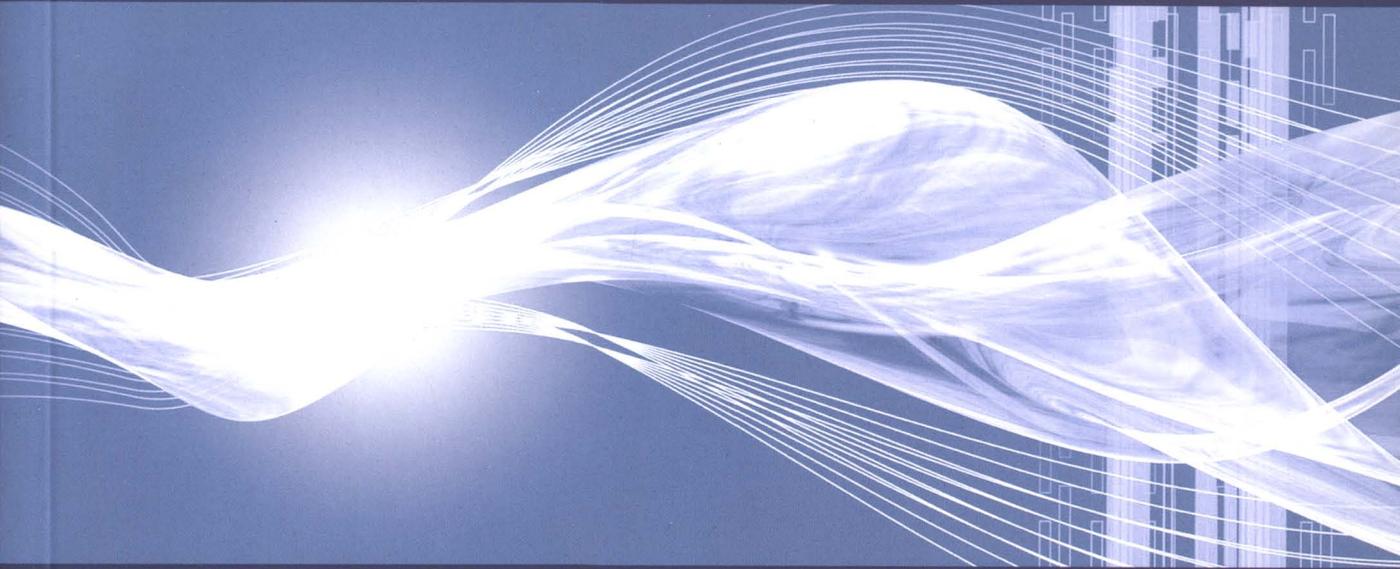




普通高等教育“十二五”规划教材



电磁场与电磁波

金立军 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

电磁场与电磁波

主编 金立军
编写 胡波 汪洁 尹学锋
主审 马西奎

中国电力出版社

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材，主要介绍宏观电磁场分布和电磁波辐射及其传播的规律，以及电磁场与电磁波工程应用的基本分析和计算方法。

全书共分为9章，包括概述、矢量分析、静电场、恒定电流场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射等内容，每章配备了思考题及习题，书末附有部分习题的答案。

本书可作为电气信息类专业的本科教材，也可供从事电磁场与电磁波相关工作的技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波/金立军主编. —北京: 中国电力出版社, 2011. 8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5123 - 2025 - 3

I. ①电… II. ①金… III. ①电磁场 - 高等学校 - 教材
②电磁波 - 高等学校 - 教材 IV. ①O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 163609 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2012 年 3 月第一版 2012 年 3 月北京第一次印刷
787 毫米 × 1092 毫米 16 开本 20.25 印张 491 千字
定价 36.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

