· 考研数学系列丛书
· 全国著名考研辅导机构推荐用书

高等数学
典型问题分类解析

李源　郝小枝　编著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

• 考研数学系列丛书
• 全国著名考研辅导机构推荐用书

高等数学
典型问题分类解析

李源　郝小枝　编著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学典型问题分类解析／李源，郝小枝编著
. -- 昆明：云南大学出版社，2012（2013 重印）
ISBN 978 -7 -5482 -1302 -4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②郝… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 249051 号

高等数学典型问题分类解析

李　源　郝小枝　编著

策划编辑：张丽华
责任编辑：张丽华
封面设计：夏雪梅
出版发行：云南大学出版社
印　　装：云南大学出版社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：17
字　　数：450 千
版　　次：2013 年 1 月第 1 版
印　　次：2013 年 11 月第 2 次印刷
书　　号：ISBN 978 -7 -5482 -1302 -4
定　　价：38.00 元

地　　址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内
邮　　编：650091
E - mail：market@ynup.com
网　　址：http://www.ynup.com

前　　言

数学是一门重要的基础性学科，又是一门应用广泛的工具性学科．随着当今经济科学和管理科学的不断发展和深化，伴随着计算机科学的迅速发展，数学科学对经济科学和管理科学的发展起着日益突出的促进作用．高等数学是众多数学分支和应用学科的重要基础和有力工具，是经济管理类各专业的一门重要的学科基础课程．经济管理类学生高等数学掌握得如何，直接影响其后继课程的学习，甚至可以说决定了其今后在专业上造诣的高低．

然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间的限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定的影响；另一方面由于经济管理类专业学生在高考招生时文理兼收，学生的数学基础参差不齐，教师在授课时经常会遇到“两头吃不饱，进度难掌握”的新难题；此外，后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势．如何解决这些矛盾，如何在大学高等数学的教学中兼顾不同基础学生的需求，如何把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试的复习紧密衔接，为此作者根据在云南大学多年的教学实践以及讲授硕士研究生入学考试高等数学辅导课程的经验，听取了广大同学的意见，认真编写了这本《高等数学典型问题分类解析》．

本书每章包括以下几部分内容：

一、内容精要

提纲挈领式地归纳了每一章的概念、定理、公式、方法，并给出一些常用的公式．

二、释疑解惑

作者根据自己的教学经验，列举了学生中若干常见的、具有共性的疑问，给予解答．目的是为读者释疑解惑、澄清误解，更加准确地理解和掌握高等数学的基本概念．其中有些问题不仅能够解答学生的疑问，而且有一定的启发性．

三、典型例题分类解析

通过对典型例题的解题思路和解题技巧的分类评析，或是澄清基本概念与基本运

算，或是指出同学解题中常犯的错误，或是介绍高等数学中常用的解题思路与技巧，在每种题型后都以“评注”的方式总结解题的经验与心得．通过这些希望能开阔思路、活跃思维、举一反三、触类旁通，帮助读者提高分析问题和解决问题的能力．

四、同步练习

同学可通过做各章设置的练习题以达到巩固、理解、提高的目的．

本书作为2011年度云南大学数学与统计学院教学改革研究项目“经管类高等数学课程习题课教材的建设”的研究成果之一，填补了我校高等数学课程长期以来缺乏课程辅导资料的空白，对我校高等数学课程教学质量的提高将起到积极作用．

本书是在校大学生学习高等数学课程必备的辅导佳作，是报考硕士研究生复习考研数学时系统备战的经典，也是授课教师有益的教学参考用书．

要写好一本教材实非易事，限于编者水平，书中疏漏错误难免，希望读者给予批评指正．

编　者

2012年8月于云南大学

目　录

第 1 章　函　数

一、内容精要

(一) 函数的基本概念

设 D 是一个非空的实数集，如果有一个对应规则 f，对每一个 $x \in D$，都能对应唯一的一个实数 y，则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数，记为 $y = f(x)$，称 x 为函数的自变量，y 为函数的因变量，D 称为函数的定义域，并把实数集 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

注意函数定义中的定义域和对应法则是确定函数的两个要素，因此当且仅当两个函数的定义域和对应法则都相同时，才能说它们是相同的函数.

