高 等 数 学

（电　类）

东 北 工 学 院

工矿自动化专业高等数学编写组

一九七七年五月

目　　录

第一章　函数与极限

第二章　变化率与微分

第五章 级　　数

第六章　多元函数微积分

第一章 函数与极限

在实践中我们经常遇到各种不同的变化过程，在每一种变化过程中都会碰到各种不同的量，如长度、质量、时间、速度、面积等，其中有的是变化着的量，有的是不变的量，这些量不是孤立的，它们之间互相联系、互相依赖，而又具有一定的内部规律。研究这种依赖关系和内部规律性是高等数学的重要内容之一，本章主要就是研究这个问题。

第一节 变量与函数

一、常量与变量

例 1 在日常生活和生产实践中，我们经常遇到的量可以分为两种，即常量和变量。例如一列火车以每小时 65 公里的速度前进，那么列车行驶的路程和所运行的时间之间的关系是：

$$路程 = 速度 \times 时间.$$

如用 S（公里）表示列车行驶的路程，用 t（小时）表示运行的时间，则上面的公式可表为

$$s = 65t \tag{1.1}$$

这就是物理里面讲的等速运动的路程公式。公式中含有三个不同的物理量。其中速度 65(公里/小时)在火车正常运行时是一个保持数值不变的量。路程 S 和时间 t 在火车运行中是数值不断变化的量。例如运行 1 小时火车行驶的路程是 65 （公里），而运行 2 小时则火车行驶的路程是 130（公里），……等。

我们规定：*在研究某个问题的过程中，保持定值的量，叫做常量；可取不同数值的量叫做变量。*

上面问题中的速度 65（公里/小时）是常量，路程 S 和时间 t 是变量。

例 2 设以 A 表示半径为 r 的圆面积，则

$$A=\pi r^2 \tag{1.2}$$

式中 $\pi\approx 3.1416$，在计算各种不同半径的圆面积时 π 的值保持不变，因此 π 是个常量。半径 r 和圆面积 A 是可取不同值的量，因此 r 和 A 是变量。

同学们可以结合自已的经历，举一些常量和变量的例子来加深理解这两个概念。

运动和变化是绝对的，静止和不变是相对的。比如前面讲的火车等速行驶的速度是 65（公里/小时），说它是常量，然而实际情况是，在火车行驶的过程中，由于各种原因，如风力的大小，线路的好坏等都会影响火车的速度，使它不断变化，就是说，速度也是一个变量，不过尽管速度变，但只在 65（公里/小时）左右有微小的变化，因此把速度看作常量来研究既能使计算简化，而且可以得到足够准确的结果。

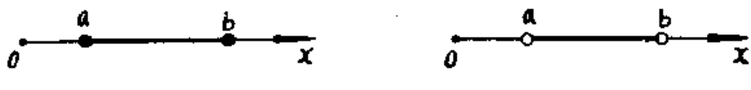
一般地说，在实际问题中，如果某个变量的变化微不足道，并不显著影响我们的结果，我们就可把这样的变量当作常量来处理。这种以“不变代变”的方法，以后还会经常遇到。由此看出常量是变量的特殊情况。今后我们经常用字母 $x,y,z,r,s,t,\cdots\cdots$ 等代表变量，而用字母 $a,b,c\cdots\cdots$ 等代表常量。

二、区　间

变量的取值总有一定的范围。常见的一种情形是，变量可以取得两个数之间的所有数。例如，某天室温 T（度）是一个变量，最低室温 $T=21$（度），最高室温 $T=28$（度），那么整天 24 小时温度的变化范围为 21 与 28 之间的所有数，这样的变化范围叫做区间。确切地说，两个实数之间的实数全体叫做区间。例如 1 和 2 之间的实数全体是一个区间。区间的表示法常用的有下例三种。

1. 几何表示法

初等数学中就知道，任何一个实数都可用数轴上的一个点来表示，那么区间就可用数轴上的一个线段来表示。例如数 a 对应数轴上 a 点，数 b（设 $b>a$）对应数轴上 b 点，如果变量 x 的变化范围为 a、b 之间的所有数，则 ab 线段就表示这个区间。包括端点 a、b 的区间叫闭区间。不包括端点就叫开区间。在图形上开、闭区间的端点各用不同的记号加以区分，见图 1—1。