电子电气基础课程教材编审委员会

主任委员	王志功	东南大学		
副主任委员	张晓林	北京航空航天大学	胡敏强	东南大学
	王泽忠	华北电力大学	戈宝军	哈尔滨理工大学
	马西奎	西安交通大学	刘新元	北京大学
	孟 桥	东南大学		
秘 书 长	李兆春	中国电力出版社		
委 员	(按姓氏笔画排列)			
	于守谦	北京航空航天大学	公茂法	山东科技大学
	王 殊	华中科技大学	王万良	浙江工业大学
	王小海	浙江大学	王建华	西安交通大学
	王松林	西安电子科技大学	邓建国	西安交通大学
	付家才	黑龙江科技学院	刘润华	中国石油大学 (华东)
	刘耀年	东北电力大学	朱承高	上海交通大学
	宋建成	太原理工大学	张正平	贵州大学
	张彦斌	西安交通大学	李 承	华中科技大学
	李 青	中国计量学院	李 琳	华北电力大学
	李守成	北京交通大学	李国丽	合肥工业大学
	李哲英	北京联合大学	李晓明	太原理工大学
	李晶皎	东北大学	杨 平	上海电力学院
	陈后金	北京交通大学	陈庆伟	南京理工大学
	陈意军	湖南工程学院	陈新华	山东科技大学
	宗 伟	华北电力大学	范蟠果	西北工业大学
	段哲民	西北工业大学	段渝龙	贵州大学
	胡虔生	东南大学	赵旦峰	哈尔滨工程大学
	赵荣祥	浙江大学	唐庆玉	清华大学
	徐淑华	青岛大学	袁建生	清华大学
	郭陈江	西北工业大学	高会生	华北电力大学
	崔 翔	华北电力大学	梁贵书	华北电力大学
	曾孝平	重庆大学	曾建唐	北京石油化工学院
	韩 璞	华北电力大学	韩学军	东北电力大学
	雷银照	北京航空航天大学		



序

进入 21 世纪，“985 工程”和“211 工程”的实施，推动了高水平大学和重点学科的建设，在高校中汇聚了一大批高层次人才，产生了一批具有国际先进水平的学术和科学技术研究成果。然而高校规模的超高速增大，导致不少学校的专业设置、师资队伍、教材资源和教学实验条件不能迅速适应发展需要，教学质量问题日益突现。高校教材，作为教学改革成果和教学经验的结晶，其质量问题自然备受关注。

需要指出的是，很多高等学校教材经过多年的教学实践检验，已经成为广泛使用的精品教材。同时，我们也应该看到，现用的教材中有不少内容陈旧、未能反映当前科技发展的最新成果，不能满足按新的专业目录修订的教学计划和课程设置的需要。这就要求我们的高等教育教材建设必须与时俱进、开拓创新，在内容质量和出版质量上均有新的突破。

根据教育部教高司 2003 年 8 月 28 日发出的 [2003] 141 号文件，在教育部组织下，历经数年，2006~2010 年教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会按照教育部的要求，致力于制定专业规范或教学质量标准，组织师资培训、教学研讨和信息交流等工作，并且重视与出版社合作，编著、审核和推荐高水平电子电气基础课程教材。

“电工学”、“电路”、“信号系统”、“电子线路”、“电磁场”、“自动控制原理”、“电机学”等电子电气基础课程是许多理工院校的先修课程，也是电子科学与技术、电气工程及其自动化等专业学科的基石，在科学研究领域和产业应用中发挥着极其重要的作用。此类教材的编写，应提倡新颖的立意，“适用、先进”的编写原则和“通俗、精炼”的编写风格，以百花齐放的形式和较高的编写质量来满足不同学科、不同层次的师生的教学要求。

本电子电气基础课程教材编审委员会即是基于此目的而设立的，希望能够鼓励更多的优秀教师参与其中，为高质量教材的编写和出版贡献出聪明才智和知识经验。

2009 年 10 月于东南大学

前 言

电磁场与电磁波是电气信息类专业的一门技术基础课。随着电气、电子、信息、计算机等技术的迅速发展,要求电气信息类专业的科技工作者必须具备坚实的电磁场与电磁波基础知识。电磁场与电磁波理论性强,内容抽象,计算公式多而复杂,往往使学生望而生畏,为此本书汲取国内外同类教材的经验,强调电磁场与电磁波的工程应用,力争将抽象的理论与具体的工程技术相结合,通过典型直观的物理现象来论述电磁场与电磁波理论,深入浅出,便于学生理解,也便于工程技术人员查阅。

