上册

高三数学教学与测试

苏州大学《中学数学》编辑部

光明日报出版社

目 录

六、复　　数

七、排列、组合、二项式定理

八、直线与平面

九、多面体与旋转体

十、直线与圆

十一、圆锥曲线

十二、参数方程、极坐标*

注：打*号的单元，是会考不考内容

一、函　　数

1. 集合的概念

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 若 $a\in N, b\in Z$ 且 $b\neq 0$，则 $\frac{a}{b}\in$ ________；

(2) 第二象限内的点组成的集合表示为________________；

(3) 若集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2, x\in Z\}$，$B=\{y\mid y^2=x, y\in C\}$，当 $x\in A$ 时，集合 B 用列举法表示是________；

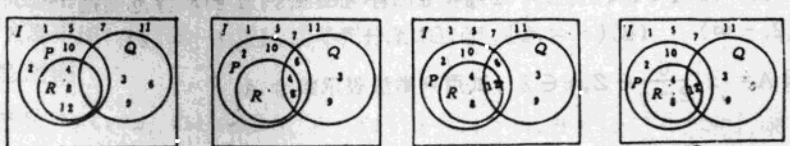
(4) 选用适当的符号（$\in,\notin,\subset,\supset,=$）填空：

3.14 ________ Q，$\left|-\frac{3}{2}\right|$ ________ Q，0 ________ $\{0\}$，0 ________ $\varnothing$，

1 ________ $\{$质数$\}$，$\{-2\}$ ________ $\{$偶数$\}$，$\{0\}$ ________ $\{x\mid x^2+1=0, x\in R\}$.

2. 选择题

(1) 设全集 $I=\{$小于 13 的自然数$\}$，$P=\{$2 的倍数$\}$，$Q=\{$3 的倍数$\}$，$R=\{$4 的倍数$\}$，把 I 中的全部元素填入下图的适当区域，其中全部填对的是　　（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(2) 在以下五个写法中：①$\{0\}\in\{0,1,2\}$；②$\varnothing\subset\{0\}$；③$\{0,1,2\}\subseteq\{1,2,0\}$；④$0\in\varnothing$；⑤$0\cap\varnothing=\varnothing$，错误的写法的个数是　　（　　）

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

3. 下列写法是否正确，说明理由.

ⅰ) $Z=\{$全体整数$\}$；　ⅱ) $R=\{$实数集$\}$；　ⅲ) $\{(0,0)\}=\{0\}$；　ⅳ) $\{(x,y)\mid x=1$ 或 $y=2\}=\{(1,2)\}$.

二、典型例题

1. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=6, x\in N, y\in N\}$，试用列举法表示集合 A.

2. 已知 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$（$n\in N$ 且 $n\geqslant 3$）.(1) 求集合 B 的子集、真子集、非空子集的个数；(2) 求满足条件：$A\subseteq X\subset B$ 的集合 X 的个数.

3. 设 $A=\{x\mid\sqrt{x-1}\leqslant 3-x\}$，$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$，(1) 若 $A\supset B$，求实数 a 的取值范围；(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

4. 已知 $A=\{x, xy, \ln(xy)\}$, $B=\{0, |x|, y\}$, 且 $A=B$. 求 x、y 的值.

三、测试题

1. 填空题

(1) 数集 $\{2a, a^2-a\}$ 中 a 的取值为____________;

(2) 若 $A=\{x \mid x=a^2+2a+1, a\in R\}$, $B=\{x \mid x=b^2-2b, b\in R\}$, 则集合 A、B 之间的关系是____________.

(3) 若 $A\subseteq B$, $A\subseteq C$, $B=\{0,1,2,3\}$, $C=\{0,2,4,8\}$, 则满足上述条件的集合 A 为____________;

(4) 已知 $A=\{x \mid x^2-2x-3=0\}$, $B=\{x \mid ax-1=0\}$, 若 $B\subset A$, 则 a 的值为____________.

2. 选择题

(1) 已知集合 $M=\{x \mid x\geqslant 3\sqrt{3}, x\in R\}$, $a=2\sqrt{7}$, 则下列各式中正确的一个是 (　　)

(A) $a\notin M$　　(B) $\{a\}\in M$　　(C) $a\subset M$　　(D) $\{a\}\subset M$

(2) 设 $A=\{x \mid 1<x<2\}$, $B=\{x \mid x<a\}$, 若 $A\subset B$, 则 a 的取值范围是 (　　)

(A) $[2,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1]$　　(C) $[1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,2]$

3. 设 $A=\{x \mid \frac{6}{2-x}\in Z, x\in Z\}$, 试用列举法表示集合 A.

4. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x \mid x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x \mid x^2-bx+2=0\}$, 若 $B\subset A$, $C\subseteq A$, 求实数 a, b 的值.

5. 已知集合 $A=\{a, a+d, a+2d\}$, $B=\{a, aq, aq^2\}$ (a 为已知常量), 若 $A=B$, 求 d, q 的值.

四、说明

1. 要正确理解集合的概念, 掌握集合中元素的确定性、互异性和无序性, 并注意它们在解题中的应用.

2. 能正确运用有关的术语和符号表示一些简单的集合, 如列举法、描述法和图形表示(文氏图).

3. 空集 $\varnothing$ 是一个特殊重要的集合, 它不含有元素, 是任何一个集合的子集, 任何一个非空集合的真子集, 要注意 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 的区别和集合元素的区别, 掌握有空集参与的集合运算的性质.

4. 注意区分元素对集合的隶属关系与集合之间的包含关系, 正确地使用符号 $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\subset$, $\not\subseteq$, $=$ 等等, 掌握集合的子集和集合相等的概念, 在集合元素不很多时, 会不重复不遗漏地写出所有的子集或真子集.

2. 集合的运算

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 若 $B\cap A=A$, 则 $A\cup B=$ ________; 若 $A\cup B=A$, 则 $A\cap B=$ ________;

(2) I 为全集, A、B 为非空集合, 则

$A\cup\overline{A}=$ ________; $A\cap\overline{A}$ ________; $A\cup\varnothing$ ________; $A\cap\varnothing=$ ________;

$A\cap B$ ________ $A\cup B$; $\overline{A\cup B}$ ________ $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}$ ________ $\overline{A}\cup\overline{B}$;

(3) 已知 $A=\{x\mid x-a>0\}$, $B=\{x\mid x\leqslant 0\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 则 a 的取值范围是________;
若 $A\cap B\neq\varnothing$, 则 a 的取值范围是________.

(4) 已知 $I=R$, $A=\{x\mid -4<x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$, 则 $A\cap B=$ ________; $A\cup B$
$=$ ________; $\overline{A}\cap\overline{B}=$ ____________.

2. 选择题

(1) 非空集合 P、Q、R 满足关系 $P\cup Q=Q$, $Q\cap R=Q$, 则 P、R 的关系是 ( )

(A) $P=R$ (B) $P\subseteq R$ (C) $P\supseteq R$ (D) $P\subset R$

(2) 设 X、Y 是两个非空集合, 则元素 $a\in(X\cup Y)$ 是 $a\in(X\cap Y)$ 的 ( )

(A)充分但不必要条件 (B)必要但不充分条件

(C)充要条件 (D)既非充分又非必要条件

二、典型例题

1. 已知 $I=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$, $A=\{x\mid |x-2|>1\}$, $B=\left\{x\mid \frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\right\}$, 求 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$.

2. 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0, x\in R\}$, $B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0, x\in R\}$, 若 $A\cup B=A$, 求 a 的值组成的集合.

3. 设集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$, $B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A\cap B=\{-3\}$, 求实数 a 的值.

4. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in R\}$, 若 $A\cap R^{-}=\varnothing$, 求实数 p 的取值范围.

三、测试题

1. 填空题

(1) 设 $A=\{x|x>2\}$, $B=\{x|x\leqslant 3\}$, 则 $A\cup B=$ ________; $\overline{A}\cup\overline{B}=$ ________;

(2) 设 $A=\{$底面是正方形的平面六面体$\}$, $B=\{$长方体$\}$, 则 $A\cap B=$ ________;

(3) 已知 $A=\{x|x^2-px-q=0\}$, $B=\{x|x^2+qx-p=0\}$, 且 $A\cap B=\{1\}$, 则 $A\cup B=$ ________.

(4) 设 $I=\{x|x=\frac{1}{2^n}, n\in N\}$, $A=\{x|x=\frac{1}{4^n}, n\in N\}$, 则 $\overline{A}=$ ________.

