主编：杨德胜
编著：张千明

赢在思维

高中数学

拉分题

解题思想与方法

150例+500题

讲解篇

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

高中数学拉分题

解题思想与方法（150例+500题）

讲解篇

主编：杨德胜　编著：张千明

编委会
汪昌辉　潘　瑾　侯宝坤
朱伟卫　叶莎莎　张千明

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

赢在思维. 高中数学拉分题解题思想与方法. 讲解篇 / 杨德胜主编；张千明编著. —上海：华东理工大学出版社，2015. 10

ISBN 978-7-5628-4380-1

Ⅰ.①赢… Ⅱ.①杨… ②张… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 216146 号

赢在思维

高中数学拉分题解题思想与方法(150 例+500 题)(讲解篇)

主　　编 / 杨德胜
编　　著 / 张千明
策划编辑 / 郭　艳
责任编辑 / 陈月姣
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 视界创意
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　　话：(021)64250306(营销部)
(021)64252735(编辑室)
传　　真：(021)64252707
网　　址：press. ecust. edu. cn
印　　刷 / 江苏省句容市排印厂
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 15. 75
字　　数 / 382 千字
版　　次 / 2015 年 10 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 10 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4380-1
定　　价 / 45. 00 元

联系我们：电子邮箱 press@ecust. edu. cn
官方微博 e. weibo. com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgxebs. tmall. com

前　言

在高中数学中，有许多最基本的知识单元，它是我们进一步学习和研究的基础，姑且我们称之为“元知识”. 由这些“元知识”构建了高中数学的知识框架，从这些“元知识”的形成过程中，体现了数学的思想方法和数学的能力要求，如绝对值问题，在初中我们学习：$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0,\end{cases}$这体现了数学中的分类讨论的思想，这是绝对值“元知识”的代数思维. 同时，从一维角度看，$|a|$又表示数轴上到原点的距离；从二维角度看，它表示由第一、第二象限的角平分线构成的图形，这又体现了数学中数形结合的思想，这两种思想贯穿在整个高中数学学习之中，是学习高中数学必须具备的能力. 又如高中数学去掉章节知识神秘的外衣后，都转化为“等式”和“不等式”两类问题，而这两类问题主要研究的：一是解方程（或不等式）问题；二是方程（或不等式）有解问题；三是方程（或不等式）恒成立问题.

题海固然对应试有一定的帮助，但要真正学好高中数学，在高考中取得高分，随着高考命题的改革，而题海是不可能实现的. 如何以不变应万变？双基的学习是最根本的途径. 高中数学的学习，除了良好的学习习惯，如掌握文字语言、图像语言与数学语言的相互转化，学会自学、整理和概括、质疑，主动参与合作，自主反思、及时订正等，还要具有学习数学的基本素养，如化简、解方程、字母代值、消元思想、函数与方程思想等，前面两点是学好高中数学的基础，也是进一步学好数学的必要保证.

高考数学命题特别强调对数学知识的通性、通法的考查，不恶意地命制一些偏题、怪题，甚至命制一些技巧性很强的试题或者将高等数学知识直接进行“拿来主义”. 高考试题的命制原则是：知识和方法来源于教材，又高于教材，注重数学知识的通性、通法的考查. 但我们学生对“高中数学知识的通性、通法到底是什么？”了解甚少，只能跟着感觉走. 本书就是想通过探讨如何从数学的基本“元知识”的学习，来探究数学知识的通性通法，构建数学学习所具备的必要知识、思维、方法、易错点分析等策略，跳出题海所带来的思维禁锢，使高中数学学习成为培养学生的基本数学素养，为今后有兴趣继续学习数学，提供必要的学习手段、方法.

