21世纪普通高等教育系列规划教材

经济数学

Jingji shuxue

李富江◎主审

叶春辉　王兰兰◎主编

电子科技大学出版社

经 济 数 学

主　审　李富江

主　编　叶春辉　王兰兰

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/叶春辉,王兰兰主编.—成都:电子科技大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5647-0789-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①叶… ②王… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038978 号

经济数学

叶春辉 王兰兰 主 编

出 版	电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编:610051)
策划编辑	张 鹏
责任编辑	张 鹏
主 页	www.uestcp.com.cn
电子邮箱	uestcp@uestcp.com.cn
发 行	新华书店经销
印 刷	北京华创印务有限公司
成品尺寸	185mm×260mm 印张 21 字数 千字
版 次	2011 年 3 月第一版
印 次	2011 年 3 月第一次印刷
书 号	ISBN 978-7-5647-0789-7
定 价	

◆ 本社发行部电话:028—83202463;本社邮购电话:028—83208003。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误,请寄回印刷厂调换。

内 容 简 介

本书根据高职院校数学基础课程的大纲编写而成，内容设计简明，结构体系完整，它具有两大特点：一是结合数学建模体现应用为目的、以必须够用为度的原则；二是结合专业知识与数学知识培养学生的实践能力，其中包括函数极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、常微分方程、线性规划初步、线性代数、概率与数理统计等内容。并以实用为突出特点编配例题和习题以及实训项目的精心选配，着力培养学生的数学素质、创新意识及运用数学工具解决实际问题的能力，拓展数学与专业知识相结合的思路。此外，我们结合现代教学的要求，制作了多媒体光盘，其中包括多媒体教案、习题讲解、综合实训等模块，供教师在教学和实训过程中使得“教、学、做”有机结合。书后附有初等数学常用公式、常用平面与曲线及习题答案及提示。

前　言

为落实高职院校培养高素质技能型人才的需要，更好地贯彻十六号文件，在总结全国高职院校数学课程教学改革经验的基础上，编写了适应高职院校各专业的《经济数学》教材。

一、编写原则

1. 依据教育部高职院校《基本要求》编写此教材，内容覆盖高职院校各专业对经济数学的需求，对超出《基本要求》的内容在相应的章节前加 * 标明。

2. 注重贯彻“轻理论、重应用”的教学原则。轻理论是对概念、原理以基本了解为要求，不重论证；强化应用要落实到使学生能方便地用所学数学方法求解数学模型上以及根据专业不同应配有相关专业的实例进行补充。

3. 对难度较大的基础理论不追求严格的论证，只作简单的几何说明，以够用为度。

4. 适度注意数学自身的系统性与逻辑性。

5. 特别注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换。

6. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。

二、编写特色

高职院校的数学教育需培养如下四方面的能力：一是用数学思维分析解决实际问题的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力，四是用数学知识解决所学专业上的一些问题。本书充分体现了上述教学思想，具有 10 大特点：

1. 本教材将采用实例引题，让学生带着问题学习，有目的的学习；接着是数学理论基础知识；最后实例解题讨论部分，巩固知识部分。这样既结合具体实例突出“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，又加强了对学生应用意识、兴趣、能力的培养。

2. 在本书中结合具体教学内容编入有关数学模型，加强了学生用数学知识与现实生活中的例子相互转化的思维分析解决问题，培养学生求解数学模型的能力的训练，对培养学生用计算机解决问题的兴趣、能力和调动学生学习的积极性具有重要作用。

3. 突出强调数学知识与专业知识的连接，提高学生学习数学的目的性。

4. 结合具体内容进行数学建模训练，注重双向翻译能力的培养。

5. 对本课程的一些难点(如极限的定义、中值定理等)结合高职院校的特点，做了深

入浅出的讲述，强调了直观描述和几何解释，适度淡化了理论证明或推导，强化了几何说明，如去掉了极限的 ε-δ 语言及微分中值定理的证明代之以几何描述，这样较适合高等职业教育的施教对象。

