翻天性数学物理论文

（连续性数学理论的建立方法及其应用）

曹俊云著

二零零五年三月

需要研究的问题与目录

1 需要研究的问题

1. $0.\dot{3}$能不能等于$1/3$？$\sqrt{2}-2/3$等于什么？$e^{\sqrt{2}}$等于什么？

2. 无限有没有终了？无穷大是变数还是定数？

3. 点有没有大小？打靶时击中靶心的概率是多大？物体按照瞬时速度运动的时段是多长？

4. 欧氏几何与非欧几何的应用场合有什么不同？

5. δ-函数要不要有函数值？

6. 数学的基础到底是什么？

7. 数轴是怎样构成的？实数集的基数到底是什么？

8. 两个实数α,β之间，$\alpha=\beta,\alpha<\beta,\alpha>\beta$三种关系中，是不是“有且只有一个”成立？Brouwer 反例如何解释？

9. 在 Weierstrass 定理的证明中排中律能不能应用？

10. 选择公理的争论如何解决？Banach Tarski 分球奇论如何解释？

11. $\frac{1}{|t|}$的傅立叶积分变换究竟是什么？

12. 电学理论中发散积分如何消除？

13. 在运动中时钟是不是会变慢？

2 目录

翻天数学物理论文集简介

时段、线段的长度是连续性现实数量；实数理论（或称连续统理论）、几何学和微积分学都是研究连续性现实数量的科学。关于连续性数学理论和它的应用，我写了十篇论文。其篇名如下：1 无限的概念与数学基础，2 实数与实数集概念的一些补充，3 初等几何学的实践性公理体系，4 连续、函数、导数、微分概念的进一步研究，5 圆的周长与圆的概念问题，6 概率论中根本问题，7 数学物理方程中的问题，8 全能近似傅立叶积分变换及其应用，9 库仑定律与电学理论中一个发散积分，10 不变性光速的定义及其应用。由于我的这十篇论文与现行数学、物理理论之间存在着根本观点上的不同，很难得到数学界的承认，所以我称它们为翻天性论文。根据 43 年的初步交流，我与数学界有以下几个不同的认识。

第一点不同的认识是：我提出了连续性现实数量的两种相互依赖的研究方法。我认为：在连续性现实数量的研究中，首先应当知道的是：在这种数量绝对准大小（或称真值）的测定问题上，没有绝对准确的方法。以线段长度的测定为例，在测定长度之前，需要选定一个不随气候变化而改变其长度的度量标准（市尺或公尺），但这是很难办到的；其次，在绝对准确的测量过程中需要用没有大小的点去标示尺的端点的位置，但“没有大小的点”无法被标示出来的；这时必需用有大小的“近似点”去标示端点的位置。所以我们说：绝对准确地度量连续性现实数量大小的测定方法是没有的。人们使用的度量方法必须是：在一定容许误差界之下的近似度量方法。在连续性现实数量问题研究中应当知道的第二个问题是：我们常常需要使用现行的数学理论。例如：要知道两个线段的总长度，就需要在量出每个线段的长度之后，应用算术运算计算出它们的“和”；当每个线段的度量结果都是 1 的情况下，就可以根据算式$1+1=2$，说这个总长度是 2。再如：要知道等边直角三角形的斜边长，可以通过度量两个直角边之后使用几何理论计算出斜边长；当两个直角边长的度量结果都是 1 的情况下，根据勾股弦定理可以得出斜边长为$\sqrt{2}$。应当知道的第三个问题是：由于我们不能保证使用数学理论计算的原始数据没有误差，所以对于所研究的现实数量，这些计算结果也不能说是那个现实数量大小的绝对准确表达。因此，严格的讲，我们还必须根据原始数据的误差界，找出计算结果的可能误差的界限。这个工作就是误差分析的工作。从上述讨论应当知道：第一，连续性现实数量的根本研究方法是近似方法；第二，使用近似方法时常常需要进行误差分析，误差分析的工作比较麻烦；第三，如果计算的原始数据没有误差，那么就不需要进行误差分析；不考虑误差的研究方法是简单的，但这种想法只是一种理想；因此，我们称这种研究方法是理想的研究方法。不考虑误差的算术、几何、微积分学中使用的是理想的研究方法，所以我称它们为理想的数学理论。

上述两种研究方法之间还具有相互依赖的性质。事实上，当我们要表达某一线段的绝对长度（即真值）时，由于我们没有“绝对准确的度量方法”，我们必须使用近似研究方法，这说明理想研究方法依赖于近似研究方法；另一方面，在近似研究方法中，当我们说到某一线段的近似长度是某个数字时，这个数字又必须被看作是“能绝对准表达线段长度的”数字，这说明近似研究方法依赖于理想研究方法。连续性现实数量的上述两种研究方法的优缺点和它们的性质，是我们建立数学理论和解决应用问题时必须正确对待的问题。这个文集中讨论的问题很多，但上述事实和观点是我们尊重和依据的事实和观点。

第二个不同的观点是：什么是数学的问题。当代数学界有一个认识是：数学是形式方法的科学。我认为：这种说法有片面性。第一，数学理论的研究目的最终是在生产实际问题上的应用；就初等几何学来讲，在应用于某个问题之前，必须解释一下在这个问题上点、线、面是什么和哪一种几何公理体系应当使用的说明；第二，现在数学界在数学分析这个学科上还没有统一起来：搞数理逻辑的学者们推出了违反海涅定理的怪定理，但搞数学分

析的学者却不理它；数理逻辑学家写出了“非标准分析”但搞数学分析的人也不理它。

第三个不同的观点是：数学的基础问题。现在数学基础的研究者大都认为：数理逻辑是数学的基础；集合论是数学的基础。但是，正如莫绍揆先生所说：“迄今各家各派的集合论，凡是能推出数学的都不能证明其不矛盾性，凡是能证明其不矛盾的，都不能推出数学”。为了解决数学理论的“无矛盾性”和“排中律”问题，希尔伯特提出了“以实无限为理想元素的、有穷观点的、形式化解决方案”，但是歌德尔不完全定理说明：这个方案的目的不能达到。在对“无矛盾性”、“排中律”、“第五公设”、“$\delta-$函数”等许多问题研究之后，我认为：解决这些问题的根本方法是“以实践为基础的对连续性现实数量的近似研究方法”，所以我提出：数学理论的真正基础第一是实践，第二是对立统一法则。