2. 选择题

(1) 若 I、$\varnothing$ 表示全集和空集, $(\overline{A}\cup B)\subset A$, 则 ( )

(A) $\varnothing\subset A\subset B$ (B) $B\subset A\subset I$ (C) $B=\varnothing$ (D) $A=I$ 且 $B\neq A$

(2) 已知 $A=\{x|x<1\}$, $B=\{x|(x-a)(x-2)\leqslant 0\}$, 且 $A\cup B=\{x|x\leqslant 2\}$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,1)$ (B) $(-\infty,1]$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

3. 设 $I=\{x|1,2,3,\cdots,9\}$, 已知: (1) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,6,7,8\}$, (2) $\overline{A}\cap B=\{3,7\}$, (3) $\overline{A}\cup B=\{1,3,5,6,7,8,9\}$. 画出文氏图并求出集合 A、B.

4. 若 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{1,a^2-a+1\}$, 且 $A\cup B=A$, 求实数 a 的值.

5. 已知 $A=\{x|\frac{3}{2-x}<1\}$, $B=\{x|4x+p<0\}$, 且 $B\subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

6. 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$, $B=\{y|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}, 0\leqslant x\leqslant 3\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$. 求实数 a 的取值范围.

四、说明

1. 要正确理解和掌握集合的子、交、并、补的意义, 并能熟练地进行集合的交、并、补等运算, 在运算时, 应首先化简给定的集合.

2. 为了使集合的子、交、并、补等关系得到直观、形象的显示而利于运算, 要十分重视数形结合、以形助数的解题思想方法的运用. 如数集之间的运算常常借助于数轴进行, 而一般集合借助于文氏图表示集合关系, 往往可以使问题获得简明的解法.

3. 注意等价条件的不同形式. 如 $A\subseteq B$ 与 $A\cap B=A$, $A\cup B=B$ 是等价的.

4. 在用区间来表示集合时, 要注意区间的"开"或"闭".

3. 函数与反函数的概念

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，则 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是________，值域是________；等式 $f[f^{-1}(x)]=x$ 成立的条件是________；等式 $f^{-1}[f(x)]=x$ 成立的条件是________；

(2) 若直线 $y=ax+1$ 与直线 $y=3x+b$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 $a=$____，$b=$____；

(3) 函数 $y=x^2+1(x\leqslant 0)$ 的反函数是________________；

(4) 函数 $y=(0.2)^{-x}+1\ (x\leqslant 0)$ 的反函数是____________________.

2. 选择题

(1) 若函数 $y=f(x)$ 存在反函数，则方程 $f(x)=c$（c 为常数） (　　)

(A)有且只有一个实根　(B)至少有一个实根

(C)至多有一个实根　(D)没有实数根

(2) 下列各组中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象相同是 (　　)

(A) $f(x)=x,\ g(x)=(\sqrt{x})^2$　(B) $f(x)=\ln|x|,\ g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$

(C) $f(x)=1,\ g(x)=x^0$　(D) $f(x)=|x|,\ g(x)=\begin{cases} x & x\in(0,+\infty) \\ -x & x\in(-\infty,0)\end{cases}$

二、典型例题

1. 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(1)=1$，$f[f(2)]=2f^{-1}(4)$，求 $f(x)$.

2. 证明：函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

3. 求函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数，并在同一直角坐标系中画出它们的图象.

4. 求函数 $y=\begin{cases} x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant 1) \\ x^2 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$ 的反函数.

三、测试题

1. 填空题

(1) 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\leqslant 0)$ 的反函数是______________；

(2) 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 0)$，则 $f^{-1}(0)=$______________.

(3) 已知点(1,2)既在函数 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图象上,又在它的反函数的图象上,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

(4) 已知函数 $f(x)=a^x+k$ 的图象经过(1,7)点,又其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象经过点(4,0),则 $f(x)=$ ____________.

2. 选择题

(1) 设函数 $y=f(x)$ 的反函数是减函数,且 $f(x)>0$,则下列函数中为增函数的是 ( )

(A) $y=\sqrt{f(x)}$ (B) $y=\dfrac{1}{-f(x)}$ (C) $y=\log_2 f(x)$ (D) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}$

(2) 若函数 $y=f(x)$ 存在反函数,则下列命题中不正确的是 ( )

(A)函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f(y)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

(B)若 $y=f(x)$ 是奇函数,则 $y=f^{-1}(x)$ 也是奇函数

(C)若 $y=f(x)$ 在其定义域 $[a,b]$ 上是增函数,则 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是增函数

(D)函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象重合

3. 已知 $y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$,求它的反函数 $f^{-1}(x)$.