目 录

1 高中数学学习应具备的几个基本素养

编者引言

高中数学知识主要研究:数与运算、方程与代数、函数与分析、图形与几何、数据整理与概率统计等基础知识.学习中注重培养五种能力(逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力、分析问题和解决问题能力、实践和创新能力)的养成,并且以逻辑思维能力为核心.在高考试卷中也非常注重数学的通性、通法的考查,淡化特殊技巧,较好地体现了以知识为载体,以方法为依托,以能力为考查目的的命题指向.全卷没有直接考查纯记忆的陈述性知识,而是注重考查在陈述性知识的基础上的程序性知识,比如数学知识间的相互联系、数学思维方法等.高考试卷既涉及观察法、消元法、比较法、排除法、反证法、归纳法、割补法等具体方法,也涉及主要数学思想,如函数和方程思想、分类与整合思想、数形结合思想、转化和化归思想、有限与无限思想、或然与必然思想、特殊与一般思想等.

根据高中数学学习与考查的知识要求和能力要求,对于高中数学学习的学生必须具备高中数学学习的几个基本的素养:

(1)解方程(不等式)的方法

移项,右边为0,左边因式分解.

(2)化简的一般方法

① 整式——尽可能减少变量,再化简;

② 分式——分子、分母因式分解,约分;

③ 根式——被开方式化为完全平方式;

④ 等式(不等式)——(ⅰ)移项,右边为0;(ⅱ)左边因式分解或配方或降次排列.

(3)消元的一般方法

①加减消元法;②代入消元法;③平方消元法;④乘(商)消元法;⑤不等式消元法.

(4)字母代值(控制变量)

(5)文字语言与数学语言的转化

(6)函数与方程思想

研究方程、不等式时,不要忘掉利用函数思想.

经典拉分题 思维点评

题 1 已知无穷数列$\{a_n\}$具有如下性质:①a_1为正整数;②对于任意的正整数n,当a_n为偶数时,$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$;当a_n为奇数时,$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{2}$.在数列$\{a_n\}$中,若当$n\geqslant k$时,$a_n=1$,当$1\leqslant n<k$时,$a_n>1$($k\geqslant 2$,$k\in \mathbf{N}^+$),则首项a_1可取数值的个数为________(用k表示).

分析 这个数列题咋一读，有点丈二和尚摸不着脑袋. 数列问题，我们可以通过字母 n 代值，来研究其数量关系.

由题意知，当 a_n 为偶数时，$a_n=2a_{n+1}$；当 a_n 为奇数时，$a_n=2a_{n+1}-1$.

若 $k=2$，则当 $n\geqslant k$ 时，$a_n=1$，$\therefore a_1=2a_2=2$ 或 $a_1=2a_2-1=1$(舍)，首项 a_1 取 1 个值；

若 $k=3$，则当 $n\geqslant k$ 时，$a_n=1$，$\therefore a_2=2a_3=2$ 或 $a_2=2a_3-1=1$(舍)，

$\therefore a_1=2a_2=4$ 或 $a_1=2a_2-1=3$，首项 a_1 取 2 个值；

若 $k=4$，则当 $n\geqslant k$ 时，$a_n=1$，$\therefore a_3=2a_4=2$ 或 $a_3=2a_4-1=1$(舍)，

$\therefore a_2=2a_3=4$ 或 $a_2=2a_3-1=3$，

$\therefore a_1=2a_2=8$ 或 6；$a_1=2a_2-1=7$ 或 5，首项 a_1 取 2^2 个值；

以此类推，首项 a_1 可取数值的个数为 2^{k-2}.

满分解答 2^{k-2}.

思维点评

教材的编排体系是：第一节，是通过数列的前几项，写出数列的一个通项公式，这一节要求学生具备对数的敏感力和归纳、猜想能力，而《数列》最后一节，是归纳、猜想、论证. 本节的中间章节是等差数列与等比数列，它们是两种特殊的数列，是学习数列的一个载体. 纵观整个《数列》章节，我们不难看出，字母代值，发现规律，是学习数学的一个基本素养.

