

部 定 大 學 用 書

工 程 數 學

(上 冊)

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行



版權所有

翻印必究

中華民國六十一年十月臺初版
中華民國六十五年九月臺四版

部定大學用書 工程數學 全二冊

上册 基本定價 精八元五角
平七元

(外埠酌加運費滙費)

主編者 國立編譯館大學用書編審委員會

編著者 朱越生

出版者 國立編譯館

發行人 黎元譽

發行印刷 正中書局

(臺灣臺北市衡陽路二十號)

海外總經銷 集成圖書公司

(香港九龍油麻地北海街七號)

海風書店

(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番點)

東海書店

(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號(6651)泰
(1000)

部 · 定 大 學 用 書

工 程 數 學

(下 冊)

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行

工 程 數 學

(上 冊)

章 次	內 容	頁次
序言		
第 一 章	概論，基本項目之複習及其他	1
第 二 章	無窮級數與冪級數	151
第 三 章	由定積分所定義之特殊函數	211
第 四 章	常微分方程總論及一階常微分 方程	275
第 五 章	高階線性常微分方程，聯立常微 分方程及全微分方程	409
第 六 章	Fourier(福里哀)氏級數，積分式 及變換式	579
第 七 章	常微分方程之冪級數解法及數 種特殊函數	651
第 八 章	Laplace (拉伯拉斯)氏變換及其 在常微分方程中之運用	811

第一章

概論，基本項目之複習及其他

目次	內 容	頁次
1.1	工程或實際問題之一般性數學處理手續	1
1.2	近似計算之準確度	4
1.3	觀察或度量之誤差及精密度	21
1.4	經驗公式	47
1.5	插值法	64
1.6	數值積分法	78
1.7	多變數函數之微分	94
1.8	複數及複變數	131

工 程 數 學

章 次	內 容	頁 次
下冊		
第 九 章	向量分析	903
第 十 章	矩陣	1149
第 十 一 章	複變數函數	1359
第 十 二 章	偏微分方程	1639
附錄：英漢名詞對照表		1905
中譯姓氏錄		1925
參考書目		1927

第 九 章

向 量 分 析

目次	內 容	頁 次
9.1	基本觀念，有關定義以及向量之基本性質與代數運算。.....	903
9.2	向量之點積，叉積及其應用。.....	928
9.3	向量～點函數之微分，積分，線性常微分方程以及曲線之稟性。.....	958
9.4	向量在力學中之數項應用。.....	979
9.5	向量偏微分運算子 ∇ 及其運用。.....	1006
9.6	曲線座標系中之向量分析及正交曲線座標系。.....	1031
9.7	向量函數之線積分，平面內之面積分及（格林）Green 氏平面定理。.....	1071
9.8	向量函數在空間內之面積分，體積分及其有關定理。.....	1099
9.9	應用示範。.....	1122

第十章 矩 陣

目次	內 容	次 頁
10 · 1	基本定義及記法.	1149
10 · 2	矩陣元素之重組.	1156
10 · 3	矩陣之加法及乘法.	1166
10 · 4	線性變換或線性方程之矩陣表示法.	1182
10 · 5	方陣之乘法反元素, 逆方陣及可逆方陣.	1187
10 · 6	行列式	1194
10 · 7	矩陣之分割.	1216
10 · 8	特殊矩陣.	1228
10 · 9	矩陣在線性方程組中之應用.	1239
10 · 10	線性相關性質之應用.	1256
10 · 11	矩陣變換及相似變換.	1266
10 · 12	實數及複數域內之行向量 (行矩陣).	1279
10 · 13	雙線式, 二次式, Hermite (厄密特) 氏式. 及 反號 Hermite 氏式.	1294
10 · 14	矩陣之特徵方程.	1308
10 · 15	矩陣的微分, 積分, 以及微分方程.	1337
10 · 16	張量之初步簡介及張量之矩陣表示法.	1346