第四个不同的地方是：对数学理论中的点、线、面、实数、函数、导数、积分等基本数学术语，我都提出了三类不同的术语。首先在有些自然数的开方开不尽、除法运算除不尽、连续性现实数量的测不准的事实下，我提出了针对确定误差界的近似点、线、面、实数、函数、导数、积分；然后在假定“误差界可以任意小”的情况下，我提出了针对误差界序列$\{\varepsilon_n\}$的全能近似点、线、面、实数、函数、导数、积分；最后，在取极限的情况下，我又提出了理想点、线、面、实数、函数、导数、积分。理想数学元素具有理想性的一面，例如讨论到线段是点的集合时，我们说：能构成线段的点是近似点而不是理想点；但理想数学元素通过它的全能近似数学元素也具有现实性的一面，例如讨论理想实数之间的算术运算时，我们定义它是它们的全能近似数学元素运算的极限，这个运算又可以在近似意义之下应用于实际问题。不讲误差的数学理论（包括算式$1+1=2$的古典算术运算，古典的欧几里得几何与微积分学等）我称它为理想的数学理论，这个理论中的理想元素没有误差，因此说起来比较简单；但是，使用形式化的纯逻辑方法无法建立这种理论的完备性、无矛盾性体系；这种理论应当是误差界趋向于0时的近似研究状况的极限。这种理论还必须在近似方法下被应用于连续性现实数量问题的实践性研究中。因此，在连续性现实数量问题的研究过程中理想数学元素的使用只是在暂时忽略原始数据的误差的理性分析阶段中被使用的事物，在付诸实践时还需要进行误差分析。全能近似数学元素是沟通理想数学理论与生产实践的桥梁。理想数学元素的许多问题都需要通过全能近似数学元素才能得到解决，例如：理想实数之间四则运算需要通过全能近似实数去定义；δ-函数、广义傅立叶积分变换、发散积分等问题都需要通过全能近似函数去解决；理想实数集的问题需要通过“近似实数集”去解决。

第五个不同的地方是：我们的无穷大、无穷小概念与“非标准分析”中的概念不同；在我们这里，无穷小与无穷大都是全能近似实数，都是变数。与希尔伯特不同，我们没有把无穷大叫做理想元素；我们的无穷大还是提出极限，提出理想实数的依据。

在这十篇论文中，我对连续性数学理论（包括实数理论、初等几何、微积分学、傅立叶积分变换等）进行了改革，这个改革揭露了它们来自于实践而又可以应用于实践的秘密，这个改革也是对古典数学的保护。这个论文集既是建立连续性数学理论的论文，也是讨论它的应用的论文。在这两个问题上我使用的根本方法都是近似方法。在应用问题上，除了讨论$\delta-$函数、数学物理方程、傅立叶积分变换之外，我还讨论了物理学中的问题。在电场理论中，我提出一种比现行理论较为合适的场强表达式，从而消除了一个发散积分；在相对论研究中我提出了光速的定义，从而消除了“时钟佯谬”问题。所有这些理论上的改革，与现行理论都有相违的地方，但我认为：这些改革是必要的、正确的。

这个论文集的写作经过了 43 年，我最初研究的三个问题是：①基本事件的概率是什么？②没有大小的点，怎么能够构成有长度的线段呢？③物体按瞬时速度运动的时段是多长呢？根据这三个问题，我认为：需要有一种“小于一切正实数而又大于0的无穷小数”。

为此，1962 年以“超限数”为根据，我提出了“扩充实数的构造”。扩充实数类似于非标准分析中的非标准实数；但是在提出扩充实数之后，仍然不能解决上述三个问题，于是我又放弃了这种扩充实数的做法。从这之后又经过 40 多年的研究，才提出了现在的“近似方法既是建立连续性数学理论问题又是解决这种实际问题的根本方法”和“全面阐述数学理论时必须使用辩证逻辑”的意见。还需指出的是：1976 年以后，我看过非标准分析和几本数理逻辑的著作。从这里，我了解到：现在的数学理论中存在着许多矛盾与难题；也了解到：在数学基础研究中遇到了许多困难（例如：选择公理、连续统的基数和实数系的无矛盾性问题）。在教学工作中我遇到了$\delta-$函数、积分变换、数学物理方程中的问题。我认为：无穷公理中的无限应当被解释为“潜无限”；“非标准分析”中的无穷小应当被解释为我所说的“辩证数”。

关于这十篇论文的价值是：它发现了现行实数理论的矛盾，解决了这个矛盾；消除了许多逻辑上的怪定理或大难题；解决了$\delta-$函数、排中律、电学理论中的一个发散积分和相对论中的“时钟佯谬”等问题；解释了许多过去无法解释的问题。对于第一、第二、第三次数学危机，第五公设的问题，在以往的著作中，都没有彻底解决，我这次解决了。最重要的是：我们发现并阐明了理想的数学理论与生产实践之间的实质性关系；通过上述问题的解决还可以看出：这个数学理论改革，显示了辩证数在解决连续性现实问题上活生生地的功能。

关于这个论文集，需要指出：文集中有重复的地方、不够协调和不够明晰的地方。重复的地方是：实数公理在第一、第二、第三篇中都有；整理时曾想删减，但又觉得：各个地方的叙述有些不同，都有参考意义，所以没有删减。不够协调的地方是：关于排中律和反证法的处理。在第一篇讨论海涅（Heine）定理时，我说的是：涉及排中律的反证法的使用应当慎重，我去掉了需要应用反证法的内容。在第二篇讨论魏尔斯特拉斯（Weierstrass）定理的证明时，我说的是：从我们的理想实数集来源于“近似的有限的实数集”来看，排中律完全可以应用。第四篇中以可构造函数为基础，我又去掉了几个需要用反证法的地方。表面上看起来，我们的处理方法不同，但实际上，我们使用的都是近似方法。由于我们建立连续性数学理论时，都是以近似方法为根本方法的，所以我解决了排中律与反证法能不能使用的争论问题。不够明晰的地方是：在很多地方，我们都使用了对立统一规律（或称辩证法），但又没有明确指出；有时候虽然说到了这个规律的应用，但又说得不够深入，这些地方需要靠读者自己去体会；体会了这个问题会有很大的好处。

最后应当指出：①虽然我主张以实践为基础、以近似方法为基础并使用对立统一法则去建立连续性数量研究的数学理论，但我没有取消形式逻辑方法在建立数学理论中的应用；②我只是从基本观点上改革和改善了现行数学理论，但不是去推翻它；虽然现行数学理论的许多基本部分都需要改写，但绝大部分理论内容都还是成立的；③我只是感到这些研究结果有好处，才写出这些论文的，并渴望学者们能接受我的这些意见，但本人学识确实比较浅薄，不当之处恳请读者不吝指教。④我希望使用本文的做法改写现行数学教科书，我也想出版我的这个论文集，但都没有条件；想看的这个文集的同志，只要来封信，我将复印一份寄上。

曹俊云　2005 年三月于河南理工大学

无限的概念与数学基础[1]

曹俊云

（河南理工大学数学系 邮编 454000 电话 0391-3980600 E-mail: cjy@hpu. Edu. cn）

摘要 实无限不能随便应用；现行实数理论与 ZFC 公理集合论中都有矛盾。实践中的除不尽、开不尽，测不准的事实必须得到尊重；对于点、直线、平行线、实数、相等、导数、函数等基本数学名词，都应当提出近似、全能近似、与理想三类不同的术语。没有误差的数学理论是从实践中的近似情形取误差界趋向于 0 的极限得到的。实数系统的可接受性依赖于实践。

关键词 无限公理 全能近似实数 全能近似函数 非欧几何 数轴 实数集 对立统一法则

中图分类号： 01-0 **文献标示码：** A

MR(2000) 主题分类号： 00XX-27 **文章编号：**

1 两种无限的基本概念

在人类的实践中，人们创造了十进计数法。根据这种方法，可以得到无限多自然数，依照从小到大的顺序，它们是：

0，1，2，...9，10，11，...100，101，...9999，10000，10001，......