闭区间　　　　开区间

图 1—1

2. 括号表示法

开区间用圆括号（a，b）表示，闭区间用方括号〔a，b〕表示。

3. 不等式表示法

开区间用 $a<x<b$ 表示，闭区间用 $a\leqslant x\leqslant b$ 表示。

例如某天室温 T 的变化范围是包含 21（度）到 28（度）在内的区间。用括号表示为〔21，28〕，用不等式表示为$21\leqslant T\leqslant 28$，用几何表示为图 1—2 中 T 轴上的线段。

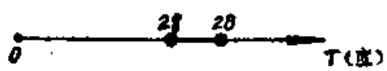


图 1—2

如果变量 x 能取大于 a 的任何数，这时 x 的变化范围可用数轴上一个无穷长的线段，即 a（但不包含 a 点）右边的半个数轴表示，如图 1—3 所示。这叫无穷区间，用括号表示为（a，$+\infty$），或用不等式 $a<x<+\infty$ 表示。

如果变量 x 能取小于或等于 a 的任何数，这时 x 的变化范围可用

x 轴上 a 点（包括 a 点在内）左方的半个数轴表示，见图 1—4。这也是无穷区间，也可用括号$(-\infty,a]$或不等式 $-\infty<x\leqslant a$ 表示。

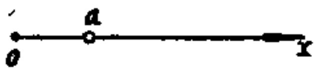


图 1—3

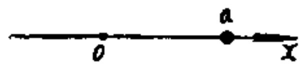


图 1—4

如果变量 x 可取数轴上全部实数，那么变量 x 的变化范围就是整个数轴，如图 1—5 所示，也是无穷区间，也可用括号$(-\infty,+\infty)$表示，或用不等式$-\infty<x<\infty$表示。

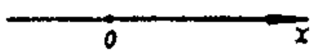


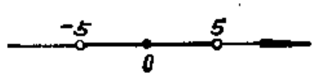
图 1—5

习　题　一

1． 举一个实际例子，说明常量与变量。

2． 为什么有时要把变量换成常量来处理，在什么条件下可以这样作？

3． 把下列区间换成其他形式的表示法：

（1） $0\leqslant x\leqslant 3$　　（2） 

（3） $-a<x<a(a>0)$　　（4） $(-\infty,0)$

（5） $[2,+\infty)$　　（6） $x<2$

（7） $x\geqslant 1$　　（8） x 取任何数值

4． （1）求区间$[-1,2]$的长度；（2）区间的右端点为 1，长度为 3，把这开区间表示出来。

三、函数概念

1． 函数关系

变量之间相互的依赖关系在数学上叫函数关系。公式 $s=65t$ 给出变量 s 依赖 t 而变的函数关系。根据这个关系，如给出时间 t 就可以算出路程 s，当 $t=3$（小时）时，则 $s=65\times3=195$（公里）等等。公式 $A=\pi r^2$ 给出变量 A 依赖变量 r 而变的函数关系。给出半径 r 的值就可按公式确定的规律算出圆面积。

例 3 自由落体的运动规律

在重力作用下，物体从空中自由下落的运动叫做自由落体运动。由物理实验知道，不考虑空气阻力时自由落体的路程公式为

$$s=\frac{1}{2}9.8t^2.$$

式中常量 9.8（米/秒^2）是重力加速度。

这个公式给出了自由落体的路程 s（变量）依赖时间 t（变量）而变化的函数关系。若给出时间 t，就可以按上面公式确定的规律算出下落路程 s。

例 4 测量某段金属丝的电阻随温度变化的规律。

通过实验测得金属丝的电阻 R 随温度 T 而变化的数据如下表：

T（度）	0	1	2	3	4	5	6
R（欧）	2	2.008	2.016	2.024	2.032	2.040	2.048

从这个表我们可以看出，给定一个温度 T 的值就有一个电阻 R 的值与之对应，所以这个表实际上也给出了变量 R 与变量 T 的函数关系（当然只是在表中列出数值的范围内）。这种用列表给出的函数关系，在一定范围内和用公式给出的函数关系一样，同样能使我们掌握电阻随温度而变化的规律。

