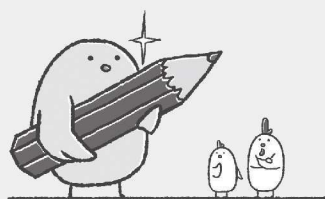


因材施教, 循循善诱教**解题**: 初中数学典型题解题 方法与分析

编著 / 彭 林 童纪元

七年级

- ✓ 摸底自测,规范解答,还原**课堂实景**
- ✓ 因材施教,循循善诱,提供**完整解题方案**
- ✓ 思路拓展,牛刀小试,让您全方位掌握**方法和技巧**



因材施教， 循循善诱教 **解题**： 初中数学典型题解题 方法与分析

编著 / 彭 林 童纪元

七年级



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP) 数据

因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析. 七年级 /
彭林,童纪元编著. —上海:华东理工大学出版社,2015.6

(给力数学)

ISBN 978-7-5628-4240-8

I. ①因… II. ①彭… ②童… III. ①中学数学课—初中—题解
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 072405 号

给力数学

因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析(七年级)

编 著/ 彭 林 童纪元

策划编辑/ 庄晓明

责任编辑/ 刘 婧

责任校对/ 张 波

封面设计/ 袁幼华

出版发行/华东理工大学出版社有限公司

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

(021)64252718(编辑室)

传 真:(021)64252707

网 址:press.ecust.edu.cn

印 刷/ 常熟市华顺印刷有限公司

开 本/ 787 mm×1092 mm 1/16

印 张/ 13.5

字 数/ 317 千字

版 次/ 2015 年 6 月第 1 版

印 次/ 2015 年 6 月第 1 次

书 号/ ISBN 978-7-5628-4240-8

定 价/ 29.80 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn

官方微博 e.weibo.com/ecustpress

天猫旗舰店 <http://hdlgdxcs.tmall.com>

华东理工大学出版社



扫一扫 轻松进入天猫旗舰店

和彭老师学数学(代序)

笔者从未想过能有一本书作序的荣幸,更何况这本书的作者还是笔者的恩师。不过想到与读者朋友谈的是“和彭老师学数学”,便也释然了——毕竟曾在彭老师的课堂上求学6年,笔者还是勉强有自信 and 各位读者朋友分享一些感受的。

笔者自1994年起师从于彭林老师,直至2000年高中毕业。当年笔者所在的班级是数学特长班,数学课的广度和深度在一定程度上超出了课业要求。但是这些并没有成为我们的负担,相反,彭老师的授课方式——更确切地说是教学思维——让我们在求知的同时,掌握了数学思维的方法,受益匪浅。我们毕业后,无论在哪里进一步深造,都是同龄人里数学的佼佼者;无论是走上工作岗位,还是远渡重洋继续深造,也仍在享受着当年从彭老师课堂上收获的“财富”。

因此,笔者认为彭老师编写这套《因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析》的初衷,是想把这些“财富”传播给更多的学生,在答疑解惑、传授解题技巧的同时,潜移默化地培养学生们的数学思维,养成对数学的兴趣。在此,笔者不妨也站在学生的角度赘述几句,与读者朋友分享一点经验与感悟。

一名优秀的数学老师应该是什么样的?彭老师经常说的一句话是:“好的老师,不应该只是自己一个人在课堂上滔滔不绝,而是应该创造一种情境,营造一种氛围,让学生自由地发挥,而老师只需扮演好引导者的角色即可。”师生相处多年,彭老师践行了自己的理念。在他的课堂上,鲜有长篇大论的讲述,更多的是这样的模式:首先,回顾一下之前所学的内容,然后通过某些具体案例,让大家意识到先前所学不足以解决问题。接下来顺理成章地,便是大家一起讨论并找出新的解决方案。在这个过程中,他很少发表意见,仅在某些关键之处点拨一二,引导讨论的方向。最后,当答案水落石出时,彭老师才会加以总结,并就之前的过程作出分析与点评。这样一堂课下来,知识不是他“教”或“灌”给我们的,而是我们自己“想”出来、“学”进去的。这种模式与传统的教学方法相比,孰优孰劣,相信读者朋友已有答案。

他曾经一天布置20张数学作业纸的作业,让我们“咬牙切齿”、叫苦不迭的同时,却也牢固

地掌握了基础知识;他也曾在高三冲刺阶段一节课只分析一道题,虽只有一道题,却讨论出五六种不同的解法,让我们的思路更加开阔.这样的教学理念,也许不是每个人都认同的,但是不能否认的是,即使在高三阶段,我们数学作业的量通常是所有科目里最少的.与之相对应的是,我们六年来获得的数不胜数的各种国家级、市级数学竞赛一、二、三等奖,以及2000年高考时,仅一个小班就有十几名学生考上北京大学、清华大学等名校的骄人成绩.