谈到全体自然数时，我们常常说：它是一个无限集合。这个名词中的“无限”具有以下几点性质。1° 这个“无限”的存在，不仅依赖于“十进计数法”，而且依赖于时间、空间的无限性；时间的无限性，使我们可以把自然数一个接一个地、无限制地写下去；空间的无限性，使我们写出的这种数有存放的地方。2° 这个无限是从有限发展来的无限；这个无限是动态的无限；它具有：还在增长着的性质；而且这种增长是没有终了的。亚里士多德（Aristotle）称这种无限为“潜无限（Potential Infinity）”或增长着的无限（Growing Infinity）。3° 对这种无限，人们可以根据它的“构作法则”，研究出它的一些性质（例如自然数的“奇偶相间”性质）；但由于这个潜无限性质，也使得实数集的有些性质——例如哥德巴赫猜想，是很难研究出来的。

另一种无限是康托（Cantor）研究无理数和建立集合论时提出来的无限。众所周知：两千多年前出现了“$\sqrt{2}$ 到底是什么？”的第一次数学危机。在研究这个问题时，康托提出了“无限是一个现实的、完成的、存在着的整体”[1]的无限概念。这个概念之下的无限，被数学家们叫做“实无限（Actual Infinity）”。这个无限在建立实数理论与形式语言性数学基础上用得是否恰当，我们暂时不去讨论；首先需要指出的是：1° 这个完成了的无限，决不是任何人或任何人的集体所能完成的；2° 这个意义下的无限与上述潜无限的意义完全相反，不能相容；3°“实无限与潜无限”之间存在着类似于“黑与白”之间的相互依赖关系，例如：在我们前边讲到潜无限时，说过它依赖于时间、空间的无限性。那里的时间、空间的无限就应当被看作是“实无限”；这个实无限与自然数集的潜无限是相互依赖着的。4°两种无限的概念不同，不能混淆；混淆了或者使用不当就会造成不应有的矛盾与无法解决的问题。

2 现行实数理论中的矛盾与实数理论改革简述

现行教科书中自然数的基数理论与序数理论、有理数的序偶理论我都是同意的。但在生产实际上，我们必须知道：人们无法确认哪些现实线段的长度是绝对准的 1 或绝对准的 $\frac{1}{3}$。为此，我们称上述理论中的自然数与有理数都是理想实数。

[1] 作者简介：曹俊云（1932-）河南唐河人，副教授，对实数理论、几何基础、微积分等连续性数学理论及其应用进行了 43 年的研究。

根据现行实数理论得出的等式$0.\dot{3}=\frac{1}{3}$，我是不能同意的。因为，$0.\dot{3}$所代表的必须是$1\div 3$时得到的康托意义的一个“以有理数为元素的基本数列：0.3,0.33,……”；我们可以证明：这个数列的极限为理想实数$\frac{1}{3}$；根据极限的定义，我们还可以知道：对于任意小的误差界 ε，我们都可以从这个数列中找到$\frac{1}{3}$的足够准的十进小数形式的近似表达式，但无法找到它的绝对准表达式。这个数列应当被看作是一个变数，它不能被看作是定数。上述等式表明现行实数理论把上述数列所表示的变数看作常数了，这是不能容许的混淆；上述等式也表明现行实数理论使用了实无限的观点，这种观点与“除不尽”的潜无限观点是一个“不能容许的矛盾”。正确的做法应当是：把上述等式改为“等价表达式$0.\dot{3}\sim\frac{1}{3}$”（“等价”的意义可参看文献[2]）。

为了消除上述矛盾和混淆，我们需要提出了下述公理；为了反映生产实际，我们必须提出下边的定义。

公理 1（实数公理）：每一个以“有理数为项的康托基本数列”都存在着一个唯一的**理想实数为其极限，而且等价的这种基本数列的极限相同；其中不是有理数的理想实数叫做无理数。**

定义 1：若实数数列$\{a_n\}$收敛于理想实数a，则称这个数列为a的**全能近似实数**。其中，以“有理数为项的基本数列”叫做**基本的全能近似实数**。

根据这个公理和定义，所有循环或不循环小数都只是全能近似实数，但不是理想实数。根据这个公理和收敛数列的性质，很容易想到给出理想实数的加法定义和$\sqrt{2}-\frac{2}{3}$的计算方法；与现行教科书相比较。我们的加法定义和这个题目的运算方法要好得多。又根据上述公理，容易证明下边的重要的定理。

定理 1（收敛原理与完备性定理） 设$\{a_n\}$是一个以“任意理想实数为项”的无穷数列，则它收敛的充要条件是：对任意小的误差界 ε 都有自然数 N 存在，使一切 n、m>N 时，总成立$|a_n-a_m|<\varepsilon$；而且当$\{a_n\}$收敛时，$\{a_n\}$收敛于“与它等价的以有理数为项的基本数列”的极限。

证：必要性：设$\{a_n\}\to a$，则对任意小误差界 ε，总有自然数 N 存在，使 m、n>N 时，成立：$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是，得$|a_n-a_m|<|a_n-a|+|a-a_m|<\varepsilon$，必要性获证。

充分性：设，对任意小误差界 ε，总有自然数N_1存在，使m、n>N_1时，成立$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{4}$。取$\{\varepsilon_n\}$为满足条件$\{\varepsilon_n\}\to 0$的误差界序列，根据公理 1，对任意的实数$a_n$总有有理数$b_n$存在，使$|a_n-b_n|<\varepsilon_n$成立；又对任意小误差界 ε，总有自然数$N_2$存在，使$n>N_2$时，$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{4}$。于是对任意小误差界 ε，只需取$N=\max\{N_1,N_2\}$，就有$n,m>N$时，成立：

$$\left|a_n - a_m\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}, \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{4}$$