题 2 **设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若 $f(0)=\frac{1}{8}$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，满足 $f(x+2)-f(x)\leqslant 3^x$，$f(x+4)-f(x)\geqslant 10\times 3^x$，求 $f(2020)$ 的值.**

分析 求 $f(2020)$ 的函数值时，一种方法是：由周期性解题；一种方法是：求出函数的解析式. 而此题通过代值，不可能由周期性解题，故只能选择求函数的解析式.

满分解答 $\because f(x+2)-f(x)\leqslant 3^x$，$\therefore f(x+4)-f(x+2)\leqslant 3^{x+2}$. ①

又 $f(x+4)-f(x)\geqslant 10\times 3^x$，$\therefore f(x)-f(x+4)\leqslant -10\times 3^x$. ②

式①+式②，得 $f(x)-f(x+2)\leqslant -3^x$，即 $f(x+2)-f(x)\geqslant 3^x$，

$\therefore f(x+2)-f(x)=3^x$.

$$\begin{aligned}\therefore f(2020)&=[f(2020)-f(2018)]+[f(2018)-f(2016)]+\cdots\\&\quad+[f(2)-f(0)]+f(0)\\&=3^{2018}+3^{2016}+\cdots+3^0+\frac{1}{8}=\frac{3^{2020}}{8}\end{aligned}$$

思维点评

不等式只能求一个范围，而由等式才可以求出一个具体值，利用不等式 $x\geqslant a$，$x\leqslant a$，可以得到 $x=a$. 故要再构造一个不等式 $f(x+2)-f(x)\geqslant 3^x$ 是解题的关键，这就要求我们在学习数学时，要把不等式、方程、函数有效地结合在一起思考，这就是数学中的函数与方程思想，它渗透在数学的每一个角落.

题 3

已知抛物线 C：$y^2=4x$，过 $M(2,0)$ 的直线交抛物线 C 于 A、B 两点. 若点 P 是抛物线上 A、B 之间一点，当点 P 到直线 AB 的距离最大时，求 $\triangle ABP$ 面积的最小值.

分析

若设 $P(x_1,y_1)$，则变量太多，为了减少变量可设 $P\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$. 由求三角形面积的方法，若选择行列式，则变量太多；若选择 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C$，则无已知角；若选择割补法，则三角形的底或高应尽量为常数，这不可能. 故选择 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}$底$\times$高最好. 由弦长公式可求得 $|AB|$ 长，且只含有一个变量 m，若用点 P 到直线 AB 的距离公式求三角形的高，则含有两个变量 m 和 y_1，这时所得到的 $\triangle ABP$ 面积也一定含有两个变量，给求三角形面积的最值带来一定的困难. 若把点到直线距离的最值转化为两平行线间的距离的最值，这时变量只有一个 m，这样给求最值问题带来便利.

满分解答

设直线 AB：$x=my+2$，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+2\end{cases}$ 得，$y^2-4my-8=0$，

$\Delta=16m^2+32=16(m^2+2)$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$.

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16(m^2+2)}=4\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)}$.

设直线 l：$x=my+t$，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+t\end{cases}$ 得，$y^2-4my-4t=0$.

由 $\Delta=16m^2+16t=0$ 得，$t=-m^2$，$\therefore d=\dfrac{|2-t|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{2+m^2}{\sqrt{1+m^2}}$.

$$\therefore \triangle ABP\text{ 面积 } S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)}\times\frac{2+m^2}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$=2(m^2+2)\sqrt{m^2+2}\geqslant 4\sqrt{2}.$$

当且仅当 $m=0$ 时，等号成立，故 $\triangle ABP$ 面积的最小值为 $4\sqrt{2}$.

思维点评

数学学习中的问题解决，经常会出现多个变量，而高中数学中的函数思想只能出现一个自变量，所以控制变量，是高中数学学习的又一个基本学习素养. 除此之外，只能用重要不等式或数形结合来解决多变量问题.