例 5 为了掌握气温变化的规律，气象台用自动计温器画出了某天 24 小时内的气温变化图（图 1—6）

从图上看出，气温变量 T 与时间变量 t 相互依赖的函数关系。给

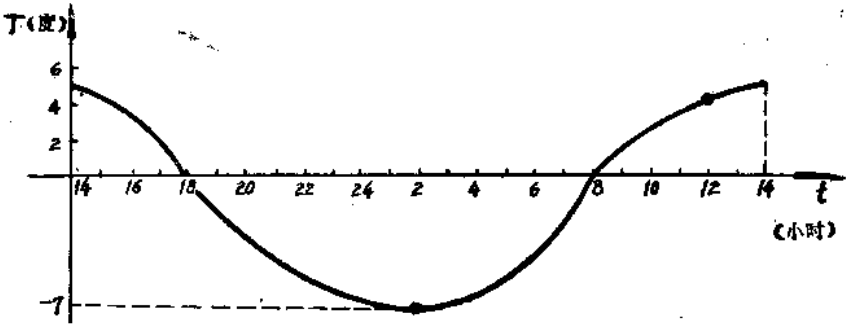


图 1—6

t 一个值，就能量出这个时间的气温 T。如凌晨 2 时的气温是 -7 度，中午 12 时气温是 4 度等。这种由图形给出的变量 T 与变量 t 的函数关系，也能使我们了解气温随时间而变化的规律。

从上面两个例子可以看出函数关系不一定要用公式给出的，有时也可以用表格或图形给出。

2． 函数概念

把上面几个例子概括起来可以得出一些共同的东西：某变化过程中有两个变量，当其中一个变量变化时，另一个变量就按一定的规律跟着变化。我们就把这种规律叫做这两个变量互相依赖的函数关系。为了明确起见，我们给出函数的定义。

定义 **设某变化过程中有两个变量 x 和 y，若对 x 所能取的每一个值，变量 y 就按一定的规律有一个确定的对应值时，那么变量 y 叫做变量 x 的函数，简称 y 是 x 的函数。x 叫自变量，y 叫因变量或函数。自变量的取值范围叫函数的定义域。**

函数的定义中包括两个主要的因素：（1）变量间的函数关系，即变量与变量之间的对应规律，（2）函数的定义域，即使得函数有意义的那些自变量值的全体。如在例 3 的自由落体问题中，函数关系为 $s=\frac{1}{2}9.8t^2$，t 为自变量，s 为因变量或函数，函数 s 的定义域就是从

0 到自由落体着地的时间 T，可以用不等式表示为：$0 \leqslant t \leqslant T$。

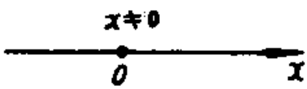
在例 2 中函数关系为 $A=\pi r^2$，r 为自变量，A 为函数，即 A 为 r 的函数。当 $r<0$ 时，圆面积 A 没有意义，当 $r \geqslant 0$ 时，才有意义，所以函数的定义域为 $0 \leqslant r<+\infty$。

又如 y 是 x 的正弦函数：$y=\sin x$。自变量 x 取任何实数时函数 y 都有意义，因此函数的定义域为整个数轴：$-\infty<x<+\infty$。

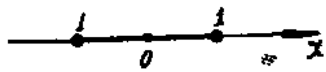
例 6 下列式子表示 y 是 x 的函数，试求其定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\sqrt{1-x^2}$

解：(1) 对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$，x 取不等于 0 的任何值时都可由公式求出 y 的对应值。$x=0$ 时，因为 0 不能做除数，y 没有对应值，函数没有意义。因此，函数的定义域为 $x \neq 0$ 的任何实数，见图 1—7(1)。



(1)



(2)

图 1—7

(2) 对于函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，在 $1-x^2<0$ 时函数没有意义（为什么？），即在 $x<-1$ 与 $x>1$ 时没意义，而 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的任何 x 值都可由公式求出 y 的对应值。因此，函数的定义域是 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，如图 1—7(2)所示。