因此，得：$\left|b_n - b_m\right| \le \left|b_n - a_n\right| + \left|a_n - a_m\right| + \left|a_m - b_m\right| < \varepsilon_n + \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon_m < \frac{3\varepsilon}{4}$. 故$\{b_n\}$是“以有理数为项”的基本数列；根据公理 1，它必收敛于某一个实数a。此时一定还成立：

$$\left|a_n - a\right| \le \left|a_n - b_n\right| + \left|b_n - a\right| < \varepsilon$$

于是$\{a_n\} \to a$成立。它与和它等价的“以有理数为项”的基本数列$\{b_n\}$有共同的极限，故定理成立。

有了这个定理可以很容易证明实数理论中的其它定理。最重要的是：我们提出了理想实数联系生产实际的桥梁——全能近似实数，这种实数（即基本数列）的极限是理想实数，将这种实数在适当处所截断就得到可以联系生产实际的那个极限的近似实数。在此，还需要指出的是：理想实数与近似实数的区分只是实数理论研究中的事，但在联系具体生产实际时，两者常常是无法区分的。例如，将 1 米长的线段等分成三段时，有人按量度拿去$\frac{1}{3}$，有人按量度拿去 33 厘米，剩下的就不一定恰好是$\frac{2}{3} - 0.33$米，；而且三个线段中究竟哪一个恰好是$\frac{1}{3}$，也是无法确定的。这说明：所说的近似实数、理想实数在表达现实数量大小时是无法区别的，但在理论研究中，理想实数具有可以不讲误差的优点。这个优点；可以使数学理论变得简单一些，但在联系生产实际问题时，误差理论还是需要的。

3 现行微分学中的问题及其改革简述

在牛顿（Newton）、莱布尼兹(Leibniz)建立微积分学的时候，就发生了“无穷小是什么呢”的争论，20 世纪著名的逻辑学家鲁宾逊（Robinson,A）为解决这个问题出版了《非标准分析》[3]，但该书发表已经四十多年了，人们使用的仍然是过去的数学分析。现在，在我们的上述实数理论改革的基础上，可以提出与非标准分析不同的无穷小、微分、导数的定义如下。

定义 2： 以 0 为极限的全能近似实数叫做全能足够小或无穷小；有时我们也称它为辩证数。

例 1 《庄子》中“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的数列$\{\frac{1}{2^n}\}$，是一个全能足够小（无穷小）。它的极限是 0，但它本身不是 0。取极限只能表示它的趋向，但不能表示它的“万世不竭”的性质。我们使用0^+表示这种辩证数。

定义 3： 若对任意大的实数 M，都有自然数 N 存在，使$n > N$时，

$$a_n > M \, (a_n < -M; \left|a_n\right| > M)$$

成立，则称数列$\{a_n\}$为正无穷大（负无穷大；无穷大）记作：$+\infty(-\infty;\infty)$。对这样的无穷大，我们也称它为全能近似实数。

无穷小、无穷大都是变数，而且都是无穷数列。

定义 4： 设函数$f(x)$在x_0的右侧“邻域$[x_0, x_0+\delta)$”内有定义，若对0^+意义的任意

全能足够小$\{a_n\}$，数列$\left\{\dfrac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}\right\}$收敛同一实数或都发散于+∞或-∞，则称：

由这个数列所表达的全能近似实数为$f(x)$在 x_0 的右全能近似导数；并称这个数列的极限

（不包括 +∞、-∞）为$f(x)$在x_0的右理想导数。右全能近似导数与右理想导数分别记作：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0^+}, \qquad f'(x_0^+);$$

“左全能近似导数”与“左理想导数”的定义与此类似。

定义 5：在上述理想导数存在的条件下，我们称上述定义中的0^+（0^-）意义的任意的

全能足够小$\{a_n\}$为自变量的正、负微分，分别记作：$dx, -dx$；同时分别称

$f'(x_0^+)dx, -f'(x_0^-)dx$为函数$f(x)$在$x_0$处的右、左函数微分。

与《非标准分析》相比较，我们的无穷小不仅有合理的容易接受依据，而且还可以说是：现行微积分学已经接受了的；而他们的无穷小属于他们的“非标准分析数域”，那个“数域”不仅难以被人们理解；而且在下边第七节我们将指出：那个数域的构造方法有问题。我们的理想导数与现行教科书中的导数和非标准分析中标准导数都相同；我们提出的全能近似导数不仅是理想导数联系生产实际中近似导数的桥梁，而且使用这种导数还可以得出函数在一点取得极值的充要条件，这是使用理想导数时办不到的事。我们的微分定义说明：微分是动态的而不是静态的，与现行教科书相比较，我们的说法，具有“在使用函数微分代替函数增量工作中”可以减少“不满足误差界的”失误现象的作用。

在研究瞬时速度的实际意义时，我们可以提出：自由落体运动中，物体按照$v=2g$运动的时段长是多少的问题。这个问题是一个“既不能说它是零又不能说它不是零”的，“封闭在绝对准领域内的现行理论数学”无法回答的问题。在我们的尊重“除不尽，开不尽，测不准”的数学体系下，我们认为$t=2$这个时刻是无法被“绝对准测到”的；而且对于所研究的实际问题来讲，我们的自由落体运动规律表达式$s=\dfrac{1}{2}gt^2$也不能说是绝对准的。所以，我们可以拒绝用绝对准的方式回答问题。用近似方法来回答这个问题时，我们可以说：物体足够近似地按瞬时速度$v=2g$运动的时段长是包含$t=2$的一个足够小。

4 几何基础的问题及其改革简介

众所周知：欧几里得（Euclid）《原本》中的第五公设引发了罗巴切夫斯基（Лобачевский）等学者的“非欧几何”与希尔伯特（Hilbert）的《几何基础》的诞生。希尔伯特的《几何基础》获得了以罗巴切夫斯基命名的国际奖金，但这个《几何基础》中各个公理体系的无矛盾性问题依赖于实数系的无矛盾性[4]；而实数系的无矛盾性问题是希尔伯特 1900 年在巴黎国际数学会上提出的 23 个问题的第二个问题，根据哥德尔（Gödel）不完全定理，这个问题是不能由系统本身解决的问题。更重要的是：任何数学理论的形式语言，只有它在生产实际问题上得到解释的条件下才能有应用的价值。为此，对于希尔伯特的《几何基础》，我们必须

给他补充上点、直线、平面、平行线的实际意义或定义。

定义 6 只有位置而没有大小的点叫做**理想点**。满足一定误差界要求的、有大小但其大小可以忽略不计的点叫做**近似点**。设$\{\varepsilon_n\}$为以 0 为极限的误差界序列，我们称：随着这个序列逐步得到的、能近似表达一个理想点位置的“近似点”序列为**全能近似点**。