本书是参照电气信息类专业电磁场与电磁波课程的教学大纲要求编写的。为提高本课程的教学质量,促进学生知识、能力和素质全面发展,本书具有如下特点:

(1) 突出电磁场与电磁波的普遍规律,注重教材的基础性。本书在内容阐述时从物理定律出发,然后上升到理论,再到应用,力求物理概念清楚、层次分明、条理清晰、循序渐进、由浅入深、重点突出,使学生对基础知识能牢固掌握、灵活运用。

(2) 将数学理论与物理概念密切结合,强调物理现象与规律的联系,注重物理模型的建立,突出理论和应用的结合,提高学生的演绎能力和抽象思维能力。

(3) 展示理论概念的应用性和实践性,有意识地培养学生从定性的方法入手提出问题、分析问题和解决问题的能力。例如,每一章的最后一节强调电磁场的应用,可加深学生对本章内容的理解,做到理论联系实际。

(4) 每章根据课程内容配备例题、思考题、小结、习题,这些内容均与每章理论紧密配合,有助于提高学生分析问题的能力。

全书共分9章,其中第1~3章由金立军编写,第4、5章由胡波编写,第6、7章由汪洁编写,第8、9章由尹学锋编写;全书由金立军统稿。

马西奎教授为本书主审,为保证本书的质量做了许多指导性工作。另外,在本书的编写过程中,研究生姚春羽、陈俊佑、张哲、阎玲玲、梅健等还做了大量的工作。在此一并向他们致以衷心的感谢。

由于编者学识和水平有限,书中不妥之处在所难免,衷心欢迎使用本书的师生和读者批评指正,提出宝贵意见和建议。

编 者

2012年 3月

目 录

序

前言

1 概述	1
1.1 电磁场与电磁波的发展历程	1
1.2 场的概念及场量表达	1
1.3 微分和积分的运用	3
1.4 解析解与数值解	4
2 矢量分析	6
2.1 矢量及矢量场	6
2.2 矢量的代数运算	8
2.3 矢量的标积与矢积	8
2.4 常用坐标系中的矢量场	9
2.5 标量场的方向导数与梯度	13
2.6 矢量场的通量与散度	16
2.7 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理	19
2.8 格林定理	23
2.9 亥姆霍兹定理	24
2.10 小结	27
思考题	29
习题	30
3 静电场	32
3.1 库仑定律与电场强度	32
3.2 静电场的基本方程	36
3.3 电位	39
3.4 静电场中的导体与介质	43
3.5 静电场的边界条件	47
3.6 静电场的边值问题	49
3.7 电容和部分电容	61
3.8 电场能量与静电力	64
3.9 静电场的应用	68
3.10 小结	71
思考题	73
习题	73

4 恒定电流场	76
4.1 电流和电流密度	76
4.2 电动势	80
4.3 恒定电流场方程	82
4.4 恒定电流场的边界条件	86
4.5 焦耳定律	88
4.6 恒定电流场与静电场的比拟	89
4.7 恒定电流场的应用	91
4.8 小结	94
思考题	95
习题	96
5 恒定磁场	99
5.1 磁感应强度	99
5.2 矢量磁位	103
5.3 真空中的磁场方程	107
5.4 媒质的磁化	110
5.5 媒质中的恒定磁场方程	113
5.6 恒定磁场的边界条件	115
5.7 标量磁位	117
5.8 磁路	118
5.9 电磁感应定律	123
5.10 电感	126
5.11 磁场能量	129
5.12 磁场力	132
5.13 恒定磁场的应用	134
5.14 小结	136
思考题	140
习题	142
6 时变电磁场	146
6.1 位移电流	146
6.2 麦克斯韦方程	148
6.3 时变电磁场的边界条件	150
6.4 位函数及其方程求解	152
6.5 能流密度矢量	156
6.6 时变电磁场的唯一性定理	159
6.7 正弦时变电磁场	160
6.8 麦克斯韦方程和位函数的复矢量形式	162
6.9 复能流密度矢量	163
6.10 时变电磁场的应用	164