4. 已知 $f(x)=2x+a$, $g(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+3)$,若 $g[f(x)]=x^2+x+1$,求 a 的值.

5. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,(1)若对于任何 x_1、$x_2\in R^+$,有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,求证: $f(1)=0$;(2)若 $f(x)$ 满足关系式: $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\lg x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

6. 已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x (x>0)$ 和定义在 R 上的奇函数 $g(x)$,当 $x>0$ 时, $g(x)=f(x)$,试求 $g(x)$ 的反函数.

四、说明

1. 在了解映射的概念的基础上,加深对函数等有关概念的理解,能正确运用函数记号和函数表达式讨论函数的有关问题.

2. 若函数在定义域的不同子集上,因对应法则不同而用几个式子来表示函数,这种表示形式的函数叫分段函数,它是一类重要的函数.

3. 如果 y 是 u 的函数,而 u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$, $u=g(x)$, $x\in(a,b)$, $u\in(m,n)$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$, $x\in(a,b)$ 叫做 f 和 g 的复合函数, u 叫做中间变量,它的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

4. 理解反函数的概念,掌握互为反函数的两个函数的图象的关系,会用初等方法求简单的反函数的表达式,其一般步骤是:(1)确定原函数 $f(x)$ 的值域,它是反函数的定义域(注意反函数的定义域不能仅由解析式确定);(2)由 $y=f(x)$ 的解析式解出 $x=f^{-1}(y)$;(3)对换 x, y 得反函数的习惯表达式 $y=f^{-1}(x)$.

4. 函数的解析式

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 已知 $f(x)=\frac{3}{x}$，则 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ ________；

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-2x-15$，则 $f(x)=$ ________；

(3) 已知 $f(x)=9x+1$，$g(x)=x^2$，若 $f[g(x)]=g[f(x)]$，则 $x=$ ________；

(4) 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\in(-\infty,0]\\ 2^x & x\in(0,+\infty)\end{cases}$，那么 $f(x^2)=$ ____________

2. 选择题

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}x-5 & (x\geqslant 6)\\ f(x+2) & (x<6)\end{cases}$ $(x\in N)$，则 $f(3)$ 的值是　(　　)

(A)5　　(B)4　　(C)3　　(D)2

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-4$，那么 $f(x-1)$ 的表达式是　(　　)

(A)x^2-2x+3　　(B)x^2-4x　　(C)x^2-2x-1　　(D)x^2-4x+1

二、典型例题

1. 根据条件，分别求出函数 $f(x)$ 的表达式：

(1) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$；(2) $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x^2}$.

2. 已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$.

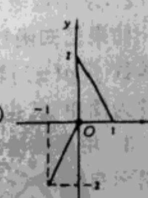
3. 如果 y 是 x 的函数，且 $x=\sqrt{t+1}$，$y=\sqrt{t-1}$ $(t>1)$，求 y 与 x 的函数关系式.

4. 线段 $|BC|=4$，BC 的中点为 M，点 A 与 B，C 两点的距离之和为 6，设 $|AM|=y$，$|AB|=x$，求 $y=f(x)$ 的函数表达式及这函数的定义域.

三、测试题

1. 填空题

(1) 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$ ________；



(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的图象如右图，则在 $[-2,2]$ 上，$f^{-1}(x)$ 的表达式为 ____________；

(3) 已知 $f(x)=3x-1$，$g(x)=2x+3$，$h(x)$ 为 x 的一次函数，若 $f[h(x)]=g(x)$，则 $h(x)=$ ________；

(4) 已知 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，则 $f[f^{-1}(x)]=$ ______.

2. 选择题

(1) 已知一次函数 $y=f(x)$ 的反函数是它自身，则 $f(x)$ 的表达式一定是 ( )

(A) $f(x)=x$ (B) $f(x)=-x+b\ (b\in R)$

(C) $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x+b\ (b\in R)$ (D) $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$

(2) 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是 ( )

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 既是奇函数，又是偶函数 (D) 既不是奇函数，又不是偶函数

3. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$，$x_1x_2\in R$ 且 $x_1\neq x_2$，求证：$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

4. 一个圆柱形容器的底面直径为 d 厘米，高为 h 厘米，现以每秒 s 厘米^3 的速度向容器内注入某种溶液，求容器内溶液高度 y 与注入时间 x(秒)的函数关系式及这函数的定义域.

5. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 的奇函数，当 $x>0$ 时 $f(x)=x^2-2x+3$，试求出 $f(x)$ 在 R 上的表达式，并画出它的图象.

6. 已知二次函数 $y=f(x)=x^2+c$，若点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上，则点 (x,y^2+1) 在 $g(x)=f[f(x)]$ 的图象上.

(1) 求 $g(x)$ 的表达式；

(2) 若函数 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上递减，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 上递增，求实数 λ 的值.

四、说明

1. 求两个变量之间的函数关系时，一是要求出它们之间的对应法则，二是要求出函数的定义域.

2. 求函数表达式的主要方法有待定系数法和换元法.

如果已知函数解析式的构造时，可以用待定系数法(如测试题 1(3)、2(1) 等)；如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 表达式时，常可用换元法求函数 $f(x)$ 的表达式(如例题 1(2) 等)，当已知表达式较为简单时，也可直接用配凑法求解(如例题 1(1)，测试题 1(1) 等).

3. 用参数法求复合函数的解析式(如例题 2, 3)，不仅简便易行，而且它较之其他方法，更能揭示自变量 x 与函数 y 之间的对应关系.

4. 根据实际问题求函数表达式，是应用函数知识解决实际问题的基础，在设定或选定自变量后去寻求等量关系，求得函数表达式，还要注意函数定义域常受到实际问题的制约.

5. 函数的定义域

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{|2x+1|+|x-1|}$ 的定义域是________；

(2) 函数 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{|x|-1}$ 的定义域是________；

(3) 函数 $y=3-\log_3 x$ 的定义域是 $[1,+\infty)$，则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是________；

(4) 函数 $y=\sqrt{\operatorname{tg}x-1}$ 的定义域是________；

(5) 函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 的定义域是________.

2. 选择题

(1) 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则函数 $f(x+a)$ 的定义域为 (　　)

(A) $[a,b]$　(B) $[2a,a+b]$　(C) $[0,b-a]$　(D) $[0,a+b]$

(2) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 (　　)

(A) $-1\leqslant x\leqslant 1$　(B) $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$　(C) $0\leqslant x\leqslant 1$　(D) $\{-1,1\}$

二、典型例题

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$；　(2) $y=\sqrt{9^{-x}-3^{1-x}+2}$

(3) $y=\arccos\dfrac{2|x|}{1+x^2}$　(4) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

2. 求函数 $f(x)=\ln(a^x-k\cdot 2^x)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1, k\in R)$ 的定义域.

3. 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域是 R，求实数 m 的取值范围.

三、测试题

1. 填空题

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}$ 的定义域为________；

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}}$的定义域是__________;

(3) 设 $f(2^x-1)=2x-1$,则 $f(x)$的定义域是__________;

(4) 函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数 $f^{-1}(x)$的定义域是__________;

(5) 已知函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$,则函数 $D(x)$的定义域是__________.

2. 选择题

(1) 已知函数 $y=f(2^x)$的定义域是$[-1,1]$,则函数 $y=f(\log_2 x)$的定义域是 ( )

(A)$(0,+\infty)$ (B)$[\sqrt{2},4]$ (C)$[1,2]$ (D)$\varnothing$

(2) 函数 $f(x)$的定义域是$\overline{R^-}$,则函数 $f[\log_2(x^2-2)]$的定义域是 ( )

(A)$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (B)$[-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3}]$

(C)$(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$ (D)$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

3. 求函数 $y=\dfrac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域.

4. 已知函数 $f(x)$的定义域是$[-1,2]$,分别求函数 $f\left(\dfrac{x}{a}\right)(a\neq0)$和 $f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$的定义域.

5. 已知函数 $f(x)$的定义域是$[-1,3]$,求 $F(x)$的定义域:

(1)$F(x)=f(x)-f(-x)$; (2)$F(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2$.

6. 已知 y 是 x 的函数,$x=2^t+2^{-t}$,$y=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})$,其中 $t\in R$,求函数 $y=f(x)$的解析式及其定义域.

