21 世纪高职高专基础课精品教材

高 等 数 学

主　编　王　刚

副主编　龚佃选　林丹凤

编　委　(按姓氏笔画排序)

王　刚　李海涛　林丹凤

龚佃选　樊晓红

主　审　毛秀山

东北大学出版社

21 世纪高职高专基础课精品教材

高 等 数 学

主　编　王　刚
副主编　龚佃选　林丹凤
编　委　（按姓氏笔画排序）
王　刚　李海涛　林丹凤
龚佃选　樊晓红
主　审　毛秀山

东 北 大 学 出 版 社
· 沈　阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／王刚主编. —沈阳：东北大学出版社，2011. 8
ISBN 978-7-5517-0018-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 178766 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市奇兴彩色广告印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：185mm×260mm
印 张：11. 75
字 数：279 千字
出版时间：2011 年 8 月第 1 版
印刷时间：2011 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：孟 颖
封面设计：刘江旸
责任校对：刘 莹
责任出版：唐敏智

ISBN 978-7-5517-0018-4 定 价：23. 00 元

前　　言

为了适应高职高专教育的需要，培养更多实用型人才，我们根据教育部有关高职高专规划教材的要求，遵循教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在参考、研究、剖析、对比多种同类教材的基础上，组织拥有丰富的高职高专教学经验的教师编写了本书.

高等数学是高职高专各专业必修的重要基础课，在编写的过程中，我们力求做到以加强应用为目的，以“必需，够用”为原则，要求每章节尽量实行“案例（引例）驱动”，就是从实际问题出发，引出概念，并讲清概念，还注意将数学建模思想渗透到教材中. 本系列教材适合于各类高职高专院校、成人高校及本科二年制或三年制各专业.

本书具有如下特色.

1. 在尽可能地保持数学学科特点的基础上，对教学内容进行精简、更新、重组，删除与高职层次不符的内容，淡化理论性和系统性，加强实用性和针对性，体现适用、实用、简明的要求，并注意根据共性及实际教学课时数精选内容.

2. 本书尽量按照辨证唯物论的认识论，即由特殊到一般，再由一般到特殊的认识过程编写. 引进重要的数学概念和定理时，在保证数学概念的准确性的原则下，尽量借助几何直观图形、物理意义、经济意义和生活体验来解释这些概念和定理.

3. 在教学内容的编排上，每个章节按照“案例研究→抽象归纳→能力训练”的现代职业教育的“三阶段”模式展开. 在第一阶段“案例研究”中，提出一个或多个实际生活中的应用例子，创设真实的工作情景，提高学生的学习兴趣. 在第二阶段“抽象归纳”中，通过学生和老师共同对案例的研究探索，或抽象出一般规律，或提出尚待解决的问题，自然过渡到教学阶段. 在上

述两阶段完成后，学生获得的仅仅是知识，要形成能力，还需要大量地练习.因此，在第三阶段“能力训练”中给出了一些与例题类似的问题，要求学生独立思考，或与同学、老师讨论完成，以达到相应章节要求的能力目标.

4. 本书着重强化了微积分理论的教学，在内容的取舍上注意了“文理兼容”，充分体现了高等数学在职业教育教学中为专业教学服务这一根本宗旨.

本书由王刚担任主编，毛秀山担任主审，龚佃选、林丹凤担任副主编，参加编写的有李海涛、樊晓红等，全书由王刚统稿.

由于编者水平有限，本书难免有疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评意见，以便再版时修改，使本系列教材日臻完善.

编　者

2011 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是研究客观世界变化规律的最基本、最重要的数学工具之一，也是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型. 在社会生活的许多方面都广泛地用到函数，如力学、社会学、经济学等领域. 本章将首先复习函数的基础知识，然后讲述极限的概念、讨论极限的性质和运算法则，以及介绍连续函数的概念与性质等，为后续的学习打下基础.

1.1　函　数

案例研究

引例 1.1.1　自由落体问题

一个自由落体，从开始下落时算起经过的时间设为 t s，在这段时间中落体下落的路程设为 s m. 如果只考虑重力对落体的作用，而空气阻力忽略不计，由物理学知识可知 s 与 t 之间有如下的依赖关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度(在地面附近它近似于常数，通常取 $g=9.8\text{m/s}^2$). 右端变量的每一个取值，都有左端那一变量的唯一一个值与之对应.