第十一章

複變數函數

目次	內 容	頁 次
11 · 1	複變數函數之初步說明·····	1359
11 · 2	複變數函數之微分及解析函數·····	1380
11 · 3	複函數之積分與 Cauchy 氏定理及其推論·····	1415
11 · 4	Cauchy 氏積分公式及有關定理·····	1437
11 · 5	複數之序列，無窮級數及幕級數之主要性質·····	1460
11 · 6	Taylor 氏級數及 Laurent 氏級數·····	1475
11 · 7	殘數定理及其應用·····	1500
11 · 8	用複函數之圍線積分求實函數之定積分·····	1517
11 · 9	保形映像及數種基本映像·····	1541
11 · 10	基本函數及特殊函數之映像·····	1566
11 · 11	二維穩態之流體流動·····	1594
11 · 12	二維靜電場及二維熱流問題之分析·····	1619

第 十 二 章

偏 微 分 方 程

目次	內 容	頁 次
12 . 1	偏微分方程概說。.....	1639
12 . 2	一階線性偏微分方程通解之 Lagrange 氏求法及 其他。.....	1650
12 . 3	三變數一階偏微分方程之全解及 Charpit 氏求法。...	1669
12 . 4	一階偏微分方程全解之 Jacobi 氏求法以及特解 之求法。.....	1688
12 . 5	三變數，常係數之高階線性偏微分方程。.....	1704
12 . 6	三變數，變係數之二階偏微分方程。.....	1723
12 . 7	二階半線性偏微分方程之 Monge 氏解法。.....	1739
12 . 8	偏微分方程之立出以及數學物理中之主要通式。.....	1753
12 . 9	一維波動方程式之特解。.....	1768
12 . 10	變數分離解法及其初步討論。.....	1788
12 . 11	Laplace 方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1802
12 . 12	擴散方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1821
12 . 13	波動方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1842
12 . 14	積分變換以及求解偏微分方程時之運用。.....	1863
12 . 15	積分變換解偏微分方程之範例。.....	1868

第一章 概論, 基本項目之複習及其他

學習「工程數學」, 目的在利用數學之分析及計算, 而求出工程問題或實際問題所需之量, 並藉此對該問題之性質及現象, 作明確且深入之瞭解。因此自實用之觀點而言, 數學並非純為抽象之科學, 而為確切且有效之工具以供吾人研究一切實際現象時所使用。再吾人若對數學作深入且廣泛之學習, 則可打定根基、充實經驗、非但有助於實際問題之分析與計算; 瞭解其性質及現象; 且可誘導靈感、觸類旁通、而進入前人未抵達之領域。

現代工程師之從事實際工程工作者, 常發現其日常工作中, 直接利用以往所受數學訓練之部分甚為微少; 但此並不意指其餘部分毫無用途或無價值, 蓋數學訓練無形中已培養吾人思考、分析、判斷、歸納之能力; 且可激發吾人之潛力, 創造或發展解決問題之新方法也。

本章除說明工程或實際問題之一般數學處理之手續外, 且對以往學習數學時之重要項目, 作重點之複習, 並對數值計算作初步之簡介, 以備今後之應用。

1-1 工程或實際問題之一般性數學處理手續

一個實際問題, 用數學方法處理, 自開始以至結束, 其經過之歷程, 甚為複雜微妙, 並非用片言兩語而可作原則性之說明者。

實際問題到達研究者手中, 其原始形態常為資料不足、輪廓模糊之勢態, 故得先行確定該問題之性質及所需之結果, 並博覽有關典籍以發掘是否有類似之問題存在。否則主體未定或重覆、或目的未定、即行著手研究, 其結果之有價值者幾希。實際問題可分為線性分佈體系(Linear

2 工程數學(上冊)