公理 2 随着误差界趋向于零，全能近似点的极限是一个唯一的**理想点**。

尺（度量单位）的端点虽然可以说是没有大小的理想点，但没有大小的点具有无法被点出或画出的性质；在测量工作中，必须使用近似点去标示“绝对准的理想点”的位置。在表达位置问题上，理想点不会带来误差（因此也不需要研究误差），这是好的一面；但在实践上，这是办不到的；所以理想点只是“不讲误差的绝对准几何理论”中的事物。绝对准的几何理论与实践之间的差距是不能消除的；但它们之间的联系是应当被指出的；我们的全能近似点是这个联系的桥梁。这个公理说明：求一个理想点处的变化率的问题需要用极限方法。

定义 7 对于一个给定的判断线段粗细和长度最短（即最直）的误差界 ε 和两个理想点，通过表达这两个理想点的近似点之间的拉得足够紧（即足够直）和足够细的线段或发散角足够小的光束叫做连接这两点的足够准的**近似现实直线段**；其中“长度大于足够大数 n 的足够长的近似现实直线段”可以被简称为**近似直线**。对于以 0 为极限的误差界序列$\{\varepsilon_n\}$和对于无限大序列$\{n\}$的无限远离着的两个理想点，随着这个序列逐步得到的后一个直线段含有前两个理想点的后一个比前一个更细、更直、更长的近似现实直线段序列叫做**全能近似直线**。其中经过两个确定的理想点之间的近似直线段序列叫做**全能近似直线段**。

公理 3 全能近似直线的极限是一条唯一的**理想直线**。理想直线上任意两个不同的理想点之间的部分叫做**理想直线段**。

定义 8 过理想平面上理想直线 L 外的理想点 A 处的与 L 在足够远处相交的理想直线叫做 L 的**近似平行线**；设$\{\varepsilon_n\}$为以零为极限的误差界序列，则称平行角为$\left\{\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon_n\right\}$的近似平行线序列为**全能近似平行线**，当$\varepsilon_n \to 0$时的全能近似平行线的极限位置叫做欧几里得式的**理想平行线**。

根据这些定义，我们有：1° 在测量工作中，理想点是无法被点处的，能点出的点必然是近似点，这说明欧几里得《原本》中“点没有部分”的说法是忽略误差的说法；在测不准情况下，古代算式$1+1=2$也是忽略误差的算式；2° 根据定义 7，弯曲程度足够小而又没有粗细的近似曲线段为近似直线段；因此，足够大的球面上没有粗细的大圆弧是近似直线段，球面上的大圆都是相交的，这个现象说明：平行线不存在的黎曼几何有应用的地方；3° 根据定义 8 我们应当说：在理想平面上，过理想直线 L 外点 A 处的 L 的近似平行线是无穷多的，但理想平行线只有一条。这几点都说明：欧几里得几何是没有误差或误差趋向于零的理想情形的几何理论；后两点还说明：非欧几何可以是欧几里得几何的近似状态。但在绝对没有弯曲的直线、绝对准的欧几里得平行线无法做出的情况下，非欧几何与欧氏几何都可以被用来解释物理现象；欧氏几何是应当讲授的几何理论，但欧氏几何的这种状况也是必须说明的。

5 概率场概念的问题与数轴概念

5.1 概率场的定义问题 现代的概率论教科书大都采用了柯尔莫哥罗夫（Колмогоров）的公理化（U，$\mathscr{F}$，P）概率场定义：其中U为基本事件的集合，$\mathscr{F}$是由满足一定条件的U中的某些子集组成的集类，P为定义在$\mathscr{F}$上的集函数。对于这个定义，按照现行的数轴和实数集概念，不仅存在着"基本事件的发生概率无法讨论"，而且基本事件的有些子集的发生概率也无法讨论的问题。因此，有的教科书不得不说："至于这集合U的元素是什么东西，对于概率论的逻辑发展而言是可以不加分辨的。"[5] 有的教科书谈到$\mathscr{F}$的构成时说："至于究竟需要哪些子集，则需视具体情况而定。通常并不需要考虑基本空间中的所有子集。"[6] 又有教科书中说：$\mathscr{F}$"是一个σ－代数"[7]。这些现象说明：现行概率场定义有难以理解的地方。究其原因，在于实数集的"构作方法"以及点与直线、平面、空间的关系没有清楚、具体、深入地说明。现在，在我们上述的点、实数的概念下，我们首先可以提出下一节的数轴定义。

5.2 近似数轴与理想数轴

定义 9 在点与数的对应误差界为 1/10 的情况下，我们可以设想在较高的精度要求下把长度为 20 个单位的现实直线段足够准近似地区分为长度为 1/100 的 2000 个小线段。然后"从左至右"把第一个至第五个小线段合起来作为第一个近似现实点，并用含有一位小数的十进小数 -10.0 表示它；再把第 6 个至第 15 个小线段合起来作为第二个近似现实点，用含有一位小数的十进小数-9.9 表示它，……；把第 996 个至第 1005 个小线段合起来作为第 101 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 0.0 表示它，把第 1006 至第 1015 个小线段合起来作为第 102 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 0.1 表示它，……；把最后 5 个小线段合起来作为第 201 个近似现实点，用含有一位小数的十进小数 10.0 表示它。这样做成的近似现实点与其表达数字之间的对应误差小于 1/10；我们就称：有了这种近似现实点及其对应表达数字之后的这个现实直线段就是误差界 1/10 之下的**近似现实数轴**。

定义 10 在"**假定误差界可以无限减小而趋向于零**"的条件下，继误差界 1/10 之下的近似现实数轴之后，在"误差界"提高到 1/100 的情况下，我们可以将长度为 200 个单位的现实直线段在较高的精度要求下区分成长度为 1/1000 的 200000 小线段，然后"从左至右"把第一个至第五个小线段合起来作为第一个近似现实点，用含有 2 位小数的十进小数-100.00 表示它；……；这样我们就有了误差界为 1/100 的近似数轴；再继续下去，我们又有误差界等于 1/1000、1/10000、……之下的近似现实数轴序列。我们称这个近似现实数轴序列为**全能近似数轴**。

在这个全能近似数轴上，存在着与所有的无限循环和无限不循环小数对应的全能近似点；根据公理 1 和公理 2，这些全能近似点的极限是与所有理想实数一一对应的理想点。于是我们又可以提出下边的定义。

定义 11 全能近似数轴的极限叫做**理想数轴**。

根据上述几个定义，我们应当说：1° 理想直线作为与理想实数一一对应的理想点的集合的说法是一种无法实现的理想；能与实践联系的说法必须是：线段是由近似点组成的观点。2° 理想实数集是"近似实数集"的极限状态；理想实数集是人们无法构成的集合。这是应用实数集时必须注意的性质。