这一公式给出了“t”与“s”间的联系. 特别地，当 g 确定时，上式也就确定了“t”与“s”间的联系.

分析　一个“t”对应唯一的“s”. 表达式也代表了变量与变量间的对应关系.

引例 1.1.2　一个冷饮店老板，记录了某年 3 月到 10 月出售某种冰棍的情况如下：

t	3	4	5	6	7	8	9	10
N	40	120	400	600	800	720	650	600

其中 t 表示月份，N 表示当月售出冰棍总数.

分析　这一表给出了“t 月”与“售出冰棍数 N”间的联系：即一个 t 对应着唯一的一个销量 N，即表格也代表了变量与变量间的对应关系.

引例 1.1.3　图 1-1 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的依赖关系. 时间 t h 的变域是 $0\leqslant t\leqslant 24\text{h}$，当 t 在此范围内任取一值时，从图中的曲线可找出气温的对应值. 例如 $t=14\text{h}$ 时，$T=25℃$，为一天中的最高温度.

分析　图形也表示了变量与变量间的对应关系.

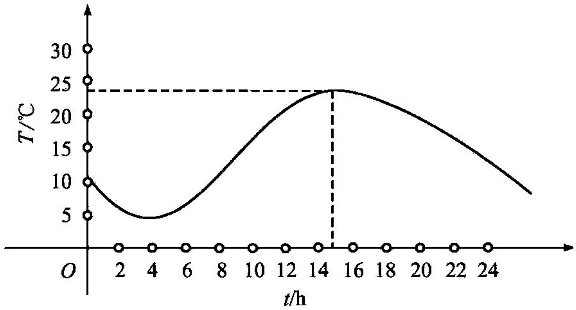

图 1-1

抽象归纳

以上几个例子所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系. 当一个变量在它的变域中任取一定值时，另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应. 把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念.

1.1.1 函数

1. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的数集，若对于每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，就称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，依法则 f 的对应值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，并记作 $f(x_0)$. 所有函数值组成的集合 $W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

例 1 确定下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$，　(2) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须满足 $4-x^2\neq 0$ 且 $x+2\geqslant 0$，即 $x\neq\pm 2$ 且 $x\geqslant -2$，因此函数的定义域为

$$(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty).$$

(2) 要使函数有意义，必须满足

$$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1,$$

即

$$-4\leqslant x\leqslant 2,$$

因此函数的定义域为 $[-4,\ 2]$.

例 2 函数 $y=\begin{cases}x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ 1-x, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$，值域为 $[0,\ 2]$.

例 3 设 $y=f(x)=\begin{cases} x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ x^2, & x>2, \end{cases}$ 求它的定义域和 $f(1)$，$f(3)$，$f(x-1)$.

解 函数 $y=f(x)$，其定义域为

$$[0, 2]\cup(2, +\infty]=[0, +\infty);$$
$$f(1)=1+2=3;$$
$$f(3)=3^2=9;$$
$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2, \\ (x-1)^2, & x-1>2, \end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases} x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3, \\ (x-1)^2, & x>3. \end{cases}$$

2. 函数的表示法

表示函数关系的方法通常有三种：解析法、列表法和图像法. 这三种表示函数的方法各有优缺点.

(1)解析法：借助于数学表达式来表示两个变量之间的函数关系. 用解析法简单明了，但求函数值有时较复杂，上面的例子和引例 1.1.1 均用的是解析法.

(2)列表法：把函数自变量的取值和其相对应的函数值用一个表格来列出表示，引例 1.1.2 用的是列表法. 这种表示函数的方法使查询函数值方便，但由于很多函数的自变量取值无法全部列出而导致函数值不完备，且从表中不能直接看出变量间的对应规律，所以局限性较大.

(3)图像法：引例 1.1.3 用的是图像法. 图像法形象直观、易于研究函数的性态，但函数值不精确.

函数的三种表示方法各有优缺点，高等应用数学中使用解析法较普遍. 有时，根据不同的问题与需要，灵活地采用不同的方法. 在实际中，经常把这三种方法结合起来使用，即由已知的函数解析式，列出自变量与对应的函数值的表格，再画出它的图像.