6.11 小结	165
思考题	168
习题	169
7 平面电磁波	171
7.1 波动方程	171
7.2 理想介质中的均匀平面波	173
7.3 导电媒质中的均匀平面波	177
7.4 电磁波的群速	182
7.5 平面波的极化	183
7.6 均匀平面波垂直投射到两种媒质的分界面	185
7.7 平面波垂直投射多层媒质中	188
7.8 任意方向传播的平面波	192
7.9 平面波斜投射到两种理想介质的分界面	195
7.10 平面波斜投射到两种导电媒质的分界面	201
7.11 平面波斜投射到理想导体表面	203
7.12 等离子体中的平面波	205
7.13 在铁氧体中的平面波	209
7.14 电磁波的应用	211
7.15 小结	214
思考题	218
习题	219
8 导行电磁波	224
8.1 导波系统中的电磁波	224
8.2 TEM波传输线	227
8.3 无损耗传输线	229
8.4 矩形波导的传播特性	230
8.5 矩形波导中的 TE_{10} 波	236
8.6 圆波导的传播特性	239
8.7 导波系统中的传输功率与损耗	244
8.8 谐振腔	247
8.9 同轴线	251
8.10 导行波的应用	252
8.11 小结	253
思考题	254
习题	255
9 电磁辐射	257
9.1 电流元的辐射场	257
9.2 发射天线的特性	261
9.3 对称天线的辐射场	263

9.4 天线阵辐射	266
9.5 电流环辐射	269
9.6 对偶原理	272
9.7 镜像原理	274
9.8 互易原理	277
9.9 惠更斯原理	280
9.10 电磁辐射的应用	282
9.11 小结	288
思考题	290
习题	290
部分习题参考答案	292
附录 A 物理量的符号、单位及量纲	306
附录 B SI单位制中用于构成十进制倍数和分数的常用词头名称及其符号	308
附录 C 物理常数	309
附录 D 希腊字母读音	311
参考文献	312

1 概 述

1.1 电磁场与电磁波的发展历程

电、磁现象是大自然中很重要的现象，也是最早被科学家们关心和研究的物理现象。19世纪以前，电、磁现象一直作为两个独立的物理现象，没有人发现它们之间的相互联系，但是这些初期的研究为电磁学理论的建立奠定了基础。

1821年，英国科学家法拉第在实验中发现了电磁感应现象，认为时变的磁场可以产生时变的电场。19世纪50年代，英国物理学家麦克斯韦（见图1-1）在总结前人实验研究的基础上建立了电磁学的理论体系，得到了今天以他的姓氏命名的电磁场方程组，并推论电磁作用以波的形式传播。从这一经典电磁场理论中得出的电磁波在真空中的传播速度与光在真空中实际测定的传播速度相同，促使他预言光是电磁波，并且推算出电磁波在真空中传播的速度等于光速。随后于1887年，德国物理学家赫兹用振荡电路产生了电磁波，使麦克斯韦的学说得到了实验证明，为电学和光学奠定了统一的基础。麦克斯韦的电磁场理论是19世纪物理学发展的辉煌成就，在物理学发展史上是一个重要的里程碑。

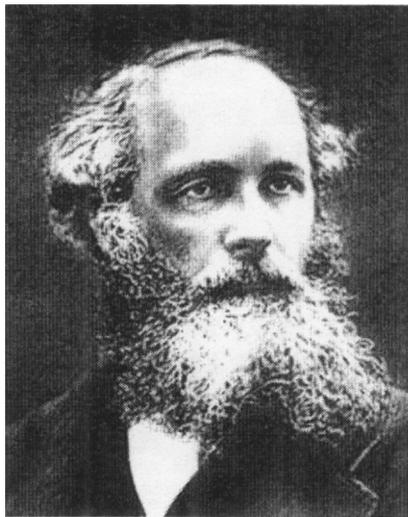


图 1-1 麦克斯韦

在麦克斯韦方程建立后的一百多年里，随着科学技术的发展，电磁理论得到了广泛的应用和发展，尤其是在最近的半个世纪以来，无线电电子学、计算机和网络技术的飞速发展，生物电磁学、环境电磁学和电磁兼容等学科的建立，为电磁理论提出了许多新的研究课题，使现代电磁理论得到了迅速的发展。