这套书的每一小节精心设置了“摸底自测题”“因材施教:循循善诱教你解题”“解题思路拓展”“解题能力突破”“彭老师叮嘱”“牛刀小试”等栏目,这些栏目在一定程度上再现了彭老师的数学课堂.

值得一提的是,读者朋友可以在这套书中看到一些超出教材的内容.这样补充一些课本之外的知识,以期让学生开拓思路,学会触类旁通,是大有裨益的.因为在数学学习中,很容易出现“一叶障目,不识泰山”,或是“不识庐山真面目,只缘身在此山中”的情况.此时,适量地接触一些课本外的知识,对于理解课本内容、完善知识体系而言,是一种有益的尝试.甚至,提前介绍一些较深的知识,不要求学生熟练掌握,哪怕只是让学生略有涉猎,也足以提供一种全新的视角与思路,让读者朋友“换种眼光看数学,换个角度学数学”.因此,书中那些新颖的公式定理、有趣的解题技巧、传奇的历史典故、感人的数学人生,都是彭老师多年教学凝练的心血与精华,望读者朋友珍视!

六年师生之谊,情长纸短,一言难尽.笔者希望通过此文的介绍,能让同学们领略彭老师的教学风采之一二,进而迫不及待地学习书中知识.愿《因材施教,循循善诱教解题:初中数学典型题解题方法与分析》这套书作为彭老师课堂的延伸,帮助同学们学好数学、爱上数学!

耿亮^①

① 耿亮:博士,先后就读于北京大学生命科学学院、中国科学院动物研究所,现在中关村某生物科技公司任技术总监。

目录

第一章 有理数

- 一、巧比大小 /2
- 二、巧用分配律 /5
- 三、巧凑整 /7
- 四、巧添(去)括号 /9
- 五、裂项求和 /11
- 六、绝对值的化简 /13
- 七、绝对值的非负性 /15
- 八、与绝对值有关的最值问题 /17
- 九、观察找规律 /20

课堂上听不到的数学传奇 虚伪的零下 /23

第二章 整式的加减

- 一、求整式的值 /26
- 二、由整式展开推理 /29
- 三、定义新运算 /31

课堂上听不到的数学传奇 代数之父——韦达 /35

第三章 一元一次方程

- 一、从整体考虑 /38
- 二、换元法的应用 /41
- 三、含字母系数的一元一次方程 /43
- 四、利用一元一次方程无穷多解解题 /47
- 五、含绝对值的一元一次方程 /49
- 六、合理地选设未知数 /52
- 七、相等关系是列方程的关键 /55

八、设而不求的未知数 /58

九、商品销售问题 /61

课堂上听不到的数学传奇 古代“方程”一词的含义 /64

第四章 几何图形初步

一、三视图 /68

二、简单的计数问题 /73

三、与线段长度有关的计算 /77

四、与角有关的计算 /83

五、时针与分针的角度问题 /89

课堂上听不到的数学传奇 逻辑体系的奇迹——欧几里得几何 /93

第五章 相交线与平行线

一、识别同位角、内错角、同旁内角 /96

二、巧构平行线 /99

三、垂线性质的应用 /103

四、巧用平移 /106

五、等积变形 /108

课堂上听不到的数学传奇 “几何无王者之道” /112

第六章 实数

一、算术平方根的非负性 /114

二、实数大小的比较 /117

课堂上听不到的数学传奇 漫步苹果树下 /121

第七章 平面直角坐标系

一、坐标与距离 /123

二、坐标平面下的面积问题 /127

三、探究点的坐标变化规律 /133

课堂上听不到的数学传奇 蜘蛛触发了灵感 /137

第八章 二元一次方程组

- 一、整体处理 /140
- 二、连比式,看比值 /142
- 三、变量多,巧相加 /145
- 四、换元法的基本思想 /147
- 五、待定系数法 /150
- 六、解一次方程组的相反问题 /152
- 七、运用错解求正解 /154
- 八、含字母系数的二元一次方程组 /158
- 九、含绝对值的方程组 /161