3. 函数关系的建立

在实际中，很多问题都要用函数的知识来研究，人们要用函数的方法来表示工程技术、生产生活、经济管理中的各种问题，也就是要建立起变量之间的函数关系. 首先看以下几个实例.

案例 1 销售总收入与年产量的关系问题

某工厂生产某种产品，年产量为 x，每台售价 250 元，当年产量为 600 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 600 台时，经广告宣传可再售出 200 台，每台平均广告费 20 元，如果再多生产，则本年度就售不出去了，建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 600$ 时，

$$R=250x;$$

(2) 当 $600<x\leqslant 800$ 时，

$$R=250x-20(x-600)=230x+1.2\times 10^4;$$

(3) 当 $x>800$ 时,

$$R=800\times250-20\times200=1.96\times10^5.$$

故

$$R(x)=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant600,\\ 230x+1.2\times10^4, & 600<x\leqslant800,\\ 1.96\times10^5, & x>800.\end{cases}$$

案例 2 无盖圆柱形锅炉的总造价问题

某工厂要生产一个容积为 50m^3 的无盖圆柱形锅炉，锅炉底材料造价为周围材料造价的 2 倍，并知周围材料造价为 k 元/m^2，试求总造价 S 与锅炉底半径 r 的函数关系式.

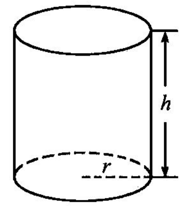

图 1-2

解 因为无盖圆柱形锅炉容积 $V=50\text{m}^3$，设锅炉的高为 h(图 1-2)，则有

$$V=\pi r^2h=50,$$

从而有

$$h=\frac{50}{\pi r^2}.$$

已知锅炉底部材料造价为周围材料造价的两倍，而周围材料造价为 k 元/m^2，则底部材料造价为 $2k$ 元/m^2，根据圆面积及圆柱侧面积公式，总造价为

$$S=2\pi r^2k+2\pi rhk=2\pi r^2k+2\pi r\cdot\frac{50}{\pi r^2}k,$$

即

$$S=\left(2\pi r^2+\frac{100}{r}\right)k,$$

这就是总造价 S 与锅炉底半径 r 的函数关系式.

案例 3 防空洞的截面积与矩形底宽的关系

某防空洞的截面是矩形加半圆，周长为 l m，试把截面积表示为矩形底宽 x 的函数.

解 如图 1-3 所示，防空洞的截面积 A 由矩形和半圆两部分组成，其面积分别为

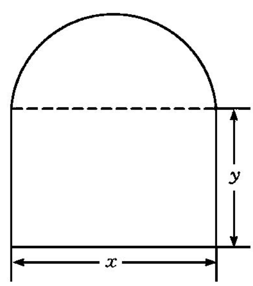

图 1-3

$$xy\ \text{m}^2,\ \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\ \text{m}^2,$$

而

$$x+2y+\pi \cdot \frac{x}{2}=l,$$

所以

$$A=xy+\frac{1}{2}\cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[2lx-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2\right],$$

故防空洞的截面积与矩形底宽 x 的函数关系式是

$$A=\frac{1}{2}\left[lx-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x^2\right](\mathrm{m}^2).$$

4. 函数的几种特性

(1)奇偶性

定义 2 给定函数 $y=f(x)(x\in D)$，D 为对称于原点的数集.

若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为偶函数；

若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为奇函数.

对于偶函数，由于 $f(-x)=f(x)$，因此，偶函数的图形关于 y 轴对称；同理，奇函数的图形关于原点对称.

(2)单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意两点 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有：$f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递增；$f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递减.

(3)周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $l\neq 0$，对于任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，使得 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为周期函数，满足上述条件的 l 中最小的正数称为函数的最小正周期，简称为周期.

例如，$y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数. 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(4)有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，若存在一个正数 M，对任意的 $x\in(a, b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有界，否则称为无界.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的，但在 $[1, +\infty)$ 上是有界的. 由此可见，如果说某个函数是有界函数或无界函数必须指明所考虑的区间.