5.3 连续性随机变量在一点发生的概率是多少与奇异分布的密度问题

对于连续性随机变量在一点发生的概率问题，我们认为：理想点是无法确切找出的点，所以我们不考虑这种点上的发生概率；对于近似点，在这种点上发生的概率与点的大小有关，设点的大小为dx，则在这个点上发生的概率可以足够准地表示为$f(x)dx$，式中$f(x)$为概率密度。

现行教科书中找不到 Cantor 奇异分布[8]的分布密度。从我们的观点来看，Cantor 奇异分布是一种采用极限方法得到的分布；我们认为：极限是达不到的、无法与实际联系的理想情

形，我们可以在这个分布的取极限前的那个序列的足够后边的地方截断，这时就可以找到它的分布密度了。

6 全能近似函数与全能近似定积分

6.1 全能近似函数

与实数、点、平行线的问题类似，也需要提出近似函数、全能近似函数、理想函数三个不同的数学术语。根据前边讲到的理想实数、理想数轴、理想实数集的概念，我们应当知道：现行教科书中叙述的“从实数集到实数集上的映射”意义下的函数定义具有理想性。例如：对 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数，}\\ 0, & x\text{为无理数。}\end{cases}$$

根据连续性现实数量的测不准性，我们没有办法将数轴上的所有有理点与无理点区分出来，所以，我们无法验证那一对现实数量之间关系是这个函数表示的，即这个函数无法与生产实际相联系。从这个意义上讲：我们应当称现行教科书中定义的那种函数为理想函数。能用实践测定其函数值的函数应当是连续函数，所以我们称：具有足够阶逐段连续导数的函数为好函数。在理想函数的求导、积分、交换积分顺序、方程求解、求积分变换工作中常常需要用好函数作它的近似情形；为此，提出下边的定义。

定义 12 若有“含参变量的好函数序列”或幂级数、傅立叶级数几乎处处收敛于理想函数 $f(x)$，则称这样的序列或级数为 $f(x)$ 的全能近似函数；将这样的序列或级数在满足“误差界要求”处截断后得到的函数叫做 $f(x)$ 的近似函数。

近似函数与全能近似函数有很多应用，下边仅举两个例子予以说明。

例 1：亥维赛德（Heaviside，O.）函数

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/2, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}\qquad(1)$$

在 $x=0$ 没有通常意义的导数；为求导数，我们可以构造出它的含“参变数 ε ”的全能近似数字函数

$$H_{\text{全}}(x)=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}+\frac{\pi}{2}\right]\quad(\varepsilon\cong 0^+)\qquad(2)$$

式中 $\varepsilon\cong 0^+$ 表示 ε 是 0^+ 意义的任意数列的“通项”。由（2）出发求导，我们就可以得出如下的含“参变数 ε ”的导函数：

$$\delta_{\text{全}}(x)=\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}(\varepsilon\cong 0^+)\qquad(3)$$

这个式子具有“无穷阶连续导数”，如果对 0^+ 取极限，可以得到表达式：

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{在理想点}x=0\text{处；}\\ 0, & \text{在其它理想点处。}\end{cases}\qquad(4)$$

此外，对“足够阶可微函数” $f(x)$，使用（3）式积分后，对0^+取极限，在许多情况下，我们都可以得到表达式：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \delta_{全}{}^{(n)}(x)f(x)dx=\begin{cases}(-1)^n f^{(n)}(0), 当[a,b]包含理想点x=0时; \\ 0, 当[a,b]不包含理想点x=0时。\end{cases} \quad (5)$$

我们的这种做法，不仅消除了δ-函数不能讲函数值的缺点；而且与工程技术和物理学书籍中的叙述较为接近。事实上，狄拉克（Dirac）在他的《量子力学原理》中讲到：δ-函数是一种“到处为零，只有在原点 t=0 附近的一个小范围内，例如长度为ε上，这个函数值是很大的，以至于它在这个范围内的积分是 1”[9]的函数。这说明：我们的处理方法是便于应用的。我们还认为：（1）式可以被看作是由（2）式出发，求$\varepsilon\to 0$时的极限得来的，所以我们分别称（2）、（3）式是（1）、（4）式的现实原型。

例 2，由于单位阶跃函数不满足傅立叶积分定理中的条件，所以这个函数的经典意义的傅立叶积分变换是不存在的。这个问题在现行的绝对准的理论体系下是无法得到圆满解决的。现在我们的解决办法是：首先寻找它的全能近似数字函数

$$\mathrm{H}_{全}(\mathrm{x})=\begin{cases}0, & \mathrm{x}<0 \\ \mathrm{e}^{-\varepsilon \mathrm{x}}, & \mathrm{x}\ge 0\end{cases}(\varepsilon为全能足够小0^+) \quad (1)$$

使用它的这个全能近似数字函数，可以得到它的全能近似傅立叶积分变换为：

$$\mathscr{F}_{全}[H(x)]=\frac{1}{\varepsilon+j\omega}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}+\frac{-j\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}(\varepsilon为全能足够小0^+) \quad (2)$$

将这个函数列在适当处截断，又可得到它的近似傅立叶积分变换为：

$$\mathscr{F}_{足}[\mathrm{H(x)}]=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}+\frac{-\mathrm{j}\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}\quad (\varepsilon为足够小正数) \quad (3)$$

将这里的（2）式与例 1 中的（3）式相比较，可知：（2）式的右端第一项的极限是$\pi\delta(\omega)$，第二项收敛于 $1/j\omega$。这说明：我们的表达式与现行教科书[10]中表达式相当，但现行教科书中的那种表达式有很多问题。其中第一个问题是：$1/j\omega$ 在 $\omega=0$ 处没有定义，在（$-\infty$，$+\infty$）上不满足绝对可积的条件，逆变换的计算问题至少是很难讲清楚的。第二个问题是：在实际应用上，常常是需要函数值的。例如在这个变换的实际应用中有人讲过：“输入一个单位阶跃，若要知道的是输出的直流响应那么就用$\pi\delta(\omega)$代入有关变换就行了”[11]。为什么是这样的呢？从现行教科书中的$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$ 的表达式出发是无法得到解释的。因为：直流响应是 $\omega=0$ 时的响应，而在$\omega=0$ 处，它们的这个表达式的第一项不能讲函数值，第二项的“模”为无限大，因此得不出第二项可以忽略不计而只用第一项就行了的结论。但从我们的（2）或（3）式出发就可以使这个问题得到解释了。