6. 将分散于微积分各部分的数值计算集中在一起，并适当扩充后用数值分析的观点结合计算机进行处理。不但优选了微积分在几何、物理方面的应用，而且挖掘了微积分在经济领域中的应用，编入了经济应用实例。

7. 增加了线性规划的部分内容，扩展了线性规划的应用意识，增加了概率与数理统计以及线性代数。

8. 每节末配有基础练习，每章末专设了实例讨论题以及相关升本的练习题，既方便了习题课的开设及学生的复习巩固，又在专业方面进行相关的引导，给有意向继续深造的学生提供了一个学习方向。

9. 本教材配有电子课件教学，包括基本内容、综合实例分析、习题详解。

10. 在保证《基本要求》的条件下，充分吸收了同类学校的教改成果，对教学有指导意义。

三、适用范围

本书可作为高职院校、高等专科类院校、成人高等院校及本科二级院校等各专业经济数学教材，也可供经济管理类专业选用，还可作为技术学术研究人员的经济数学知识更新教材。

由于水平有限，时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者斧正。

编　者

2010 年秋

目　　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线性代数

第三部分　概率与数理统计

第一部分　微　积　分

第一章　函数、极限与连续

本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，它是高等数学的主要研究对象，是刻画变量关系的数学模型，为技能训练打下基础。极限概念是微积分的理论基础，运用极限方法是学好微积分的关键。连续是函数的一个重要性态，本章将在理解函数概念的基础上，介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础。

第一节　函数—变量相依关系的数学模型

案例：路程问题

某人骑车到离家 20km 的单位上班，上午 8 点他以 12km/h 的速度匀速前进，半小时后发现未带资料，便以 18km/h 匀速原路返回，在家停留 10min，找到资料后，以 15km/h 的匀速前进，请用尽可能多的方法表示此人离家的距离。

由此我们引出函数的概念。

一、常量与变量

变量的定义：

我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，我们把其称之为**常量**；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们则把其称之为**变量**。

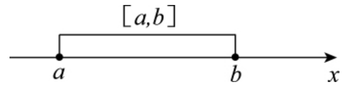
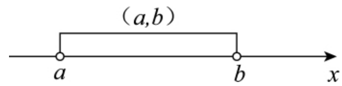
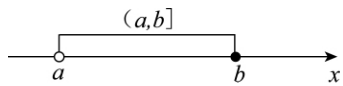
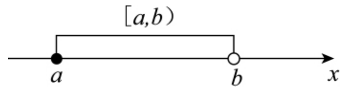
注：在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们则把它看作常量。

变量的表示：

如果变量的变化是连续的，则常用**区间**来表示其变化范围。

在数轴上来说，**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体。如表 1-1 所示.

表 1-1-1　变量的表示

区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	
			

以上我们所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

$(a,+\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$a\leqslant x<+\infty$；

$(-\infty,b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$-\infty<x<b$；

$(-\infty,+\infty)$：表示全体实数，也可记为：$-\infty<x<+\infty$.

注：其中，$-\infty$和$+\infty$分别读作" 负无穷大" 和" 正无穷大" ，它们不是数，仅仅是记号.

二、邻域

邻域：设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集$\{x\,|\,|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心和半径. 有时用 $U(a)$表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$ ，称为点的空心 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$.

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),\overset{0}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)U(a,a+\delta).$$

三、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型。

函数定义：

如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**。变量 x 的变化范围叫做这个**函数的定义域**。通常，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**。

注：为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$、$y=F(x)$等等来表示. 这里的字母"f"、"F"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的.