优质精练

1 若 $x+2y=1$，则 xy 的最大值是________.

2 三个实数成等差数列，首项是 9. 若将第二项加 2、第三项加 20 可使得这三个数依次构成等比数列 $\{a_n\}$，则 a_3 的所有取值中的最小值是________.

3 化简：$\sqrt{1-\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta}\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$得________.

4 若关于 x 的方程 $x^2-ax-a-1=0$ 在 $x\in[1,2]$上有解，则实数 a 的取值范围是________.

5 若点 $P(x,\ y)$在曲线$\begin{cases}x=-2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)上，则$\frac{y}{x}$的取值范围是________.

6 设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N，那么$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$是 $M=N$ 的(　　)

A. 充分非必要条件　　　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既非充分又非必要条件

7 设函数 $f(x)$的定义域为 D，若对于任意的 $x_1\in D$，存在唯一的 $x_2\in D$，使$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=C$($C$ 为常数)成立，则称函数 $f(x)$在 D 上的均值为 C.

现给出下列四个函数：① $y=x^2$；② $y=x$；③ $y=2^x$；④ $y=\lg x$，则满足其在定义域上均值为 2 的所有函数的序号是________.

8 等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立时，角 α、β 满足的充要条件是________.

9 已知实数 $a>0$，函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+a\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的最小值；

(2)当 $a=1$ 时，判断 $f(x)$的单调性，并说明理由；

(3)求实数 a 的范围，使得对于区间$\left[-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$上的任意三个实数 r、s、t，都存在以 $f(r)$、$f(s)$、$f(t)$为边长的三角形.

2 集合知识与学习方法

编者引言

具有一定的性质的对象组成的一个整体，就叫做集合. 其中具有一定的性质的一个对象，叫做这个集合的一个元素. 根据集合的定义，要理解和掌握一个集合，就必须读懂和理解集合的元素和这个集合本身，并理解其相互关系. 集合中的元素出现最多的是数集和点集，如果集合是用描述法时，就必须看一竖杠“|”前是一个字母，还是两个字母. 若“1”前是一个字母表示这个集合是数集，那就要研究这个字母的取值范围；若“1”前是两个字母表示这个集合是点集，那就要研究点集表示的图形.

集合主要考查以下几个方面：

(1)集合的表示——列举法、描述法、区间法、图式法、特殊字母法；

(2)集合的运算——交、并、补($\complement_U A$ 意为“不包括 A”；“且”意为“$\cap$”；“或”意为“$\cup$”)；

(3)集合的元素——点集、数集、方程集、向量集等；

(4)数集的元素——定义域、值域；

(5)特殊集合——空集$\varnothing$、全集或本身集.

经典拉分题 思维点评

题 1 **(集合的表示)(1)用描述法表示下列集合：①被 3 除余 2 的全体整数________；②直角坐标系内第四象限的点的集合________；③角的终边落在直线 $y+x=0$ 上的角的集合________.**

(2)说出下列三个集合的区别：$A=\{x\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

分析 用描述法表示集合时，“|”前表示集合的元素，“|”后表示集合元素满足的条件. 读集合时，要看清“|”前的元素. 通常情况下，“|”前是一个字母时，则集合表示数集，此时要求这个字母的范围；“|”前是(x,y)时，则集合表示点集，此时研究此点构成的图形.

满分解答 (1)①$\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{x-2}{3}\in\mathbf{Z}\right\}$；②$\{(x,y)\mid x>0,y<0\}$；③$\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)集合 A 是数集，元素是 x，x 的取值范围是全体实数，所以 $A=\mathbf{R}$；集合 B 是数集，元素是 y，满足等式 $y=x^2+1$，$x\in\mathbf{R}$ 的 y 的取值范围是$[1,+\infty)$，所以 $B=[1,+\infty)$；集合 C 是点集，是方程 $y=x^2+1$，$x\in\mathbf{R}$ 上的点构成的集合，它与集合$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\geqslant 1\}$是两个不同的集合.