现行傅立叶积分变换存在许多问题，例如：（1）， $1/|t|$的傅立叶积分变换在文献[10]的附录中为

$$\frac{2\pi}{|\omega|}$$

但在文献[12]的附录中为

$$2\Gamma'(1)-2\ln|\omega|$$

这两个表达式不仅不同，而且作为广义傅立叶变换都缺乏对经典傅立叶变换的“承袭性”。

事实上，关于 1/|t|，我们可以算出它在 ω=1 的经典傅立叶变换的值为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|t|}e^{-jt}dt=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt=+\infty$$

但上述两个表达式在 $\omega=1$ 处都不满足这个结果。(2)，卷积定理证明中用到了交换两个无穷限积分顺序的做法，但很多函数不满足这种交换的条件。这些问题的解决，也需要提出“全能近似傅立叶积分变换”；限于篇幅，在此不予详述。

6.2 全能近似定积分

定义 13 设 y=f(x)在[a，b]上逐段连续（这时，f(x)在[a,b]上按绝对准极限方式定义的定积分存在），在[a，b]上作分点：

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_n=b$$

并在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ε_i，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

我们称 $\max\{|\Delta x_i|\}=\|\Delta x_i\|\cong 0^+$（即 $\|\Delta x_i\|$ 为 0^+ 意义的收敛数列）时的这个和式为 f(x)在[a,b]上的**全能似定积分**，记作：

$$\sum_{x=a}^{x=b}f(x)dx\ (dx\cong 0^+)$$

即

$$\sum_{x=a}^{x=b}f(x)dx\ (dx\cong 0^+)=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i\,(\|\Delta x_i\|\cong 0^+)\qquad(1)$$

与现行教科书中定积分的区别仅在于：全能近似定积分用的是 $\|\Delta x_i\|$ 为 0^+ 意义收敛数列而不是它的极限；或者说:(1)式右端的各个 Δx_i 只是非零的全能足够小这样的变数.因此，全能近似定积分完全保留着“正规和式”的意义。全能近似定积分与理想定积分之间成立全能近似相等的关系：

$$\int_a^b f(x)dx\sim\sum_{x=a}^{x=b}f(x)dx\ \left(dx\cong 0^+\right)\qquad(2)$$

当积分变量为时间 t, $f(t)$ 为在时段 $[a,b]$ 上作用的力时，上式左端为这个时段上力的冲量的绝对准表达：$f(t)dt$ 为微分冲量，对于任意小的误差界，只要 dt 为足够小，它总能在足够准的意义下表示包含 t 的足够小的时段上的力的冲量；而且，对于任意小的误差界，只要取 $\|\Delta x_i\|$ 为足够小，总可以从上式右端的和得到左端足够准确地表达式。

由于“全能近似定积分”具有“正规和式”意义，所以使用它能够较好地解释数学物理方程中的“Duhumel 原理”和“冲量原理”方法。

7 ZFC 公理集合论中的矛盾、怪论与难题

7.1 无限公理的解释问题

20 世纪的数学理论研究的特点是“形式公理学”方法占了上风，但“形式语言”的真假不仅需要用“模型”或称“解释”去说明，而且所用的“模型”也需要是无矛盾的。现在，就 ZF 公理集合论进行一些考察。这个公理体系中的无限公理的形式语言是：

$$\exists s(\ \phi \in s \wedge \forall x(x \in s \to x' \in s))$$

对于这个公理，文献[13]中讲：“归纳集是存在的”；又讲到：“ω 这个最小的归纳集是我们在集论中遇到的第一个实无限。有了无限公理，集论便进入了实无限的领域，实无限（无限集）是现代数学的基本工具，是集论的本质”；“历史上，由 Peano 公理所确定的自然数集 N 是抽象的，而这里的我们得到的 ω 这个自然数集是具体的。关于自然数，我们从抽象走到了具体。无限公理的引入，无非是为了肯定 ω 这个集作为整体的存在性。对于文献[13]的这种论述和由此得到的一切结论（包括“非 Archimedes 序域”[13]和“非标准分析数域”[3]）是不能被接受的：第一，归纳集本来是一个潜无限意义的集合，硬要把它当作“实无限集”去处理，这就是 ZF 公理系统中的矛盾。这个矛盾还表现在由此出发定义的“超穷序数和超穷基数”上。对于序数，我们知道：按照 Peano 公理，有任意大的有限自然数存在，现在呢，却有一个不能超越的“极限序数ω”存在，这是不可理解的，这也是一个矛盾。对于“超穷基数”来讲，由这个公理导出的“超穷基数理论”也是有问题的。事实上，“到目前为止，人们还没有解决连续统问题，还不知道 $2^{\aleph_0}$ 究竟等于什么，他仍然是数学中一大难题。”[14]此外，如果采取实无限观点的话，我们还可以证明：实数集是可列集，我们的证明如下：首先对于区间 [1,2) 上的十进小数，可以依照小数点后的位数的不同，排成下表中的各行

1,
1.1,1.2,1.3,⋯1.9,
1.01,1.02,⋯1.09,1.11,1.12,⋯1.19,1.21,⋯1.29,1.31,⋯1.41,⋯1.99,
1.001,1.002,1.009,1.011,⋯1.019,1.021,⋯1.031,⋯1.414,⋯1.999,
……………………………………………………………………

然后依照从左到右、从上到下的顺序给区间 [1,2) 上的上述十进小数依次进行编号，可以得出下边的编号表

1,
2, 3, 4, 5, 6, 7, ⋯ 8, 9, 10,
11, 12, ⋯20, 21, ⋯⋯100,
101, 102, ⋯200, ⋯⋯1000,
……………………………

如果采取无限是“完成了”的实无限观点，那么区间 [1,2) 上的上述十进小数，就包含了这个区间上的所有的无尽小数，因此也就包含了这个区间上的全体实数。所以，我们可以讲区间 [1,2) 上的全体实数是“可列集”。同理，对所有整数 N，区间 $[N, N+1)$ 上的全体实数也

是“可列集”；再根据“两两不相交的可列集的和集是可列集”的定理就可以得出：“实数集是可列集”的结论了。这和康托的“实数集是不可列集”的论断相矛盾。

现在，只要将无限公理中的无限解释为潜无限，问题就可以解决了。事实上，在我们的这个解释下，“超穷序数与超穷基数”都是不存在的；前边讲的矛盾也是不存在的；在我们的观点下，自然数集、有理数集、实数集都是“潜无限意义的”、不能被人们构成的集合；不仅不能把它们看作实无限去比较它们之间的大小；而且从“蕴含”的意义上讲，它们所含的元素个数一个比一个多；所谓“自然数集与有理数集有相等基数”的说法是不科学的。