四、说明

1. 求函数定义域,主要涉及以下几种:(1)分式的分母不得为零;(2)偶次方根的被开方式,其值非负;(3)对数函数的真数必须大于零;(4) $y=\mathrm{tg}x$,$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$;(5) $y=\mathrm{ctg}x$,$x\neq k\pi\ (k\in Z)$;(6) $y=\arcsin x$,$|x|\leqslant1$;(7) $y=\arccos x$,$|x|\leqslant1$.此外,当对数或指数函数的底数中含 x 时,底数需大于零且不等于 1;负指数、零指数的底不得为零等,也是不可疏漏的.

2. 如果函数是由一些基本初等函数通过四则运算结合而成的,那么它的定义域是使各部分都有意义的自变量的值集.

3. 设函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$,则复合函数 $y=f[g(x)]$中 x 的取值范围叫做这复合函数的定义域;中间变量 u 的取值范围,即是 $g(x)$的值域,也即 $y=f(u)$的定义域.

6. 函数的值域

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 函数 $y=(0.2)^{|x|}$ 的值域是____________；

(2) 函数 $y=\log_{0.2}(x^2-2x-3)$ 的值域是____________；

(3) 函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 的值域是____________；

(4) 函数 $y=\sqrt{x-x^2}$ 的值域是____________.

2. 选择题

(1) 函数 $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-1}$ $(x\leqslant -1)$ 的反函数的定义域为 (　　)

(A) $(-\infty,0]$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $(-1,1)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(2) 函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是 (　　)

(A) $[-2,2]$　(B) $[1,2]$　(C) $[0,2]$　(D) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

二、典型例题

1. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{5-x}{2x+5}$；　(2) $y=\dfrac{a+bx}{a-bx}$ $(a>b>0,\ -1\leqslant x\leqslant 1)$

2. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$；　(2) $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}$

3. 求函数 $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$ 的值域.

4. 已知 $f(x)$ 的值域是 $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{9}\right]$，试求 $y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

三、测试题

1. 填空题

(1) 函数 $y=\frac{3-x}{1+2x}$ $(x\geqslant 0)$的值域是________________;

(2) 函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$的值域是____________;

(3) 函数 $y=1-\lg(e^x+e^{-x})$的值域是____________;

(4) 若 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$,则 $f^{-1}(x)$的值域是____________.

2. 选择题

(1) 值域是$(0,+\infty)$的函数是 ( )

(A)$y=x^2-x+1$　(B)$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$　(C)$y=3^{\frac{1}{2-x}}+1$　(D)$y=|\log_2 x^2|$

(2) 函数 $y=\log_{0.5}\left(x+\frac{1}{x-1}+1\right)$ $(x>1)$的值域是 ( )

(A)$(-\infty,-2]$　(B)$[-2,+\infty])$　(C)$(-\infty,2]$　(D)$[2,+\infty)$

3. 求下列函数的值域:

(1) $y=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\left\{x\left|\frac{1}{\lg x}\text{有意义}\right.\right\}$;　(2) $y=\frac{x^2+x+2}{2x^2+2x+1}$

4. 求下列函数的值域:

(1) $y=x+\sqrt{x+5}$;　(2) $y=x-\sqrt{1-x^2}$

5. 设函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$的值域为$[-1,4]$,求 a,b 的值.

6. 若函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$的定义域和值域都是$[1,b]$ $(b>1)$,求 b 的值.

四、说明

1. 在函数概念的三要素中,定义域和对应法则是最基本的,值域由定义域和对应法则所确定,在研究函数值域时,既要重视对应法则的作用,又要特别注意定义域对值域的制约作用.

2. 求函数的值域的常用方法有:(1)直接法:利用非负值概念($|x|\geqslant 0$, $x^2\geqslant 0$ 等)、配方法等;(2)逆求法:通过求反函数的定义域求出原函数的值域(如例题 1);(3)"Δ"法:转化为二次方程,用判别式求值域(如例题 2,测试题 3(2)等);(4)换元法,如例题 3,测试题 4 等;(5)利用函数性质:如函数的单调性,最值等,求出函数的值域.