电磁场与电磁波作为理论物理学的一个重要研究分支，主要致力于统一场理论和微观量子电动力学的研究，同时是无线电技术的理论基础。

1.2 场的概念及场量表达

1.2.1 电场和磁场

在一个给定区域用一组数来定义一个量的特性时，若该区域中每个点都有具备这种特性的量，则这种性质的量称为场。静止电荷产生的场表现为对带电体有力的作用，这种场称为电场。运动电荷或电流产生的场表现为对磁铁和载流导体有力的作用，这种场称为磁场。

1.2.2 电磁场

电磁场是由相互依存的电场和磁场的总和构成的一种物理场。电场随时间变化时产生磁

场, 磁场随时间变化时又产生电场, 两者互为因果, 形成电磁场。电磁场可由变速运动的带电粒子引起, 也可由强弱变化的电流引起, 不论产生原因如何, 电磁场总是以光速向四周传播, 形成电磁波。电磁场是电磁作用的媒递物, 具有能量和动量, 是物质存在的一种形式。电磁场的性质、特征及其运动变化规律由麦克斯韦方程组确定。

电磁场与电磁波都是一种物质, 它们的存在和传播无需依赖于任何媒质。在没有物质存在的真空环境中, 电磁场与电磁波的存在和传播会感到更加“自由”。因此对于电磁场与电磁波来说, 真空环境通常被称为“自由空间”。

电磁场作为能量的一种形式, 是当今世界的重要能源, 其研究领域涉及电磁能量的产生、储存、变换、传输和综合利用。

1.2.3 电磁波

电磁波是物体所固有的发射和反射在空间传播交变的电磁场的物理量。如果电荷及电流均随时间改变, 它们产生的电场及磁场也是随时间变化的, 时变的电场与时变的磁场可以相互转化, 两者不可分割, 它们构成统一的时变电磁场。时变电场与时变磁场之间的相互转化作用, 在空间形成了电磁波。

电磁波由同相振荡且相互垂直的电场与磁场在空间中以波的形式移动, 其传播方向垂直于电场与磁场构成的平面, 有效地传递能量和动量。电磁波作为探测未知世界的一种重要手段, 主要研究领域为电磁波与目标的相互作用特性、目标特征的获取与重建、探测新技术等; 作为信息传输的载体, 电磁波已成为当今人类社会发布信息和获取信息的主要手段。

1.2.4 场量表达

场是物质存在的一种基本形式, 具有能量、动量和质量, 能传递实物间的相互作用。为了确定场的特征, 需要用基本量来描述, 它们是质量 (m)、长度 (l)、时间 (t)、电荷 (q) 和温度 (T)。为了准确计量这些量的值, 又需要有一个单位系统来表达, 在国际单位制 (简称 SI 制) 中, 采纳的单位分别是: 质量——千克 (kg), 长度——米 (m), 时间——秒 (s), 电荷——库仑 (C), 温度——开尔文 (K)。其他有关量的单位都可用这 5 个基本单位来确定。例如, 电流的单位安培 (A) 是一个导出单位, 用基本单位表示为 $1\text{A}=1\text{C}/\text{s}$ (库伦每秒); 力的单位牛顿 (N) 也是一个导出单位, 可以用基本单位表示为 $1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ (千克米每秒平方)。本书中涉及的部分场量的名称及符号参见表 1-1, 部分场量的导出单位参见表 1-2。

表 1-1 场量的名称及符号

场量	名称	类型	单位
\vec{A}	磁矢位	矢量	Wb/m
\vec{B}	磁通 (量) 密度	矢量	Wb/m^2 (T)
\vec{D}	电通 (量) 密度	矢量	C/m^2
\vec{E}	电场强度	矢量	V/m
\vec{F}	洛伦兹力	矢量	N
i	电流	标量	A
\vec{j}	(体) 电流密度	矢量	A/m^2
q	自由电荷	标量	C