思维点评

集合中的元素是集合的本质特征，研究集合就是要研究集合中的元素. 根据集合中的元素描述的对象属性不同，可以把集合分为：数集、点集、图形集、向量集、方程集等. 数集反映集合中元素表示数的属性，其表现形式就是元素“数”的取值范围；点集的表现形式就是元素“点”构成的图形，如$\{x+3y-1=0\}$就是一个方程集合，且只有一个元素，是用列举法表示的集合；又如$\{$直线 $AB\}\cap\{$线段 $AB\}=\varnothing$，而不是$\{$线段 $AB\}$，因为这两个集合是图形集，直线 AB 与线段 AB 是两个不同的图形. 若改为：$\{x\mid x\in$ 直线 $AB\}\cap\{x\mid x\in$ 线段 $AB\}$，则结果就为$\{x\mid x\in$ 线段 $AB\}$，这是因为它们都是点集.

题 2

(集合相等、运算)(1)若$\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}=[-1,2]$，则 $a=$________，$b=$________；

(2)若$\{x\mid 2x^2+x+m=0\}\cap\{y\mid 2y^2+ny+2=0\}=\{-1\}$，则 $m=$________，$n=$________；

(3)若全集$U=\{3,-3,a^2+2a-3\}$，$A=\{a+1,3\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 $a=$________.

分析

数集的元素满足的条件是不等式时，集合即为此不等式的解集；数集的元素满足的条件是等式时，集合即为此等式的解集.

(1)$x^2+ax+b\leqslant 0$ 的解集为$[-1,2]$，所以$-1,2$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根，由韦达定理得，$a=-1$，$b=-2$；

(2)由题意知，$-1\in\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$，$-1\in\{y\mid 2y^2+ny+2=0\}$，解得，$m=-1$，$n=4$；

(3)由题意知，$\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\ a+1=-3,\end{cases}$解得 $a=-4$.

满分解答

(1)-1，-2；(2)-1，4；(3)4.

思维点评

“不等式解集的端点是此对应方程的根”是研究不等式与对应方程的一个重要纽带；$m\in A\cap B\Leftrightarrow m\in A$ 且 $m\in B$ 与 $A\cap B=\{m\}$不等价，若用 $m\in A$ 且 $m\in B$，还需要再计算集合 A、B，有时可能会扩大范围.

题 3

(集合的运算)已知 $A=\{-1,|1-a|\}$，$B=\{a-1,2\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $A\cup B=\{-1,2,a^2-3a+2\}$，求实数 a 的值.

分析　$A\cap B=\varnothing$ 即集合 A、B 不存在共同元素；$A\cap B\supsetneqq\varnothing\Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$；$A\cup B=\{-1,2,a^2-3a+2\}$ 意味着 $|a-1|=a-1=a^2-3a+2$，且满足集合中的元素具有：无序性、互异性、确定性.

满分解答　(1)由题意知，$\begin{cases}|1-a|\neq a-1,\\-1\neq 2\end{cases}$ 且 $\begin{cases}|1-a|\neq 2,\\a-1\neq -1,\end{cases}$ 解得 $a<1$ 且 $a\neq 0$ 且 $a\neq -1$；

(2)$A\cap B\supsetneqq\varnothing\Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$，即为(1)所求实数 a 的取值集合的补集，所以实数 a 的取值范围是 $a\geqslant 1$ 且 $a\neq 3$ 或 $a=0$ 或 $a=-1$；

(3)由题意知，$\begin{cases}a^2-3a+2=a-1=|a-1|,\\a^2-3a+2\neq -1,\\a^2-3a+2\neq 2,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

思维点评

集合的运算只有交、并、补三种. 集合 A 与 B 的关系可以转化为集合 A 与 B 的交、并、补的运算. 如 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$ 等；交集符号“$\cap$”表示的意思是“且”，而文字“且”符号化后，不能为“一”，也不能为“二”，也不能为“三”，只能简化为“$\cap$”. 要学好数学，文字语言与数学符号语言的转化，是不可或缺的基本数学素养. 又如用集合 A、B、C 表示图 2－1 中的阴影部分. 可用汉字叙述为：不是集合 A 中的元素，是集合 B 中的元素，不是集合 C 的元素，三句话是“且”的关系，则用集合符号语言表示即为：$(\complement_U A)\cap B\cap(\complement_U C)$.