5. 反函数

定义 6 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，且函数 $y=f(x)$ 中的“f”为一一对应. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都可从关系式 $y=f(x)$ 中找到确定的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么由此所确定的以 y 为自变量的新函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=\varphi(y) \quad 或 \quad x=f^{-1}(y),$$

它的定义域为 M，值域为 D. 这里指出

(1)函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域为 W，值域为 D.

(2)习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以，反函数一般都表示为 $y=f^{-1}(x)$.

(3)在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-4).

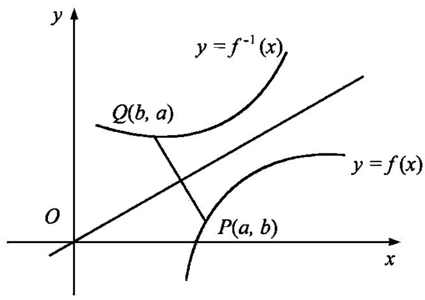

图 1-4

1.1.2 基本初等函数与初等函数

1. 基本初等函数

通常把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(1)常数函数　$y=C$(C 为常数).

(2)幂函数　形如 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)的函数.

(3)指数函数　形如 $y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)的函数.

(4)对数函数　指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作 $y=\log_a x$(a 为常数，$a>0$，$a\neq1$)；特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，函数记作 $y=\ln x$，称为自然对数函数.

(5)三角函数

正弦函数　$y=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$；

余弦函数　$y=\cos x$，$x\in(-\infty, +\infty)$；

正切函数　$y=\tan x$，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$；

余切函数　$y=\cot x$，$x\neq n\pi$，其中 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

(6)反三角函数

反正弦函数　$y=\arcsin x$，$x\in[-1, 1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，

反余弦函数　$y=\arccos x$，$x\in[-1, 1]$，$y\in[0, \pi]$，

反正切函数　$y=\arctan x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in(0, \pi)$.

2. 复合函数

在实际问题中，常常会遇到由几个较为简单的函数组成的较为复杂的函数.

案例 4　在自由落体运动中，落体的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2,$$

其中 m 为落体的质量. 由于落体的速度 v 是时间 t 的函数

$$v=gt,$$

因此，如果要研究动能与时间的关系，就要把 $v=gt$ 代入 $E=\frac{1}{2}mv^2$. 结果是

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

由此看到 E 与 t 的对应关系是由两个函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 复合而成的.

定义 7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(x)$ 的定义域的交非空. 那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

例 4 已知 $y=\ln u$，$u=\cos x$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 由 $y=\ln u$，$u=\cos x$

有

$$y=\ln\cos x.$$

利用复合函数的概念，一个较复杂的函数可以看成几个简单函数复合而成，简单函数是指由常量与基本初等函数经过四则运算而得到的函数.

例 5 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些简单函数复合而成的?

解 令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.

复合函数也可以由两个或两个以上的简单函数复合而成.

例 6 函数 $y=\ln[\arctan(x^2+1)]$ 是由哪些简单函数复合而成的?

解 令 $u=\arctan(x^2+1)$，则

$$y=\ln u;$$

再令 $v=x^2+1$，则

$$u=\arctan v.$$

故

$$y=\ln[\arctan(x^2+1)]$$

是由 $y=\ln u$，$u=\arctan v$，$v=x^2+1$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 8 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次函数的复合后所得到的能用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

例如，$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+3}$，$y=\sin^2 x$，$y=\ln(x^2+1)$ 等都是初等函数.

初等函数的表达形式直接明了，研究起来比较方便. 本书中讨论的函数主要是初等函数.

1.1.3 邻 域

定义 9 设 a 与 δ 是两个实数，并且 $\delta>0$，把满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\ \delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

能力训练

1. 填空题：

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于________对称；

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$，则 $f(x^2+1)$ 的定义域是________；

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是________；

(4) $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f[\varphi(x)+1]=$________，$\varphi[f(x)+1]=$________；

(5) $y=\log_2(\sin x+2)$ 是由简单函数________和________复合而成；

(6) $f(x)=x^2+1$，$\varphi(x)=\sin 2x$，则 $f(0)=$________，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$________，$f[\varphi(x)]=$________.