课堂上听不到的数学传奇 奇特的墓志铭 /164

第九章 不等式与不等式组

- 一、含字母系数的不等式 /166
- 二、含字母系数的不等式组 /169
- 三、不等式(组)的整数解 /171
- 四、含绝对值的不等式 /173
- 五、方程与不等式 /175

课堂上听不到的数学传奇 用数学书写的人生格言 /177

第十章 数据的收集、整理与描述

课堂上听不到的数学传奇 正确保护扇贝 /187

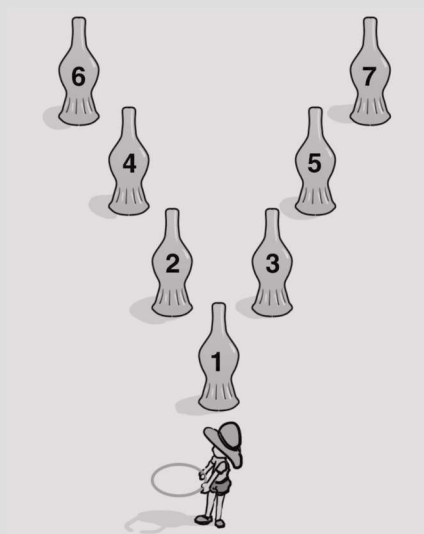
参考答案

参考答案 /188

后记

后记 数学使你更聪明、更具有创造力 /205

第一章 有理数



一 巧比大小

摸底自测题

比较 -0.42 和 $-\frac{3}{7}$ 的大小.

• 因材施教:循循善诱教你解题 •

解法 1 因为 $|-0.42| = 0.42 = \frac{21}{50} = \frac{147}{350}$, $|\frac{3}{7}| = \frac{3}{7} = \frac{150}{350}$,

$$\text{又 } \frac{147}{350} < \frac{150}{350}$$

$$\text{所以 } -0.42 > -\frac{3}{7}$$

解法 2 因为 $|-0.42| = 0.42 = \frac{21}{50}$, $|\frac{3}{7}| = \frac{3}{7} = \frac{21}{49}$

$$\text{又 } \frac{21}{50} < \frac{21}{49}$$

$$\text{所以 } -0.42 > -\frac{3}{7}$$

解法 3 因为 $|-0.42| = 0.42$, $|\frac{3}{7}| = \frac{3}{7} = 0.428571\cdots$

$$\text{又 } 0.42 < 0.428571\cdots$$

$$\text{所以 } -0.42 > -\frac{3}{7}$$

比较两个负数的大小时,可先比较它们的绝对值大小,再根据“两个负数,绝对值大的反而小”得出结论.

• 解题思路拓展 •

一般情况下,在比较几个分数的大小时,可以采用通分的方法,将分母统一,然后通过比较分子进行判断.但根据具体数值的特征,也可以“一反常态”,另辟蹊径,将分子统一,然后通过

比较分母进行判断.

• 解题能力突破 •

例 1 比较大小: $\frac{3}{14}, \frac{6}{29}, \frac{1}{5}, \frac{12}{59}, \frac{4}{19}$.

◉ ◀ 解题策略 ▶ ◉

若先统一分母再比较大小,运算就非常复杂;若反其道而行之,则事半功倍.

◉ ◀ 规范解答 ▶ ◉

因为 $\frac{3}{14} = \frac{12}{56}, \frac{6}{29} = \frac{12}{58}, \frac{1}{5} = \frac{12}{60}, \frac{12}{59}, \frac{4}{19} = \frac{12}{57}$

又 $\frac{12}{56} > \frac{12}{57} > \frac{12}{58} > \frac{12}{59} > \frac{12}{60}$

所以 $\frac{3}{14} > \frac{4}{19} > \frac{6}{29} > \frac{12}{59} > \frac{1}{5}$

例 2 比较大小: $-\frac{16}{15}, -\frac{12}{11}, -\frac{96}{91}, -\frac{32}{29}$.

◉ ◀ 解题策略 ▶ ◉

统一分子较为方便.

◉ ◀ 规范解答 ▶ ◉

因为 $\frac{16}{15} = \frac{96}{90}, \frac{12}{11} = \frac{96}{88}, \frac{96}{91}, \frac{32}{29} = \frac{96}{87}$

又 $\frac{96}{87} > \frac{96}{88} > \frac{96}{90} > \frac{96}{91}$

即 $\frac{32}{29} > \frac{12}{11} > \frac{16}{15} > \frac{96}{91}$

所以 $-\frac{32}{29} < -\frac{12}{11} < -\frac{16}{15} < -\frac{96}{91}$

例 3 比较大小: $\frac{1996}{1997}, \frac{1997}{1998}, \frac{1998}{1999}, \frac{1999}{2000}$.