(二) 函数的几种性态

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义，若 $\exists M > 0$，使 $\forall x \in D$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，即 $f(x)$ 在 D 上无界是指对 $\forall M > 0$，$\exists x_0 \in D$，使得 $|f(x_0)| > M$. 如果存在实数 A，使得 $\forall x \in D$ 都有 $f(x) \leqslant A$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界；如果存在实数 B，使得 $\forall x \in D$ 都有 $f(x) \geqslant B$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界.

易知：函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义，若对 $\forall x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是奇函数；若对 $\forall x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是偶函数，否则称函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称.

3. 单调性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义，若对 $\forall x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增；而当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增.

类似可以给出函数单调递减和严格单调递减的定义.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义，如果存在正数 T，使得 $\forall x \in D$，都有 $f(x+T) = f(x)$，则

称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

周期函数的周期不唯一，通常称周期中的最小者(如果存在的话)为该周期函数的最小正周期.

(三)复合函数

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 可复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，通常称 $\varphi(x)$ 为内函数，$f(u)$ 为外函数，u 称为中间变量.

(四)反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对 $\forall y\in f(D)$，存在唯一确定的 $x\in D$，满足 $y=f(x)$，则得到 x 是 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

(五)初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，即 $y=C$(常数)；$y=x^{\alpha}$(α 为常数)；$y=a^{x}$($a>0$，$a\neq1$ 为常数)；$y=\log_{a}x$($a>0$，$a\neq1$ 为常数)；$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$；$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=arc\cot x$ 统称为基本初等函数.

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的，可用一个解析式表示的函数.

二、释疑解惑

1. 周期函数是否一定存在最小正周期?

答 不一定. 注意周期函数的定义为：若 $\exists T>0$，使得对任意的 x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 若在 $f(x)$ 的周期 T 中，存在一个最小正数 T_0，则将 T_0 称为最小正周期. 考虑狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in \overline{Q}\end{cases}$.

容易证明：对于 $\forall T>0$ 及任意的 x，都有 $D(x+T)=D(x)$. 即 $D(x)$ 是周期函数，任何正数都是它的周期，但它没有最小正周期. 这就表明：周期函数未必有最小正周期.

2. 是否可以由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任何有限闭区间 $[a,b]$ 有界推出 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界?

答 不能. 数学中有限与无限存在重大差别，虽然可以从有限认识无限，但应注意有限中具有的性质不能随意推广到无限上来. 例如：$f(x)=x^2$ 任何有限闭区间 $[a,b]$ 上均有界，但在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 内为无界函数.

3. 由 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 是否一定可以得到复合函数 $y=f[g(x)]$?

答 不能. 注意复合函数的定义：若对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，u 依确定的规则有确定值 $u=g(x)$ 与之对应；而对此 u 的值，y 依确定的规则有值与之对应，即

$y=f(u)$，则称 $y=f[g(x)]$ 为 x 的复合函数．这表明 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 能复合为 x 的复合函数需要函数 $u=g(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集为非空集，否则就不能得到复合函数．例如：$y=\arcsin u$，$u=x^2+3$ 就不能复合为 x 的函数．因 $y=\arcsin u$ 有意义的点必须是 $|u|\leqslant 1$，而 $x^2+3\geqslant 3$，可知 $y=\arcsin(x^2+3)$ 无意义．

4. 如何理解分段函数？

答　分段函数是自变量在不同取值范围内对应不同解析式表示的函数．在整个定义域内它只是一个函数，而不是几个函数．应注意两点：

(1) 分段函数的定义域是各子式定义域的并集；

(2) 作分段函数的图像时，应分段作图像，取各段定义域内的部分．

因初等函数是用一个数学解析式表示，而分段函数是用几个数学解析式表示，因而分段函数一般不是初等函数．但也有一些分段函数可用一个数学解析式表示，仍然是初等函数．例如：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}=\sqrt{x^2}$$ 既是分段函数，又是初等函数．