有时在某种特殊情况下，对于变量 x 取得的每一个值，变量 y 的对应值总是一个常数 C，这时也说 y 是 x 的函数，用式子表示是：

$$y=C$$

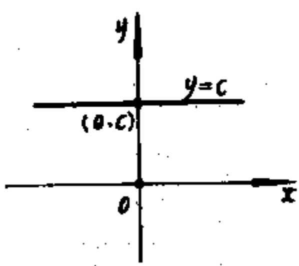


图 1—8

用图形表示是一条平行于 x 轴的直线（图 1—8），在这种意义下，常数也是函数。这种看法在数学中常常用到。

四、函数表示法

在具体问题中，常要求把函数关系表达出来。表达函数关系的方法叫做*函数表示法*。常用的有三种：公式表示法，表格表示法，图形表示法。

1． 公式表示法

在例 1 中的函数 $s=65t$，例 2 中的函数 $A=\pi r^2$，例 3 中的函数 $s=\frac{1}{2}9.8t^2$ 等都是用公式给出的，这种用公式表示函数的方法，叫做函数的*公式表示法*（也叫算式表示法或解析表示法），公式表示法的优点是便于运算。当自变量值给定后，根据公式经过一系列运算，就可求出函数的对应值。例如 $s=65t$，当 $t=2$（小时）时，$s=130$（公里）等。今后我们主要是研究公式表示法的函数。所以我们对函数的公式表示法特别重视，但事物都是一分为二的，这种表示法的缺点是不直观，不能明显地看出函数的变化规律，为了弥补这一缺点我们还常用下面二种表示法。

2． 表格表示法

将一系列自变量的值与它们所对应的函数值列成表格，这就表明了函数对自变量的依赖关系。这种表示法叫做*表格表示法*。例 4 中的电阻与温度的函数关系就是用表格法给出的。它可以直接通过表格查到与自变量相对应的函数值，因此它有使用方便的优点。正因为这样，人们在实践中创造了各种使用方便的函数表，如三角函数表，对数表，平方根表等。这方法的缺点是不便于解析运算。

3． 图形表示法

例 5 中温度 T 是时间 t 的函数关系就是通过图形给出的。这种建立了坐标系，用动点轨迹（图形）表示函数的方法叫做函数的*图形表示法*。图形表示法的优点是直观。一目了然，但运算不方便。

这三种表示法各有优缺点，所以使用时应根据具体情况选择表示方法，有时可将两种或三种方法同时使用，以便取长补短。

例 7 火车启动阶段可看成是等加速运动，设火车启动后一分钟速度达到 15 米/秒，（1）建立火车的速度函数，并作出函数图形；（2）建立火车的路程函数，并作出函数图形。

解：（1）由物理知道，以 $t=0$ 作为初始时刻，初速度为 v_0，加速度为 a 的等加速运动的速度公式为

$$v=v_0+at \tag{1}$$

在我们的问题里，火车是从静止开始运动的，所以初速度 $v_0=0$，$t=60$ 秒的速度为 $v(60)=15$ 米/秒，代入公式（1）后有

$$15=0+a\cdot 60$$

$$\therefore \qquad a=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}\ (\text{米/秒}^2)$$

要求任意时刻 t 的速度 $v(t)$，只需把 $a=\frac{1}{4}$，$v_0=0$ 代入公式（1）中即得

$$v(t)=\frac{1}{4}t(\text{米/秒})$$

这就是所求的速度函数。

由平面解析几何知道，这个函数和 $y=kx$ 形状相同，所以它的图形是一条过原点的直线，如图 1—9 所示。

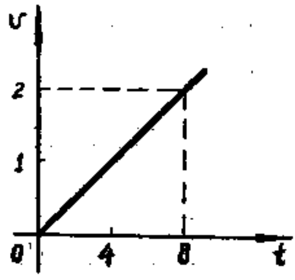


图 1—9

因为 $v=\frac{1}{4}t$ 过坐标原点，所以只要再找一点就能作出这条直线，为此，取 $t=4$（秒），则 $v=\frac{1}{4}\cdot 4=1$（米/秒），于是得点（4，1），将此点与原点相联即得所求直线。从这个图形可以看出

速度随时间均匀地增加，时间每增加1秒，速度增加$\frac{1}{4}$（米/秒）

（2）路程用s表示，则等加速运动的路程公式为

$$s=s_0+\frac{1}{2}at^2$$

s 为 t 秒时火车的位置，s_0 为始发站的位置，在我们的问题里 $s_0=0$（以始发站作为原点），$a=\frac{1}{4}$（米/秒^2），因此

$$s(t)=\frac{1}{8}t^2\ \text{（米）}$$

这就是所求的路程函数。在直角坐标系中，函数 $s=\frac{1}{8}t^2$ 的图形是以 s 轴为对称轴并过原点的一条抛物线。在我们的问题里，时间 t 总是大于或等于零的，所以路程函数 $s=\frac{1}{8}t^2$ 的图形只是抛物线的右半支，如图1—10所示。