7. 函数的奇偶性

一、基本训练题

1. 填空题

(1) 函数 $f(x)$, $g(x)$的定义域都是$(-\infty, +\infty)$, 若 $f(x)$是奇函数, $g(x)$是偶函数, 则函数 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$是____________函数;

(2) 以下4个函数中: ①$f(x)=2x+1$; ②$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$; ③$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$; ④$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$. 既不是奇函数, 又不是偶函数的是____________;

(3) $f(x)$的定义域为 R, 且 $x\in[0,+\infty)$时 $f(x)$为增函数, 则当 $f(x)$为奇函数时, 它在$(-\infty,0]$上____________; 当 $f(x)$为偶函数时, 它在$(-\infty,0]$上____________;

(4) 已知 $f(x)$是奇函数, 且当 $x>0$时, $f(x)=x(1-x)$, 则当 $x<0$时, $f(x)$的表达式是____________.

2. 选择题

(1) 函数 $y=\frac{1+a^{2x}}{1-a^{2x}}$ $(a>0, a\neq1)$ ( )

(A)是奇函数 (B)是偶函数 (C)既是奇函数, 又是偶函数 (D)是非奇非偶函数

(2) 对于定义在 R 上的任何奇函数 $f(x)$, 下列正确的是 ( )

(A) $f(x)-f(-x)>0$ $(x\in R)$ (B) $f(x)-f(-x)\leqslant0$ $(x\in R)$

(C) $f(x)\cdot f(-x)\leqslant0$ $(x\in R)$ (D) $f(x)f(-x)>0$ $(x\in R)$

二、典型例题

1. 设 $f(x)$是任意一个函数, 且定义域关于原点对称, 判断下列函数的奇偶性:

(1) $F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$; (2) $G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}$; (2) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$; (3) $f(x)=\frac{x}{a^x-1}+\frac{x}{2}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$.

3. 求证函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+5 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-2x-5 & (x<0)\end{cases}$ 是奇函数.

三、测试题

1. 填空题

(1) 一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$是奇函数的充要条件是________; 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$是偶函数的充要条件是____________;

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 为偶函数,它的最小正周期是 3,且 $f(-1)=7$,则 $f(7)=$ ________;

(3) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_2 x$,则 $x<0$ 时,$f(x)$ 的表达式是________;

(4) 若 $f(x)$ 是偶函数,$g(x)$ 是奇函数,且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$,则 $f(x)=$ ________;$g(x)=$ ________.

2. 选择题

(1) 设 $F(x)=\left(1+\dfrac{2}{2^x-1}\right)f(x)$ $(x\neq 0)$ 是偶函数,且 $f(x)$ 不恒等于零,则 $f(x)$ (　　)

(A)是奇函数　(B)是偶函数　(C)既是奇函数,又是偶函数　(D)是非奇非偶函数

(2) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和,如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$,$x\in(-\infty,+\infty)$,那么 (　　)

(A) $g(x)=x$,$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$,$h(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\dfrac{x}{2}$,$h(x)=\lg(10^x+1)-\dfrac{x}{2}$　(D) $g(x)=-\dfrac{x}{2}$,$h(x)=\lg(10^x+1)+\dfrac{x}{2}$

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$;(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$;(3) $f(x)=(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

4. 已知 $f(x)=(m^2-1)x^2+(m-1)x+n+2$,当 m、n 为何值时,$f(x)$ 是奇函数?

5. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数,且 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2x-x^2$,求 $f(x)$ 的表达式,并画出它的图象.

6. 若 $y=2^x-2^{-x}\lg a$ 为奇函数,求实数 a 的值.

四、说明

1. 判断函数的奇偶性,必须严格依照函数的奇偶性定义进行,为了便于判断,常应用定义的等价形式:$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\mp f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ $(f(x)\neq 0)$.

2. 函数的奇偶性与区间密切相关,如 $y=x^2$ 在 R 上是偶函数,但在区间 $[-1,2]$ 上却无奇偶性可言,可见函数定义在数轴上所对应的区间关于原点对称,是函数为奇函数或偶函数的必要条件.

3. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]$ $(a>0)$,则"$f(0)=0$"是"$f(x)$ 为奇函数"的必要条件;若 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,0)\cup(0,a]$ $(a>0)$,则"$f(0)=0$"既不是"$f(x)$ 为奇函数"的充分条件,也不是必要条件.

4. 奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称;反之也真,因此也可利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性.