5. 如何正确理解反三角函数？

答　我们知道只有一一映射才能建立反函数，而三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都不是一一映射，因而它们都没有反函数．但是在研究问题时，确实有已知三角函数值求角度的需求，因此引入了反三角函数．建立反三角函数的基本方法是：在使 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 成为一一映射的特定区间中定义它们的反函数．具体情况如下表：

反三角函数		(与之对应的)三角函数	
$y=\arcsin x$	定义域 $-1\leqslant x\leqslant 1$	$y=\sin x$	定义域 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$
	值域 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$		值域 $-1\leqslant y\leqslant 1$
$y=\arccos x$	定义域 $-1\leqslant x\leqslant 1$	$y=\cos x$	定义域 $0\leqslant x\leqslant\pi$
	值域 $0\leqslant y\leqslant\pi$		值域 $-1\leqslant y\leqslant 1$
$y=\arctan x$	定义域 $-\infty<x<+\infty$	$y=\tan x$	定义域 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$
	值域 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$		值域 $-\infty<y<+\infty$
$y=\operatorname{arccot} x$	定义域 $-\infty<x<+\infty$	$y=\cot x$	定义域 $0<x<\pi$
	值域 $0<y<\pi$		值 域 $-\infty<y<+\infty$

因此，在使用反三角函数时应注意定义它所采用的一一对应区间．例如：$y=\arcsin x$

是 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数．因此，在表示角度时，只有当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$y=\sin x$中的 x 才能表示为 $x=\arcsin y$．而当 x 不在此范围时，则需利用适当的诱导公式将角度化到此范围时，才可通过反正弦的符号表示．例如：$y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$时，角度 x 应表示为 $x=\pi-\arcsin y$．这是因为：

$y=\sin x=\sin(\pi-x)$且 $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，则 $\pi-x=\arcsin y$，从而有 $x=\pi-\arcsin y$．

其他反三角函数的情况与反正弦类似，此处不再赘述．

三、典型例题分类解析

◆题型一　关于函数基本概念的问题

例 1　指出下列各组中的两个函数是否相同，并说明理由．

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=2^{\log_2 x}$；　　(2) $f(x)=\sin(\arcsin x)$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x\operatorname{sgn}x$；　　(4) $f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $g(x)=\sqrt{2}\cos x$.

解　(1) $f(x)$与 $g(x)$不同．因为它们的定义域不同，$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$．

(2) $f(x)$与 $g(x)$不同．因为它们的定义域不同，$f(x)$的定义域是$[-1,1]$，而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$．

(3) $f(x)$与 $g(x)$相同．因为它们的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，且它们的对应法则都是$\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，即它们的对应法则也相同．

(4) $f(x)$与 $g(x)$不同．因为它们的对应法则不同．$f(x)=\sqrt{2\cos^2 x}=\sqrt{2}\,|\cos x|$．

评注　函数的两个基本要素是定义域和对应法则，两个函数相同当且仅当它们的定义域和对应法则都相同．当然，两函数的对应法则相同是指它们在同一 x 处所对应的函数值相同，而并非要求它们具有相同的数学表达式．

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$；　　(2) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$；

(3) $y=\arccos\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x\geqslant 0\\ e^x-2, & x<0\end{cases}$；

(5) 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,2)$，求函数 $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+f(7-x)$的定义域；

(6) 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，求函数 $y=f(x^2)+f(e^x)$的定义域．

解　(1) 由$\begin{cases}3-x>0\\ \lg(3-x)\neq 0\\ 49-x^2\geqslant 0\end{cases}$，得$\begin{cases}3-x>0\\ 3-x\neq 1\\ -7\leqslant x\leqslant 7\end{cases}$，解之得 $-7\leqslant x<2$ 或 $2<x<3$，

即所求定义域为$[-7,2)\cup(2,3)$.