注：如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。这里我们只讨论单值函数。

四、函数的常用表示法

a)　表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法。

例：在实际应用中，我们经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数。

b)　图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法。一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量。

例：直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆用图示法如图 1-1-1 所示：

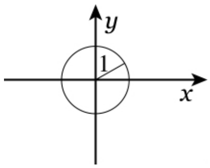


图 1-1-1　图示法

c)　解析法(公式法)：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法。例：直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$

根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可以分为显函数、隐函数和分段函数三种.

1)显函数：函数由的解析式表达式直接表示。例如：

2)隐函数：函数的自变量与因变量的对应关系由方程来确定。例如：

$$\text{In}y=\sin(x+y)$$

2)分段函数：函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式。

例 1　设 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

解　$y=f(x)=\text{f}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

例 2　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，所以 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$，
所以 $f(x)=x^2-5x+4$.

五、函数特性

1. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界，否则称无界。

注意：一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数

例题：函数 $cosx$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内随着 x 的增大而增大，即：对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调增加**的。

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内随着 x 增大而减小，即：对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调减小**的。

例题：函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的，在区间$(0,+\infty)$上是单调增

加的。

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$叫做偶函数;

如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$叫做奇函数。

注意:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称。

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 l,使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$叫做**周期函数**,l 是 $f(x)$的周期。

注:我们说的周期函数的周期是指最小正周期。

例题:函数 $\sin x$,$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\mathrm{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数。

习题 1.1

1. 求函数 $y=\dfrac{1}{x}\mathrm{In}(x+1)$的定义域。

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f(0)$,$f(-x)$,$f(x)+1$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$和$\dfrac{1}{f(x)}$。

3. 若 $f(x+1)=x^2+2x-3$,求 $f(x)$。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & 当\ x>1\end{cases}$,求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(1)$和 $f(3)$。

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(2)$f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$;

(3)$f(x)=x^2-3x+1$;　　(4)$f(x)=|\sin x|$;

(5)$f(x)=x+\sin x$;　　(6)$f(x)=x(x-1)(x+1)$。

6. 旅客乘坐飞机可免费携带不超过 20kg 的行李,若超过 20kg,每千克交运费 a 元,试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系。

第二节　初等函数

一、反函数

反函数的定义：

设有函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x=\varphi(y)$来表示，称为函数 $y=f(x)$的反函数.

注：由此定义可知，函数 $y=f(x)$也是函数 $x=\varphi(y)$的反函数。

反函数的存在定理：

若 $y=f(x)$在(a,b)上严格增(减)，其值域为 $\mathbf{R}$，则它的反函数必然在 $\mathbf{R}$ 上确定，且严格增(减).

注：严格增(减)即是单调增(减).

例题：$y=x^2$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数不是严格增(减)，故其没有反函数。如果我们加上条件，要求 $x\geqslant0$，则对 $y\geqslant0$、$x=\sqrt{y}$就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant0$ 时的反函数。即：函数在此要求下严格增(减).

反函数的性质：

在同一坐标平面内，$y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

例题：函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的。如图 1-2-1 所示：

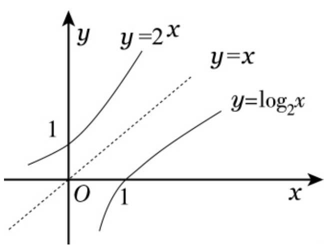


图 1-2-1

二、基本初等函数

微积分的研究对象，主要为初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的。

我们最常用的有以下几种基本初等函数：

常数函数 $y=c$、

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$、

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、

对数函数 $y=\log a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$、

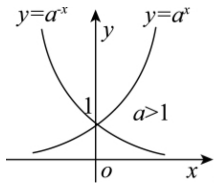
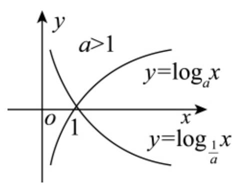
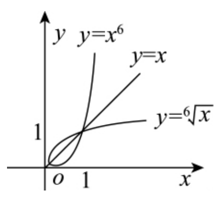
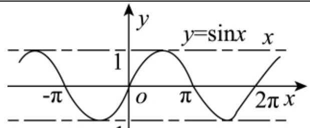
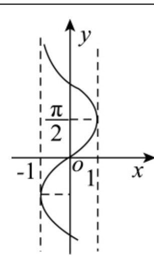
三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$

以上函数统称为**基本初等函数**. 很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数.