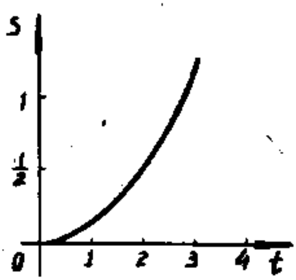


图 1—10

从这个图形可以一目了然地看出随着时间的增加路程是增加得比较快的。

五、列函数式子举例

列函数式子就是用公式表示变量间的函数关系，这多半利用几何关系和物理规律来达到此一目的，举例如下：

例 1 将圆木截成方木时，为了充分利用原材料，需要确定方木的两个边长之间的关系。现有直径 $d=4$ 的圆木，试求将它截成方木

时（图 1—11）方木的两边之间的函数关系。

解：方木的一条边长变化时，另一条边长也相应地变化。设一边长为 x，另一边长为 y，由勾股定理得

$$x^2+y^2=4^2$$

解出得

$$x=\sqrt{4^2-y^2}$$

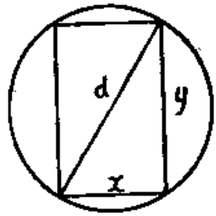


图 1—11

根号前取正号，因为边长 y 不可能是负的。这个公式表示了所求的 y 和 x 间的函数关系，函数的定义域是 $0<x<4$。

初学者有时把边长设为一个具体数，如设一边长为 2，于是求得另一边长为 $\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$，以为这就是两个边长之间的函数关系了，其实不对！因为要找的是变量之间的函数关系，而不是求一个具体数，不能把函数关系理解为自变量取某特定值时的函数值。

为了便于初学者掌握列函数式子的方法，下面将解题步骤归纳一下：

1. 分析问题中哪些是变量，哪些是常量。
2. 用字母表示变量。
3. 利用几何关系、物理规律或其他知识找出变量间的函数关系。

例 2　弹簧受力伸长，由实验可知，伸长量与受力的大小成正比。已知一弹簧受力 4 公斤时，伸长 2 毫米。试列出伸长量与受力之间的函数关系。

解：弹簧所受的力变化时，伸长量也相应地变化。设弹簧所受力用 P（公斤）表示，它对应的伸长量用 l（毫米）表示。由实验知：变量 l 与变量 P 成正比，即

$$\frac{l}{P}=k \text{（}k\text{ 为常数）}$$

或

$$l=kP$$

为了确定比例常数 k，将已知条件：$P=4$ 时 $l=2$ 代入上式得

$$2=k\cdot 4$$

$$k=0.5$$

因此所求函数关系是

$$l=0.5P$$

这个函数的图形是一条过原点的直线，如图 1—12 所示

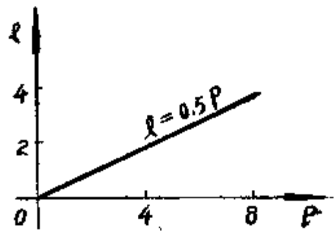


图 1—12

例 2 中已知两个变量成正比，问题只是如何定比例常数，这种情况在物理中常常遇到。

一般地，如果两个变量 y 和 x 成正比，即

$$\frac{y}{x}=k\ （常数）$$

因此 y 和 x 的函数关系可表示为

$$y=kx$$

类似地，如果两个变量成反比，即

$$x\cdot y=k\ （常数）$$

因此 y 与 x 的函数关系可表示为：$y=\dfrac{k}{x}$，即所谓反比函数。

习 题 二

1．一物体沿 s 轴作等速运动，物体的位置用坐标 $s(t)$ 表示。设物体起始（$t=0$ 时）位置是 $s=2$ 米，运动速度是 2 米/秒，试用三种表示法表示物体的路程函数。

2．在漏斗形的量杯上要刻上表示容积的刻度，需要找出溶液深度与对应容积之间的函数关系，现知漏斗的顶角为30°，

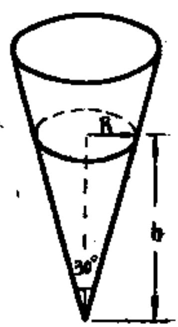


图 1—13