（2）由$\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq1\\16-x^2>0\end{cases}$，得$\begin{cases}x>1\\x\neq2\\-4<x<4\end{cases}$，故$1<x<2$或$2<x<4$，
即所求定义域为$(1,2)\cup(2,4)$.

（3）由$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant1\\2x-x^2\geqslant0\\2x-1>0\\2x-1\neq1\end{cases}$，知$\begin{cases}-6\leqslant2x\leqslant8\\x(x-2)\leqslant0\\2x>1\\x\neq1\end{cases}$，即$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant4\\0\leqslant x\leqslant2\\x>\dfrac{1}{2}\\x\neq1\end{cases}$，故$\dfrac{1}{2}<x<1$或$1<x\leqslant2$，

即所求定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

（4）函数的定义域为$(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$，即$(-\infty,+\infty)$.

（5）$f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$的定义域可由$0\leqslant\dfrac{x}{2}-1<2$，解之可得$2\leqslant x<6$；

而$f(7-x)$的定义域可$0\leqslant7-x<2$，解之可得$5<x\leqslant7$.

由此可知$f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+f(7-x)$的定义域为$\begin{cases}2\leqslant x<6\\5<x\leqslant7\end{cases}$，即所求定义域为$(5,6)$.

（6）易知函数$f(x)$的定义域为$(-1,1)$，由此有$\begin{cases}-1<x^2<1\\-1<e^x<1\end{cases}$，

即$\begin{cases}0\leqslant x^2<1\\0<e^x<1\end{cases}$，亦即$\begin{cases}-1<x<1\\-\infty<x<0\end{cases}$，故所求定义域为$(-1,0)$.

评注　关于函数定义域的求法应注意：如果函数是一个抽象的数学式子，则其定义域是使这个式子有意义的一切实数，这时应注意：①分式要求分母不等于0；②偶次根式要求被开方式非负；③对数式要求真数大于0，底数大于0而不等于1；④反三角函数式$y=\arcsin u$，$y=\arccos u$要求$|u|\leqslant1$；⑤若函数表达式由几项组成，则其定义域是各项定义域的交集；⑥分段函数的定义域是分段函数中各段定义域的并集；⑦对于实际问题，确定函数定义域时还需考虑问题的实际意义.

◆题型二　关于复合函数计算的问题

例 1　设$f(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\-x,\ x\geqslant0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x,\ x\leqslant0\\x+2,\ x>0\end{cases}$，求$g[f(x)]$与$f[g(x)]$.

分析　求复合函数的$g[f(x)]$的方法是在$g(x)$的表达式中用$f(x)$代替x，包括刻画$g(x)$的自变量取值范围的x，在$g[f(x)]$中由$f(x)$的取值范围转化成x的取值范围即得.同理可得$f[g(x)]$.

解　$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x),\quad f(x)\leqslant0\\f(x)+2,\quad f(x)>0\end{cases}$，由于$f(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\-x,\ x\geqslant0\end{cases}$，

所以由$f(x)\leqslant0$可得$x\geqslant0$，且$f(x)=-x$；由$f(x)>0$可得$x<0$，且$f(x)=x^2$.

由此可得$g[f(x)]=\begin{cases}2+x,\ x\geqslant0\\x^2+2,\ x<0\end{cases}$.

同理：$f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2, & g(x)<0\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0\end{cases}$. 由于 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,

从而可知：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$g(x)\geqslant 2$，

所以 $f[g(x)]=-g(x)=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -x-2, & x>0\end{cases}$.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x)=f[f(x)]$, $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$, $n\in\mathbf{Z}^+$, 计算 $f_n(x)$.

分析 $f_n(x)$ 是用递推方式定义的，因此可考虑通过 $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的计算结果归纳 $f_n(x)$，并通过数学归纳法证明结果的正确性.