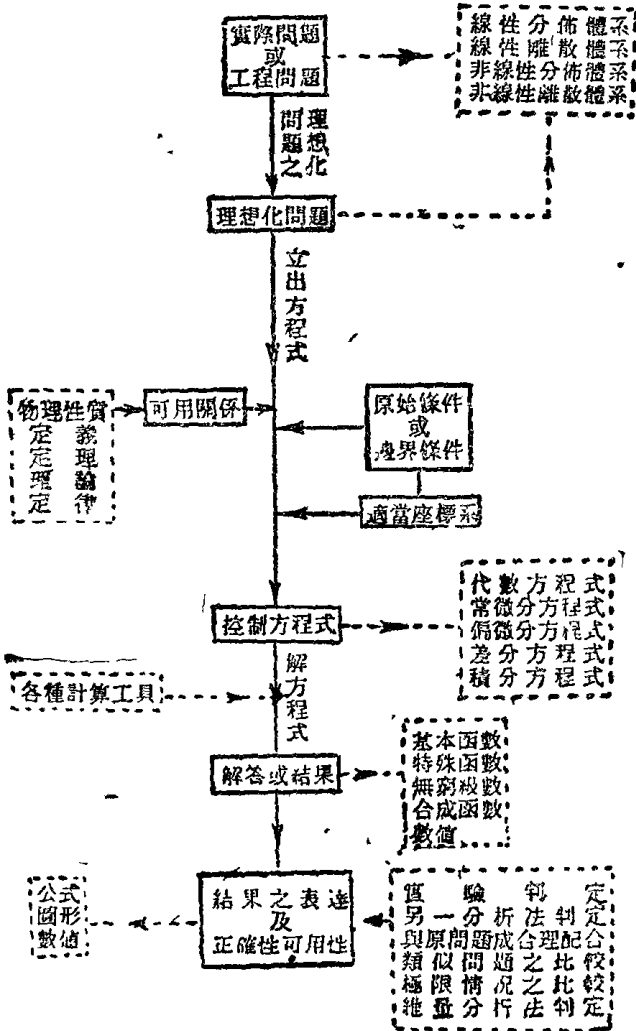
distributed systems)、線性離散體系 (Linear lumped systems)、非線性分佈體系及非線性離散體系等等,因其處理方式有異,故在開始時即應予以區分,以免徒勞無功也。

問題之性質確定以後,即着手將實際問題化成數學語言以便數學處理,在此階段應採用足夠之資料作為變數以供使用。若原始資料不足,則須假定合理之資料以作補充。常有種種場合,資料並非不足而係資料太多;若將全部資料納入,則問題成為過度複雜之型式,不適宜於數學處理之用;因此研究人員得在原始資料中定其取捨,捨其無關大要之資料,取其重要部分,而形成適宜於數學處理之問題,此項手續常稱為問題之理想化。上述之兩步手續有時成為研究實際問題時最困難之部分,因其雖有原則性之說明,但乏確切之步驟以資遵循,恒由研究人員之根基,經驗及天份所決定也。

問題既經理想化,下一步驟即為立出數學方程式,常需利用各項資料之原始定義、物理性質、定理、理論以及各種自然律、或幾何性質以決定各個變數間之關係;並利用已知之原始條件或邊界條件,選定使用之座標系,以立出該問題之控制方程式。此類立出之控制方程式,可為代數方程式、常微分方程式、偏微分方程式、積分方程式、差分方程式及混合方程式等等。而工程數學一科中主要研究之項目即在討論利用種種之方法,以求此類方程式之通解或特解,其中恒有完整之理論以作依據,確切之步驟以資遵循。故若能勤加學習,並有足夠時間作多方之獵涉,當可求得所研究問題之答案。

用數學方法分析而求得之解,經常將變數間之關係,寫成函數或關係式,最簡單之函數即吾人所熟悉之「基本函數」,包含多項式、指數、對數、三角、雙曲線函數等;亦有由定積分所定義,微分方程所定義之函數,以及無窮級數,合成函數之解及數值解答等等。故對如此衆多之函數,其性質必須分別予以判析,始能對所求得之解,有確切真實之感。