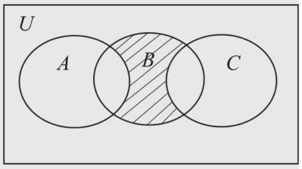

图 2－1

题 4　**(集合的综合)记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ 的定义域为 B. (1)求 A；(2)若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的取值范围.**

分析　解不等式 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$ 时，分子可以等于 0，而分母不能为 0；带有字母的不等式求解时，要对字母进行讨论，同时还要注意题目本身所隐含的特定条件.

满分解答　(1)由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$ 得，$A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2)由题意得，$(x-a-1)(2a-x)>0$，即 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

若 $a<1$，则 $B=(2a,a+1)$；

若 $a=1$，则 $B=\varnothing$，不符合题意；

若 $a>1$，则 $B=(a+1,2a)$.

又 $B\subsetneqq A$，∴① $\begin{cases}a<1,\\a+1\leqslant -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<1,\\2a>1,\end{cases}$ 解得 $a\in(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$；

② $\begin{cases}a>1,\\a+1\geqslant 1.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1,\\2a\leqslant -1,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

综上，实数 a 的取值范围 $(-\infty,-2]\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

思维点评

研究集合时，除了研究集合的概念、运算、性质外，还要注意集合中常见的错误，如：集合区间的端点的开闭，集合的元素，集合是交集还是并集；当 $A\subseteq B$ 时，A 可以是 $\varnothing$，B 可以是全集；当 $a>b$ 或 $a<b$ 时，不要忘掉 $a=b$ 等.

优质精练

1 若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$M=\{2,3\}$，$N=\{1,4\}$，则集合 $\{5,6\}$ 等于(　　).

A. $M\cup N$　　B. $M\cap N$　　C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$

2 若集合 $M=\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}$，$N=\{x\,|\,x^2-3x\leqslant 0\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}} M)\cap N=$________.

3 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数，且 $x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数，且 $y=x\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为________.

4 已知 $U=\{y\,|\,y=\log_2 x,x>1\}$，$P=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x},x>2\right\}$，则 $\complement_U P=$________.

5 设全集 $U=M\cup N=\{1,2,3,4,5\}$，$M\cap\complement_U N=\{2,4\}$，则 $N=$________.

6 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$________.

7 若集合 $A=\{x\,|\,x^2-4x\geqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|\geqslant 2\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}} A)\cap B=$________.

8 图 2－2 中阴影部分，用集合表示为________.

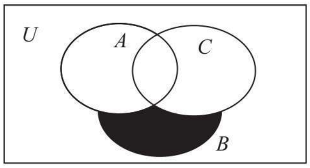

图 2－2

9 已知集合 $M=\{y\,|\,y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\,|\,y=\log_2 x,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$________.

10 非空集合 $\{x\,|\,x^2+2x+a=0\}$ 中所有元素的和等于________.

11 已知集合 $M=\{(x,y)\,|\,y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\,|\,y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 的真子集有________个.

12 若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$. 有且仅有一个是正确的，试写出符合条件的所有有序数组 (a,b,c,d).