续表

场量	名 称	类 型	单 位
\vec{S}	坡印廷矢量	矢量	W/m^2
\vec{u}	自由电荷的速度	矢量	m/s
V 或 φ	电位 (电动势)	标量	V

表 1-2 场量的导出单位

符 号	量 的 名 称	单 位 名 称	单 位 符 号
γ	导纳	西 (门子)	S
ω	角频率	弧度/秒	rad/s
C	电容	法 (拉)	F
ρ	电荷 (体) 密度	库 (仑) / 立方米	C/m^3
G	电导	西 (门子)	S
σ	电导率	西 (门子) / 米	S/m
W	能 (量), 功	焦 (耳)	J
F	力	牛 (顿)	N
f	频率	赫 (兹)	Hz
Z	阻抗	欧 (姆)	Ω
L	自感	亨 (利)	H
f	磁动势	安 (匝)	At
μ	磁导率	亨 (利) / 米	H/m
ϵ	电容率 (介电常数)	法 (拉) / 米	F/m
P	(有功) 功率	瓦 (特)	W
R	磁阻	$[亨 (利)]^{-1}$	H^{-1}

1.3 微分和积分的运用

本书中常出现表达同一个概念用微分形式和积分形式两种不同的形式。积分形式着重于说明方程式的物理意义, 而微分形式则便于完成数学运算。例如, 静电场中高斯定理的积分形式是

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV \quad (1-1)$$

式中: \vec{D} 为电通密度, C/m^2 ; ρ_V 为体电荷密度, C/m^3 。

式 (1-1) 说明从封闭面发出的总电通量数值上等于包含在该封闭面内的净 (自由) 电荷。闭合面外的电荷对它包围的总电荷不能作贡献, 包在闭合面内部的电荷分散在什么位置也不必考虑。

然而, 为了便于计算, 如果电荷呈对称分布, 选择一个恒电通密度面, 从而大大降低了应用高斯定理分析问题的难度。例如, 应用散度定理, 式 (1-1) 可表示为

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho_V dV \quad (1-2)$$

式 (1-2) 对于任意 S 面所包围的体积都成立, 因此等式两边的被积函数一定相等。于是, 在空间任意一点有

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (1-3)$$

式 (1-3) 为高斯定理的微分形式, 其含义为: 空间任意存在正电荷密度的点都发出电通量线, 如果电荷密度为负, 则电通量线指向电荷所在的点。如果已知封闭面上的电场强度或电通密度分布, 通过高斯定理便可求出封闭面内的总电荷。

麦克斯韦方程组的积分形式描述的是场量在区域上的总体性质, 它尤其适用于解释媒质参数有突变的区域的场量特性; 其微分形式描述的是场量在一点上的性质, 它适用于媒质参数连续变化的区域问题的求解。

1.4 解析解与数值解

电磁场与电磁波学科与现代科技的进展息息相关, 从目前现状看, 电磁场与电磁波有关问题的解主要有解析解 (analytical solution) 和数值解 (numerical solution) 两种。理论与工程所关注的问题是不同。理论研究往往对解析解 [或称闭式解 (closed-form solution)]、解的存在性、推导证明的严格性以及解的唯一性等问题感兴趣, 而工程技术研究一般对如何求出数学问题的解更关心。换句话说, 能用某种方法获得问题的解是工程技术更关心的问题, 而获得这样解的最直接方法就是通过数值解法解出。

解析解是通过一系列严格的公式, 推导出解的具体函数形式, 当已知自变量时, 就可通过解的表达式求出其对应的因变量, 也就是问题的解。数值解是采用某种计算方法, 如有限元、数值逼近、插值等, 在特定条件下通过近似计算得出来的数值。

解析解不存在的情况在数学上并不罕见, 甚至可以说这样的现象是常见的。例如, 圆周率 π 的值本身就没有解析解, 中国古代的数学家、天文学家祖冲之早在公元 480 年就算定了该值在 3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间。在一般科学与工程应用中, 取这样的值就能保证较高的精度, 而对于粗略估算来说, 使用公元前 250 年阿基米德算定的 3.141 6 也未尝不可, 而没有必要非去追求不存在的解析解不可。所以在这样的问题上, 数值解法的优势就显示出来了。