最後即進入將求得之結果予以適當之表達及瞭解其含義之階段。一方面可將研究之結果作自我之宣揚, 另一方面對該問題之性質及現象, 配合所得之解是否合理, 應予以批判及作成結論。所得結果之表達方式, 一般常用公式, 圖形, 數值表等所表示。爲使工程上應用方便計, 常有將研究結果繪成圖形, 可使變化之趨勢一目了然, 又若該項結果具通用之價值者, 且其公式甚爲複雜時, 此種用圖形以表達結果之方式, 雖其精確性有限, 但甚合實用, 且頗爲一般工程工作人員所樂用也。



研究實際問題時，自分析開始至分析結尾之漫長歷程中，難保無微小之差錯而影響其解答之正確性，故除詳細覆核分析之過程外；一般常採用，實驗方式，與原問題成合理配合，用另一分析法，與已知結果之類似問題相比較，用維量分析、或用極限情況分析等等方法以判別結果之正確性及可用性。

茲將上述討論，用表解之方式，附列於前，以供參考。

1-2 近似計算之準確度

利用工程數學以求解實際或工程問題時，所得之結果經常並非絕對正確，亦不可能絕對正確，即恒具某種程度之誤差在內，該項誤差之來源可分成下列數種：

- ① 將實際問題化成理想化之問題以使適合數學方法之處理，因而產生誤差。
- ② 所引用之物理現象，理論，定律本身並非絕對正確者，因而產生誤差。
- ③ 所求得之公式，因計算數值時遭遇困難而採用截尾 (Truncation) 方法而求出其數值者，因而產生誤差。
- ④ 度量或觀察所產生之誤差。
- ⑤ 捨位 (Round-off) 而引起之誤差。
- ⑥ 計算錯誤而得之誤差。

除最後一項因錯誤而產生之誤差，可由小心之覆核而獲消除者外；由於其他原由而產生之誤差，則無法避免。只能在可能範圍內減少至某種程度。何況所謂絕對正確之答案，其本身恒為未知之數也。因此任何工程問題中凡包含數值之計算者，多少具有某種近似之性質在內，蓋自開始時之各項數據起，及其分析中逐步所採取之步驟中，經常含有近似之性質在內，本節主要之目的，首在研究因捨位而引起之誤差，並包括

近似計算中誤差之衡量及其準確度估計等等。至於關於誤差之深入理論部分當於以後再行論及之。

(A) 近似數 (Approximate numbers) 及有效數字 (Significant figure)

吾人常用之數中, 只有一小部分可稱為**正確數** (Exact numbers) 如自然數及有理數屬之, 又如無理數 $\sqrt{2}$, π , e 等亦為**正確數**, 但不能用有限之小數表示, 只能寫出其近似之小數, 如 3.1416、1.4142、2.7183 等等。此種寫出之形式並非原正確數, 只為原正確數之近似值而已, 常稱為**近似數** (Approximate numbers), 而在實用問題中, 所欲求之**正確數**的確值常不易求得, 惟有用**近似數**以表示為與**正確數**相差甚為微小之數。此種**近似數**之觀念, 實際上包括兩個數, 一個稱為**基數**如 (N), 另一個為附屬之微小正數如 (E_a), 再用 N 與 E_a 以定義**正確數**如 ($\bar{N}$) 之誤差界值, 三者相互之關係如下:

$$N - E_a \leq \bar{N} \leq N + E_a \quad (1)$$

而所謂**近似數**通常即以下列形式表示

$$N(\pm E_a) \quad (2)$$

例如 $1.724(\pm 0.0135)$ 即表示某一**正確數**之**近似數**, 而**正確數**介乎 1.7105 與 1.7375 之間。

上述**近似數**中所附屬之微小正數如 E_a 者, 稱為**一數一量**, 或一**計算之絕對誤差** (Absolute error)。此種寫法, 以該誤差之範圍甚屬重要時始予引用。一般而論, 實際計算中, 對**絕對誤差**之**正確估計**, 並非絕對必須, 且一連串之計算中, 欲嚴格將**絕對誤差**包含在內予以運算, 事實上亦不可能, 因此實用上常將**近似數**縮寫成一個數, 並規定其縮寫之法則俾使其精確度憑此而可判定。此即**有效數字** (Significant figures) 觀念介入之由來。