3 充分、必要条件的一般方法

编者引言

如果 $p \Rightarrow q$，那么 p 是 q 的充分条件，同时 q 是 p 的必要条件；如果 $p \Leftrightarrow q$，那么 p 是 q 的充要条件，同时 q 也是 p 的充要条件. 另外也可以根据子集与推出关系，判断充分、必要条件，即设 $A=\{a \mid a$ 具有性质 $\alpha\}$，$B=\{b \mid b$ 具有性质 $\beta\}$，则“$A \subseteq B$”与“$\alpha \Rightarrow \beta$”等价；“$A \subsetneqq B$”与“α 是 β 的充分非必要条件”等价；“$A \supsetneqq B$”与“α 是 β 的必要非充分条件”等价；“$A=B$”与“α 是 β 的充要条件”等价.

简言之：(1)小是大的充分非必要条件；

(2)大是小的必要非充分条件；

(3)A 是 A 的充要条件；

(4)A 与 B 大小关系不能确定，则 A 是 B 的既非充分又非必要条件.

经典拉分题 思维点评

题 1 对于函数 $y=f(x)$，$x \in \mathbf{R}$，“$y=|f(x)|$ 的图像不关于 y 轴对称”是“$y=f(x)$ 不是奇函数”的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

分析 命题的条件和结论都是否定形式，可以根据互为逆否命题的等价性来判断.

若 $y=f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，所以 $|f(-x)|=|-f(x)|$，即 $y=|f(x)|$ 为偶函数，即 $y=|f(x)|$ 的图像关于 y 轴对称. 而 $y=|f(x)|$ 的图像关于 y 轴对称，即 $|f(-x)|=|f(x)|$，$\therefore f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$. 由互为逆否命题的等价性，故选 A.

满分解答 A.

思维点评

命题的四种形式中，原命题与逆否命题、逆命题与否命题是互为逆否命题，它们具有等价性. 研究一个命题的性质，我们可以通过其逆否命题的性质来研究，既可以研究一个命题的真假，也可以研究一个命题的条件.

题 2 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $f(x)>g(x)(x\in\mathbf{R})$ 成立的充要条件是（　　）.

A. 有一个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)>g(x)$

B. $\mathbf{R}$ 中不存在 x，使得 $f(x)\leqslant g(x)$

C. 对 $\mathbf{R}$ 中的任意 x，使得 $f(x)>g(x)+1$

D. 有无数多个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)>g(x)$

分析 $f(x)>g(x)(x\in\mathbf{R})$ 的意思是：对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)>g(x)$ 都成立. $f(x)>g(x)$ 的否定是 $f(x)\leqslant g(x)$.

满分解答 B.

思维点评

"文字语言"与"数学符号语言"的转化，是高中数学学习必备的基本素养. 充要条件即为等价问题. 一方面，互为逆否命题是等价命题；另一方面双重否定即为肯定. 同时还要注意代数与几何两个方面对数学基本概念的理解. 又如函数 $f(x)$ 的零点，一种是从代数方面理解，即函数 $y=f(x)$ 对应的方程 $f(x)=0$ 的根；另一种是从几何方面理解，即函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标. 在教学中，教师和学生要始终把握这两个方面进行教学与思考，才能灵活应用零点概念解决问题.

题 3 若实数 a,b 满足 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$，且 $ab=0$，则称 a 与 b 互补，记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$，那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补的（　　）

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

分析 概念："a 与 b 互补"是解题的关键. "a 与 b 互补"是"$a\geqslant 0,b\geqslant 0$，且 $ab=0$"的充要条件.

若实数 a,b 满足 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$，且 $ab=0$，则 a 与 b 至少有一个为 0，不妨设 $b=0$，则 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2}-a=a-a=0$；反之，若 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b=0$，$\sqrt{a^2+b^2}=a+b\geqslant 0$，两边平方得 $a^2+b^2=a^2+b^2+2ab\Leftrightarrow ab=0$，则 a 与 b 互补，故选 C.

满分解答 C.

思维点评

定义都是具有充要条件的特征，否则不能叫做定义，最多只是定理、性质或一般的命题. 另外，在应用等式（或不等式）性质时，要注意其性质的条件.