数学问题的数值解法已经成功地应用于各个领域。例如, 在力学领域, 常用有限元法求解偏微分方程; 在航空、航天与自动控制领域, 经常用到数值线性代数与常微分方程的数值解法等解决实际问题; 在工程与非工程系统的计算机仿真中, 核心问题的求解也需要用到各种差分方程、常微分方程的数值解法; 在高科技的数字信号处理领域, 离散的快速 Fourier 变换 (FFT) 已经成为其不可或缺的工具。在科学工程研究中能掌握一个或多个实用的计算工具, 无疑会为研究者提供解决实际问题的强有力手段。

电磁场与电磁波求解的问题一般都比较复杂, 而实践中又往往需要知道它的解, 对于一些典型的线性电磁场问题, 已经有较多求解析解的方法, 主要有分离变量法、积分变换法、镜像法以及复变函数法等。用分离变量法求出的解析式常常是用积分形式或级数形式表达的, 一般都便于计算, 它适用于求解部分边界几何形状比较规则的两维问题和轴对称问题, 也可近似求解部分典型的三维问题, 是一个广泛使用的解析方法。积分变换法能把含有 n 个自变量的方程转化为含 $n-1$ 个自变量的方程, 求解过程规范、简单; 缺点是反变换困难,

不易得出形式简单的表达式。镜像法是基于电磁场解的唯一性定理求解的一个方法，它要求在非求解区域中以适当的等效源和媒质分布来等效代替边界的影响，以保证满足内边界面上的边界条件。镜像法常常能方便地得到场的解析解，可用于静电场、恒定电流场、恒定磁场以及辐射场的求解，缺点是难以应用于边界几何形状复杂的场问题。复变函数法适用于二维静态场的求解，与其他解析方法相比，能够处理边界几何形状更复杂的问题，而且解析式往往比较简单，缺点是难于处理时谐场和三维场问题。

解析解的表达式形式严密、理论价值大，但并不是所有电磁场问题都存在解析解。大量的电磁场定解问题还需要用数值方法求解。数值法的适用面很宽，几乎适用于所有经典电磁场问题的求解，最大的缺点是求解过程复杂、计算量大。目前常用的数值求解方法有有限差分法、有限元法和体积分方程法等，在计算过程中要特别注意数值稳定性，不然计算结果的准确性就得不到充分保证。

在求解实践中，常常会把几种方法混合起来使用，以提高求解效率和减少数值计算量。例如对于某些三维问题，可用积分变换法把方程降低一维，然后用分离变量法进一步求解，就可以得到解析解。在求解过程中，要尽可能用解析法求解，若确实无法进一步求解时再用数值法求解。为简化求解过程，应设法利用问题的对称性（例如球对称、轴对称）和奇偶性。这些都是提高计算效率的有效措施。

2 矢量分析

电磁场与电磁波理论主要研究电磁现象及场的基本规律,其中所涉及的物理量,如电场强度和磁场强度等都具有确切的物理意义,当这些物理量与空间坐标及时间有关时,就需要用矢量来描述,这些矢量在空间的分布就构成了矢量场。矢量分析是研究电磁场与电磁波的主要数学工具之一,掌握本章的知识将为读者系统、深入地学习本书内容奠定必要的基础。本章首先对矢量分析方面的基础知识进行重点复习和补充,然后讨论标量场的梯度、矢量场的散度、旋度和相关定理,最后介绍正交曲线坐标系。

2.1 矢量及矢量场

2.1.1 矢量

在各门科学中所遇到的量可以分为两类:一类是完全由数值大小决定的量,称为标量(或纯量),例如面积、温度、时间、质量等;另一类是既有数值大小又有方向的量,称为矢量(或向量),例如力、速度、加速度等。矢量常使用黑体字母来表示,如 \mathbf{A} ;也可在该物理量上方用箭头表示,如 \vec{A} 。仅表示矢量大小的数值称为矢量的模,用 $|\vec{A}|$ 或 $|\mathbf{A}|$ 表示;矢量的方向可用单位矢量表示,如 \vec{e} 。单位矢量是模为1个单位的矢量,故可用它表示方向。在几何描述上,一般用一个带箭头的有向线段来表示矢量,如图2-1所示,线段长度代表矢量的大小(模),线段的方向表示矢量的方向。