現規定縮寫一個近似數時，所寫出之每位數字，除用以定小數點位置之 0 以外，每一位數字 0, 1, 2, 3, ……9 均具確定之意義，而最後之一位數至多只有半單位之出入。如此而寫出之數，即稱為有效數字。茲將有效數字之寫法及其含義說明如下：

0.00263 共有有效數字 2, 6, 3。係代表近似數 0.00263

(± 0.000005)。故稱該數正確至三位有效數字。

3809 共有有效數字 3, 8, 0, 9。係代表近似數 3809 (± 0.5)。

正確至四位有效數字。

46300 共有有效數字 4, 6, 3, 0, 0。係代表近似數 46300

(± 0.5)。正確至五位有效數字。

4630×10^1 共有有效數字 4, 6, 3, 0。係代表近似數 46300 (± 5)。

正確至四位有效數字。

4.63×10^4 共有有效數字 4, 6, 3。係代表近似數 46300 (± 50)。

正確至三位有效數字。

利用有效數字之觀念，訂定寫出之法則，且可憑此而判定其準確度，誠屬方便之至。但有時並不能嚴格實施此種辦法而縮寫近似數。例如有一已知之近似數如前所述者 $1.724 (\pm 0.0135)$ ，表示其正確值介乎 1.7105 與 1.7375 之間。若縮寫成 1.724，則代表 $1.724 (\pm 0.0005)$ ，故 $1.7235 < \bar{N} < 1.7245$ 。若寫成 1.72，則代表 $1.72 (\pm 0.005)$ ，故 $1.715 < \bar{N} < 1.725$ 。若寫成 1.7，則代表 $1.7 (\pm 0.05)$ ，故 $1.65 < \bar{N} < 1.75$ 。

上述三種寫法，並無一種實足表示原有誤差之範圍，唯有第三種寫法，始將原有誤差之區間包括在內，但因將誤差之區間作人為之放大，反將原「正確數」之不定界限增加過度，失却縮寫該近似數之原意，且只有兩位有效數字，將影響今後連續計算之精密度，因此通常採用中庸之道，而將該近似數縮寫成三位有效數字之數如 1.72，雖然犧牲誤差限值之精確意義，但有較多之有效數字可供今後之運算也。

設有正確數 27 及 13.1, 相除而得無窮小數

$$27/13.1 = 2.061068702 \cdots$$

爲使該數在今後計算中具實用價值, 經常用四捨五入之捨位法而寫成近似數如,

$$2.06, 2.061 \text{ 或 } 2.06107 \text{ 等等.}$$

因捨位而產生之誤差, 恒在前述有效數字所規定之誤差極限之內, 因此成爲近似數。如寫成:

2.06 則正確至小數二位, 正確至三位有效數字。

2.061 則正確至小數三位, 正確至四位有效數字。

2.06107 則正確至小數五位, 正確至六位有效數字。

(B) 絕對誤差, 相對誤差 (Relative errors) 及百分誤差 (Percentage errors)

設一正確數爲 $\bar{N}$, 其近似數用其基數 N 表示, 則二者相差之數, 稱爲該近似數之實際誤差 E 。有下列關係

$$\boxed{\bar{N} - N = E} \quad \text{或} \quad \boxed{\bar{N} = N + E} \quad (1)$$

此項實際誤差可爲正數或負數, 且恒爲不能確定之數。但有時可決定該實際誤差之界值 E_a , 即上述近似數 N 之絕對誤差 E 與 E_a 有下列關係

$$\boxed{|E| \leq E_a} \quad (2)$$

因此原正確數 $\bar{N}$ 介乎 $N - E_a$ 及 $N + E_a$ 之間, 此即 (A) 節中所引用之

$$\boxed{N - E_a \leq \bar{N} \leq N + E_a} \quad (3)$$

如有近似數 4.629, 係正確至三位小數, 且具四位有效數字者, 其絕對誤差 $E_a = 0.0005$, 故其所代表之正確數 $\bar{N}$ 爲