◉ 解题策略 ◉

掌握某些分数的性质，也可以丰富比较大小的方法，本题就可以利用如下所述的分数性质来比较大小：

(1) 一个正的真分数的分子和分母加上同一个正数，结果仍为真的真分数，并且比原真分数大。

(2) 一个正的假分数的分子和分母加上同一个正数，结果仍为正的假分数，并且比原假分数小。

◉ 规范解答 ◉

因为 $\frac{1996}{1997}$ 是真分数

$$\text{所以 } \frac{1996}{1997} < \frac{1996+1}{1997+1} < \frac{1996+2}{1997+2} < \frac{1996+3}{1997+3}$$

$$\text{所以 } \frac{1996}{1997} < \frac{1997}{1998} < \frac{1998}{1999} < \frac{1999}{2000}$$

彭老师叮嘱

换个角度思考，把分数的分子化为相同，这种比较大小的方法就是逆向联想，它可以开拓我们的思维。

牛刀小试

1. 比较大小：

(1) $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{7}{9}$

(2) $\frac{23}{25}$ 和 $\frac{27}{29}$

(3) $-\frac{3}{10}$ 和 $-\frac{9}{16}$

(4) $-\frac{7}{24}$ 和 $-\frac{5}{22}$

(5) $\frac{9}{5}$ 和 $\frac{7}{3}$

(6) $\frac{25}{24}$ 和 $\frac{21}{20}$

(7) $-\frac{33}{30}$ 和 $-\frac{40}{37}$

(8) $-\frac{81}{55}$ 和 $-\frac{79}{53}$

2. 比较大小：

(1) $\frac{4}{9}, \frac{8}{17}, \frac{12}{25}, \frac{6}{13}$

(2) $-\frac{3}{7}, -\frac{9}{20}, -\frac{2}{5}, -\frac{9}{22}$

(3) $\frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{5}{4}, \frac{20}{19}$

(4) $-\frac{9}{7}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{15}{11}$

摸底自测题

计算： $5\frac{5}{6}\left(3\frac{1}{6}-9\frac{1}{2}\right)\times\left(-1\frac{1}{35}\right)\div\left(-1\frac{1}{18}\right)$.

• 因材施教：循循善诱教你解题 •

注意使用乘法分配律 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 简化计算.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{35}{6}\left(\frac{19}{6}-\frac{19}{2}\right)\times\frac{36}{35}\times\frac{18}{19} \\ &= \left(\frac{19}{6}-\frac{19}{2}\right)\times\frac{6}{19}\times 18 \\ &= \left(\frac{19}{6}\times\frac{6}{19}-\frac{19}{2}\times\frac{6}{19}\right)\times 18 \\ &= (1-3)\times 18 \\ &= -2\times 18 \\ &= -36\end{aligned}$$

• 解题思路拓展 •

运算的目的不仅仅是求出答数,还应当把注意力集中在求解过程中,这样就可以更好地培养思维能力.下面就重点介绍如何运用分配律简化运算.

• 解题能力突破 •

例 1 计算： $39\frac{18}{19}\times(-38)$.

○ ← 规范解答 → ○

$$\text{原式} = \left(40 - \frac{1}{19}\right) \times (-38)$$

$$= -40 \times 38 + \frac{1}{19} \times 38$$

$$= -1520 + 2$$

$$= -1518$$

例 2 计算： $47.5 \times (-0.1998) - 0.475 \times (-9.98)$.

规范解答

$$\text{原式} = 4.75 \times (-1.998) - 4.75 \times (-0.998)$$

$$= 4.75 \times (-1.998 + 0.998)$$

$$= 4.75 \times (-1) = -4.75$$

例 3 计算： $\left(-4\frac{3}{17}\right) \times 2\frac{2}{15} - 8\frac{3}{17} \times 14\frac{13}{15} - 4 \times \left(-14\frac{13}{15}\right)$.