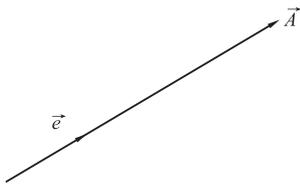


图 2-1 矢量的表示

2.1.2 矢量场

场的定义:若对于空间域 Ω 上每一点都对应着某个物理量的一个标量(数量)或一个矢量,则称此空间域确定了这个物理量的场。若所讨论的物理量是标量,则称这个场为标量场;若所讨论的物理量是矢量,则称这个场为矢量场。例如,若所研究的物理量是温度、压力、密度、电位等时,这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个标量(即数量)来表示,即这些物理量的状态可用标量函数 $A(x, y, z, t)$ 来描绘,则这些标量函数在空间域上就定出标量场,即定出温度场、压力场、密度场、电位场等;当所研究的物理量是力、速度、电场强度等时,这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个矢量来表示,即这些物理量的状态可用矢量函数 $\vec{A}(x, y, z, t)$ 来描绘,则这些矢量函数在空间域上就定出矢量场,即定出力场、速度场、电场强度场等。

若场中的每一点所对应的量仅与位置有关而与时间无关,则称该场为稳定(静态)场。若场中的每一点所对应的量与该点的位置和时间均有关,则称该场为不稳定(时变或动态)场。

根据场的定义,所谓给出一个标量场或矢量场,从数学观点看,相当于给出一个标量函数或矢量函数。一个矢量函数可分解为三个标量函数,如在直角坐标系下,有

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{e}_x A_x(x, y, z, t) + \vec{e}_y A_y(x, y, z, t) + \vec{e}_z A_z(x, y, z, t) \quad (2-1)$$

式中: A_x, A_y, A_z 都是标量函数; \vec{e}_x, \vec{e}_y 和 \vec{e}_z 分别是沿 x, y 和 z 方向的单位矢量。

2.1.3 矢量线

在矢量场中, 各点的场量是随空间位置变化的矢量。因此, 一个矢量场 \vec{A} 可以用一个标量函数来表示。在直角坐标系中可表示为

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y, z)$$

M 是场中矢量线上任一点, 对应的坐标为 (x, y, z) , 其矢径为

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

其微分矢径为

$$d\vec{r} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$$

由导数的几何意义可知, $d\vec{r}$ 为矢量线在 M 点处的切线矢量。在矢量场中, 为了形象直观地描述矢量在空间的分布状况, 引入了矢量线的概念。矢量线是一条空间曲线, 在它上面每一点的场矢量都与其相切 (如图 2-2 所示)。在 M 点 $d\vec{r}$ 与 \vec{A} 共线, 于是有矢量线的微分方程

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (2-2)$$

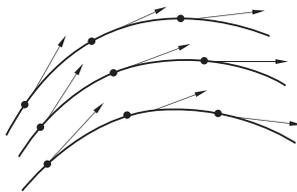


图 2-2 矢量线

【例 2-1】 坐标原点处有电量为 q 的点电荷, 求电场强度的矢量方程。

解 设空间任意点 M 的坐标为 (x, y, z) , 其矢径为 \vec{r} , 则电场强度为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi |\vec{r}|^3 \epsilon} \vec{r} = \frac{q}{4\pi |\vec{r}|^3 \epsilon} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

式中: ϵ 为介电常数; $|\vec{r}|$ 为矢径 \vec{r} 的模。

根据矢量线应满足的微分方程 $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$

可得

$$\frac{dx}{qx} = \frac{dy}{qy} = \frac{dz}{qz}$$

可推出

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

解方程得

$$\begin{cases} y = C_1 x \\ z = C_2 x \end{cases}$$

式中: C_1, C_2 为任意常数。

点电荷 q 为正时可画出其矢量线, 如图 2-3 所示, 该图形是一簇从坐标原点出发的射线, 又称电力线。若 q 为负, 则其方向相反。

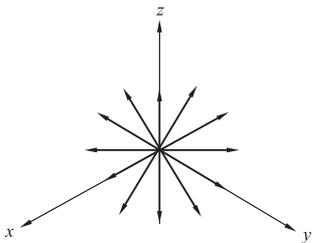


图 2-3 电场强度的矢量线