7.2 与选择公理有关的怪论

文献[15]讲到了许多与选择公理有关的怪论。现在，在我们的潜无限和“线段不是由理想点构成，线段上的理想点无法被绝对准地区分出来”的观点下，Banach Tarski “分球奇论”首先就不存在了。这些怪论中的最重要的是：文献[15]中的第 89 页中的“怪”定理；这个怪定理说：“存在着一个定义在整个直线上的实函数 f(x) 及一点 a，按“ ε - δ ”定义，这个函数在 $x = a$ 不连续；但在另一方面，只要有序列 $\{a_n\}$，使 $a = \lim a_n$ ，就必有 $f(a)=\lim f(a_n)$ ”。这个“怪”定理违反了文献[2]中的海涅定理（证明归结原则的定理）的结论，因此它给现行微积分学打下了问号。对于这个怪定理，由于在他们的证明中用到了“超穷数”，而“超穷数”在我们这里是不存在的，所以这个怪定理也就不存在了。其他怪定理我们就不一一讨论了。

8 实数系的无矛盾性与反证法的应用问题

8.1 实数系的无矛盾问题

综上所述，我认为：“实无限与潜无限是两个不同的概念，不能乱用”；除了时间、空间这两个无限之外，一般的，我们不用实无限的概念；我们又对实数理论、几何基础、无限公理的解释等许多基本问题进行了改革。对此，有人提出意见说：“你还应当证明一下你的实数系统的无矛盾性”。关于这个意见，我有很多考虑：第一，提出无矛盾性的要求是应当的；当发现矛盾时，就应取消或改革原有的论述。第二，就现行实数系统来讲，证明其无矛盾性问题，是希尔伯特 1900 年在巴黎第二次国际数学年会上提出的 23 个问题中的第二个问题；关于这个问题，王宪钧先生在他的《数理逻辑引论》中讲到：“证明论的目的——用有穷方法来论证以实无穷为对象的古典数学的一致性不能达到”[1]。甘岑(G.. Gentzen)虽然证明了算术运算的一致性，但证明中用了“超穷归纳法”；“超穷归纳法”中又存在着选择公理（等价于建立超穷归纳法时依赖的整序定理）的争论问题。我现在不仅指出现行实数系统有矛盾而且对这个系统进行了改革，改革之后的实数系统至少比现行实数系统要好一些。第三，哥德尔（K. Gödel）不完全定理说明：一个完备的理论体系的无矛盾性是不能在这个体系本身中得到证明的，用其它体系证明时又需要证明那个体系的无矛盾问题，所以我们就不去用逻辑方法去证明这个问题了。第四，最重要的是，理论研究的目的在于“它在实践中的应用”；我们可以用“理论能不能在实践中得到应用”作为理论体系能不能成立的一种判别方法。几千年的生产实际已经说明：在近似意义下，实数是可以应用于生产实际的。我们的改革仅仅是突出了这个近似性。所以，我们的实数理论是有用的，应当被接受的理论。这就是我对“需要证明无矛盾性” 问题的回答。这个回答可以说是：我坚持了“实践是检验真理的唯一标准”的哲学上的论断方法。

8.2 排中律与反证法的应用问题

排中律能不能应用在数学界是有争论的[1]；反证法与排中律有关，因此对反证法的应用应当提出一个条件。这个条件应当是：能判定真假的“二值性”问题。由于不可判定问题的存在，反证法的应用必须谨慎。无论如何，应用时，不能得出违背实践的结论。海涅定理的证明用到了反证法，文献[15]中又提出了违反这个定理的怪定理，所以我对这个定理进行了

几年的反复研究。虽然上边我否定了那个怪定理，但对于理想函数，我不能保证海涅定理是成立的，我又考察了现行教科书中的这个定理的应用，我认为：这个定理中的条件的充分性可以去掉，而只保留条件的必要性。

9 数学理论的最终基础

综上所述，连续性数学的最终基础有以下两条；第一是：实践；第二是：对立统一法则。关于对立统一法则，我们用到的有：实无限与潜无限之间的相互依赖性质，绝对准与近似之间相互依赖性质，理想实数与近似实数之间的相互依赖性质，理想点与近似点之间的相互依赖性质等等。关于实践，我们应当想到：没有误差的数学理论是从实践上的近似情形通过误差界趋向于 0 的取极限方法得到的。

参考文献

[1] 王宪钧 《数理逻辑引论》[M]， 北京大学出版社 1989, 277~279, 324-328, 338~339.

[2] 华东师范大学数学系 《数学分析》 上册 [M], 高等教育出版社 1980, 66~68, 328~330.

[3] Robinson, A., Non-standard Analysis [M], Amsterdam, London, North-Holland Publish Co. 1974, 1, 15, 35~55，282.

[4] 李云普 任国朝 《几何基础》 [M], 高等教育出版社 1990, 6, 80，129.

[5] B . B . Гнеленко 著《概率论教程》[M]，丁寿田译，人民教育出版社 1956，49

[6] 复旦大学数学系 《统计数学》[M]，上海科技出版社 1960，18

[7] 华东师范大学数学系 《概率论与数理统计教程》[M]，高等教育出版社 1983，28

[8] 王梓坤 《概率论基础及其应用》[M]，科学出版社 1979， 47

[9] Dirac, P. A. M. 《量子力学原理》 [M]，（陈咸亨） 科学出版社 1979, 58-59.

[10] 南京工学院编《积分变换》[M]，人民教育出版社，1982,103.

[11] 殷齐 《怎样理解广义傅立叶变换及单位阶跃函数的谱函数》[J]，湘潭师专学报 1982（1）。

[12] 祝同江《积分变换》[M]，高等教育出版社，1991，135。

[13] 汪芳庭 《数学基础》科学出版社[M]，2002，77，80，115~122，170~174。

[14] 张锦文《集合论于连续统假设浅说》[M]，上海教育出版社 1980，87.

[15] 谢邦杰 《超穷数与超穷论法》[M]，吉林人民出版社 1979，82~91。

The Concept of Infinity and the Foundations of Mathematics

Junyun Cao

(Department of Mathematics, Henan Polytechnic University Jiaozuo Henna P. o. 454000, E-Mail: cjy @ hpu. edu. cn)

Abstract: We could not use the concept of Actual Infinity in unreasonable; There is a contradiction in current theory of real number and ZFC. The facts of have not the end of some division calculating and some calculating to ask the square root and the fact of not enough accuracy to measure continuous quantity must be respect. For all the terminology of the point, straight line, parallel lines, real number, equality, function, derivative, we must raise three different terminology of ideal, approximate and omnipotent approximation. The mathematics theory of which do not fall into error, is obtained by take limit of the error bounds tend to 0 from approximation situation in practice. The character of could be accept of real number system depend on the practice.

Keywords: The Axiom of Infinity The Omnipotent Approximation real number The Omnipotent Approximate Function Non-Euclidean Geometry. The Axis of Real numbers The Set of real numbers The Laws of The Unity of Opposites