下面用表格 1-2-1 来把它们总结一下：

表 1-2-1

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq1)$		a)　不论 x 为何值，y 总为正数； b)　当 $x=0$ 时，$y=1$
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$		a)　其图形总位于 y 轴右侧，并过(1,0)点 b)　当 $a>1$ 时，在区间(0,1)的值为负；在区间(－,＋∞)的值为正；在定义域内单调增
幂函数	$y=x^a$ a 为任意实数	这里只画出部分函数图形的一部分。	令 $a=m/n$ a)　当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数； b)　当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数； c)　当 m 奇 n 偶时，y 在 $(-\infty,0)$ 无意义
三角函数	$y=\sin x$(正弦函数) 这里只写出了正弦函数		a)　正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 b)　正弦函数是奇函数且
			$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
反三角函数	$y=\arcsin x$(反正弦函数) 这里只写出了反正弦函数		a)　由于此函数为多值函数，因此我们此函数值限制在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上，并称其为反正弦函数的主值

三、复合函数

定义 1　若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的函数值的全部或部分在 $f(u)$的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数. 我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量。

注：并不是任意两个函数就能复合；复合函数还可以由更多函数构成。

例如：函数与函数是不能复合成一个函数的。

因为对于的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2)使 $y=\arcsin u$ 都没有定义。

定义 2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\frown R_\varphi\neq\varphi$，若则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量。

提醒：(1)把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；

(2)把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或者基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1　设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解　$f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$，$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$。

例 2　设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解　$y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

例 3　函数 $y=e^{\sin x}$是由哪些简单函数复合而成的？

解　令 $u=\sin x$，则 $y=\mathrm{e}u$，故 $y=e^{\sin x}$是由 $y=\mathrm{e}u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

例 4　将 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$分解成基本初等函数的复合.

解　所给函数是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=w^2$，$w=\sin x$ 四个函数复合而成.

四、初等函数

由基本初等函数，经过有限次四则运算及有限次复合而成的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

在工程技术上常用的初等函数有双曲函数，分别为：

双曲正弦函数　$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数　$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数　$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$

分段函数一般不是初等函数。今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数。

例 5　分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$.

解　令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^u$；再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$.

故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 复合而成的.

习题 1.2

1. 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

2. 函数 $y=5^{(2x-1)^2}$ 是由哪几个函数复合而成？

3. $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=7x-5$；　　(2) $y=1+\lg(x+2)$.

5. 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(x)$。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, x<1\\ 0, x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

7. 下列函数由哪些简单函数复合而成？

(1) $y=\cos 5x$；　　(2) $y=\sin^3 x$；

(3) $y=e^{\sin 3x}$；　　(4) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$；

第三节　极限的概念——从截丈问题谈起

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的。例如，我国春秋战国时期的哲学家庄子(公元前 4 世纪)在《庄子 · 天下篇》中对"截丈问题"有一段名言："一尺之棰，日截其半，万世不竭。"其中也首先给出数列极限的定义。

一、数列的极限

两个数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots. \tag{2}$$

在数轴上表示(如图 1-3-1、图 1-3-2 所示).

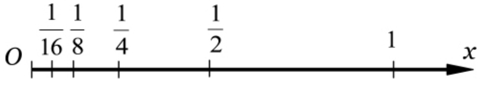


图 1-3-1

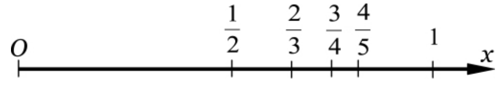


图 1-3-2