规范解答

$$\text{原式} = \left(-4\frac{3}{17}\right) \times 2\frac{2}{15} - 14\frac{13}{15} \times \left(8\frac{3}{17} - 4\right) \text{ (逆向使用乘法分配律)}$$

$$= \left(-4\frac{3}{17}\right) \times 2\frac{2}{15} - 14\frac{13}{15} \times 4\frac{3}{17}$$

$$= 4\frac{3}{17} \left(-2\frac{2}{15} - 14\frac{13}{15}\right) \text{ (逆向使用乘法分配律)}$$

$$= 4\frac{3}{17} \times (-17) = \frac{71}{17} \times (-17) = -71$$

彭老师叮嘱

逆向使用乘法分配律 $ma + mb + mc = m(a + b + c)$ 可以简化运算，如例 2 和例 3.

牛刀小试

计算： $3\frac{1}{7} \times \left(3\frac{1}{7} - 7\frac{1}{3}\right) \times \frac{7}{22} \div \left(-1\frac{1}{21}\right)$.

三

巧凑整

摸底自测题

计算: $999994 + 99995 + 9996 + 997 + 98 + 9$.

• 因材施教:循循善诱教你解题 •

经过仔细观察,把每个加数的个位数分别凑成 10,就很快得到和数为 1111110,然后再减去凑整数 10 时所加的数之和,即 $1111110 - (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$,正确的结果就一目了然.显然,这比逐项相加容易多了.

• 解题思路拓展 •

由于整一、整十、整百、……计算起来比较方便,所以在解题过程中,一般把小数、分数凑成整数,把不是 10 的倍数的整数凑成整十,依此类推.

• 解题能力突破 •

例 1 计算: $5\frac{1}{2} + 1\frac{3}{5} + 3\frac{3}{8} + 2\frac{1}{6} + 6\frac{2}{5} + 4\frac{1}{3} + \frac{5}{8}$.

◉ 解题策略 ◉

此题如果先通分,后相加,就很麻烦.我们根据分数单位 $\frac{1}{n}$ 凑 n ,利用加法交换律和结合律,使分数加法变为整数加法.

◉ 规范解答 ◉

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(5\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}\right) + \left(1\frac{3}{5} + 6\frac{2}{5}\right) + \left(3\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) \\ &= 12 + 8 + 4 = 24\end{aligned}$$

例 2 计算： $1991 \div 25 - 1992 \times 1.25 + 1993 \times 0.5$.

规范解答

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1991 \times 4 \div (25 \times 4) - (1992 \div 8) \times 1.25 \times 8 + (1993 \div 2) \times 0.5 \times 2 \\ &= (1991 \times 4) \div 100 - (1992 \div 8) \times 10 + (1993 \div 2) \times 1 \\ &= 79.64 - 2490 + 996.5 \\ &= 76.14 - 2490 + 1000 \\ &= -1413.86 \end{aligned}$$

彭老师叮嘱

例 1 虽然利用了加法的交换律和结合律，但解题的思路主要是把几个分数之和凑成整数.

例 2 虽然从表面上看不出凑整的可能，但应注意到 $25 \times 4 = 100$, $1.25 \times 8 = 10$, $0.5 \times 2 = 1$. 对原式中的数目进行凑整，简化计算.

牛刀小试

1. 计算： $4.4 \times 0.5 + 6.6 \div 0.25 + 8.8 \times 1.25$.
2. 计算： $(-0.625)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^7 \times 8^4 \times \left(-1\frac{1}{4}\right)^8$.
3. 计算： $8\frac{4}{7} \div 4 + 129 \div 0.75 + 6\frac{1}{5} \times 25$.
4. 计算： $375 \times 132 \times 404$.

四

巧添(去)括号

摸底自测题

计算: $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots+97+98-99-100$.

• 因材施教:循循善诱教你解题 •

经过观察,不难发现任何相邻两项奇数(或偶数)之和或为2,或为-2. 如果将1、3项,2、4项,……,以分别编组的方式计算,就能得到50个-2.因此,可以通过添括号,把有50个相同加数的加法变为乘法.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1-3) + (2-4) + (5-7) + \cdots + (97-99) + (98-100) \\ &= \underbrace{(-2) + (-2) + \cdots + (-2) + (-2)}_{50\text{个}} \\ &= -100\end{aligned}$$

• 解题思路拓展 •

在有理数运算中,可以根据运算法则和运算律,去掉或者添上括号,以此来改变运算的次序,使复杂的问题变得简单.

• 解题能力突破 •

例 1 计算: $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{8192} - \frac{1}{16384}\right)$.

○ 解题策略 → ○

把算式中的所有小括号去掉.因为括号前面都是减号,所以括号中各数都要改变符号,这时恰好使各数相消了,整个算式只剩下 $\frac{1}{16384}$.