2. 选择题：

(1) 下列函数中既是奇函数又是单调增加函数是(　　)；

A. $\sin^3 x$　　B. x^3+1

C. x^3+x　　D. x^3-x

(2) 设 $f(x)=4x^2+bx+5$，若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，则 b 应为(　　)；

A. 1　　B. −1

C. 2　　D. −2

(3) $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是(　　).

A. 有界函数　　B. 周期函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

3. 求定义域 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(3) $y=\lg(x+2)+1$；　　(4) $y=\lg\sin x$.

5. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^{-3}$；　　(2) $f(x)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$；

(3) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$;　　(4) $f(x)=x\sin x$.

7. 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin^3(8x+5)$；　　(2) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$；

(3) $y=2^{1-x^2}$；　　(4) $y=\lg(3-x)$.

1.2 极　限

案例研究

引例 1.2.1　广告的效用

当一件新的耐用产品被广告推出后，用它的人将越来越多，但随着时间的推移，试用这一产品的新人增长率逐渐减慢. 问题：随着时间的推移，使用这一产品的总人数与时间将有怎样的关系？总人数的变化如何？

分析与结论　由于广告的效用，使用产品的人数 X 应是时间 t 的函数. 设它为 $X(t)$.

可以想象，由于广告的效用，随着时间的增长，使用该产品的人数也会随之增长，但不会超过总人数 N，它只可能越来越接近某一确定数 $M(M<N)$，即 t 越大，函数 $X(t)$ 会趋于某一值 M. 反映在图形上，即当时间 t 越来越长时，它的图形越来越接近于直线 $y=M$. 如图 1-5 所示.

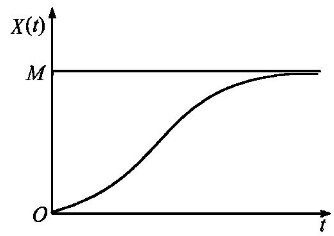

图 1-5

引例 1.2.2　水温的变化趋势问题

将一盆 90℃ 的热水放在一间室温恒为 20℃ 的房间中，随着时间 t 的推移，水温 T 的变化趋势是怎样的？

分析　开始时由于温差比较大，温度下降的速度会很快，但是随着时间的推移，温差的减小，温度的下降速度会减缓，最终水温会越来越接近室温 20℃.

抽象归纳

在上述实际问题中，为了掌握变量的变化规律，仅仅通过有限次的算术运算是求不出来的，往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

1.2.1 数列的极限

例 1 刘徽的割圆术

我国魏晋时期的数学家刘徽在其《九章算术》中提出了割圆术，所谓“割圆术”，是用圆内接正多边形的周长去无限逼近圆周并以此求出圆周率的方法. 他从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，割圆过程如图 1-6 所示. 设内接正六边形的周长为 l_1，内接正十二边形的周长为 l_2，如此继续下去，内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的周长为 l_n. 得到如下一列数

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n,\ \cdots$$

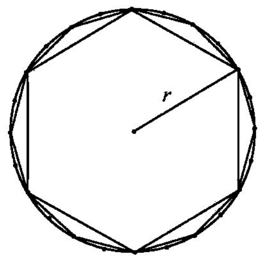

图 1-6

n 越大，对应的正多边形的周长就越接近于圆的周长. 对应的正多边形的面积也越接近于圆的面积. 刘徽在叙述这种作法时说：“割之弥细，所失弥少，割之又割？以至不可割，则与圆周合体而无所失矣！”

例 2 已知数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…，当项数 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的值无限地趋近于常数 1.

定义 1 当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为这个数列的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 读作“当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A”. 符号“→”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 无限增大”. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 有时也记作

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} a_n\to A \quad \text{或} \quad a_n\to A\ (n\to\infty).$$

若数列 $\{a_n\}$ 存在极限，则称数列 $\{a_n\}$ 是收敛的；若数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{a_n\}$ 是发散的.

例 3 试分析下列几个数列的变化趋势

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…， $y_n=\frac{n}{n+1}$；

(2) 0，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{5}$，…，$1+(-1)^n\frac{1}{n}$，…， $y_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$；

(3) 0，1，0，1，…，$\frac{1+(-1)^n}{2}$，…， $y_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$；

(4) 2，4，6，8，…，$2n$，…， $y_n=2n$.

解 分析以上数列在 n 无限增大时的变化趋势，可以看到数列(1)，(2)无限接近于