时这个式子是很容易构造递推关系的。

另外, 我没有说特征方程要有两个实数根。没错, 对于虚数根, 结论依旧! 但是, 没有必要再用这个结论。因为虚数根是在告诉你, 这个数列肯定有周期!

比如: $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, a_1 = 1, a_2 = 2$ 。注意到特征方程 $x^2 = x - 1$ 无实数根, 所以它肯定有周期: $1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, \dots$, 周期为 6。

至于为什么有周期, 利用复数的知识很好解释, 这里就不多说了。

(2) 对于 $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$ 的数列, 它的特征方程为 $x = \frac{ax + b}{cx + d}$, 它是这样得出的:
 a_{n+1}, a_n 均用 x 代替。

解之, 得两根 x_1, x_2 。

若 $x_1 \neq x_2$, 则你算一下 $\frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2}$, 即

$$\frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2} = \frac{\frac{aa_n + b}{ca_n + d} - x_1}{\frac{aa_n + b}{ca_n + d} - x_2}$$

一定能整理成 $\frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2} = k \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}$ 的形式,

于是做代换 $b_n = \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}$ 即可, 变成等比数列。

若 $x_1 = x_2 = x$, 则你做如下操作: 两边同时减去 x , 再取倒数, 即

$$\frac{1}{a_{n+1} - x} = \frac{1}{\frac{aa_n + b}{ca_n + d} - x}$$

一定能够变形为 $\frac{1}{a_{n+1} - x} = k + \frac{1}{a_n - x}$ 的形式, 于是做代换 $b_n = \frac{1}{a_n - x}$ 即可, 变成等差数列。

同样, 如果无实数解, 你要相信, 一定有周期。

事实上, 对于 $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$ 的数列, 同样有特征方程 $x = \frac{ax + b}{cx + d}$, 剩下的操作和上面一模一样。

值得一提的是,这里的 a, b, c, d 可以为 0 所以有些题目初看不像上面的形式,实际上只是有些系数为 0 罢了。

所以,可以概括:形如上面两式的数列,

第一步:特征方程求出特征根。

第二步:若是不等根,分别用 a_{n+1} 相减再相比;若是等根,用 a_{n+1} 相减再取倒数。

第三步:化简整理,形成等比或等差,整体代换。

OK,以上对这七种想法做了简单的介绍。遇到数列题的时候,你要做的就是脑子里一条一条地闪过这些想法,尝试,排除……肯定会在某个时候遇到正确的办法!当然,经过一定的训练,你能达到一看到题目,就反应出该用什么办法的程度。

下面,来看一些具体的题目。

【例 1】 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$, 求 a_n 。

【分析】 这是上文提到的例子,对于这种递推类型的题目,我们的想法就是构造出能换元的东西。就是说,我们希望把式子 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 变成:

$$a_{n+1} + \lambda = 2(a_n + \lambda)$$

其中 λ 为待定系数。下面,我们通过对比两个等式的系数,得到

$$2\lambda - \lambda = 1 \text{ (对比常数项)}$$

解得 $\lambda = 1$

所以,我们就能够把式子变成 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 进而就能解答了。

【解】 由 $a_{n+1} = 2a_n + 1$

得 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

令 $b_n = a_n + 1$

则 $b_{n+1} = 2b_n, b_1 = 2$

得 $b_n = 2^n$

进而得 $a_n = 2^n - 1$

【点评】 对于形如 $a_{n+1} = aa_n + b$ 的数列,考虑变形为 $a_{n+1} + \lambda = a(a_n + \lambda)$, 即配上一个常数 λ 。稍复杂一点的,见下题。

【例 2】 已知 $a_1 = -2, a_2 = -1, a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} - 4$, 求 a_n 。

【分析】 与上一题似乎类似,但这里有 3 项,于是我们考虑配成:

$$a_{n+1} + \lambda = 5(a_n + \lambda) - 6(a_{n-1} + \lambda) \quad (1)$$

事实上,我们考虑配成这样是出于这样的考虑:

我们把形如 $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n \quad (2)$