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

猜想：$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，下证结论的正确性.

易知：当 $n=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立，即 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,

当 $n=k+1$ 时，$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$,

即 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上知：对 $\forall n\in\mathbf{Z}^+$，有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

评注 在数学命题中有一种与正整数 n 有关的命题，称之为算术型命题，而数学归纳法是论证算术型命题的最有效方法之一，其基本思想是递推原理，读者应重视这种方法.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2), & |x|<1\\ 1, & |x|\geqslant 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x<-1\\ \sqrt{1+x}, & x\geqslant -1\end{cases}$，求 $f(x)+g(x)$.

分析 在进行两个分段函数四则运算时，由于分界点的不尽相同，即使分界点相同，还要看在该分界点处函数值如何定义，所以这类问题宜通过列表的方法加以讨论. 下表最后一行便是计算的结果.

解

x	$(-\infty,-1]$	-1	$(-1,1)$	$[1,+\infty)$
$f(x)$	1	1	$\ln(1-x^2)$	1
$g(x)$	x	0	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1+x}$
$f(x)+g(x)$	$1+x$	1	$\ln(1-x^2)+\sqrt{1+x}$	$1+\sqrt{1+x}$

例4 解下列函数方程：

（1）设$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=3\cos x-1$，求$f(x)$；（2）设$f(\mathrm{e}^{x})=x^{3}+\sin x$，求$f(x)$；

（3）设$f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x$，求$f(x)$.

分析 由条件$f[\varphi(x)]=g(x)$解出$f(x)$的问题称为解函数方程（也称为求函数表达式），其常用方法有：配凑法、换元法、解方程组的方法等.

①配凑法的基本思想是：通过将$g(x)$配凑为$\varphi(x)$的函数，不妨设$f[\varphi(x)]=g(x)=u[\varphi(x)]$，则由函数定义知：$f(x)=u(x)$.

②换元法的基本思想是：令$\varphi(x)=t$，从中解出$x=\varphi^{-1}(t)$代入函数方程$f[\varphi(x)]=g(x)$得：$f(t)=g[\varphi^{-1}(t)]$，由于函数关系与自变量所用字母的选取无关，从而知：$f(x)=g[\varphi^{-1}(x)]$.

③解方程组的方法一般适用于条件中存在两个或两个以上未知函数的函数方程的求解，其基本思想是：在条件$f[\varphi(x)]+f[\delta(x)]=g(x)$中利用合适的变量替换建立未知函数$f[\varphi(x)]$，$f[\delta(x)]$的另一等式，联立得到一个方程组，从中解出所需的未知函数.

解 （1）利用配凑法．由于$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=3\left(2\cos^{2}\dfrac{x}{2}-1\right)-1=6\cos^{2}\dfrac{x}{2}-4$，

所以$f(x)=6x^{2}-4$.

（2）利用换元法．令$\mathrm{e}^{x}=t\ (x\in R,\ t>0)$，则$x=\ln t$，

所以$f(t)=(\ln t)^{3}+\sin(\ln t)=\ln^{3}t+\sin(\ln t)$，$t>0$，即$f(x)=\ln^{3}x+\sin(\ln x)$，$x>0$.

（3）利用解方程组的方法．设$\dfrac{x+1}{2x-1}=t$，解之得$x=\dfrac{t+1}{2t-1}$，

将其代入原等式得$f(t)-2f\left(\dfrac{t+1}{2t-1}\right)=\dfrac{t+1}{2t-1}$，于是有$\begin{cases}f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x\\2f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-f(x)=-\dfrac{x+1}{2x-1}\end{cases}$，

解此以$f(x)$和$f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)$为未知量的线性方程组可得：$f(x)=\dfrac{4x^{2}-x+1}{3(1-2x)}$.

例5 设对任一非零实数x总有$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{x}\right)+3f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{17}{x}$，求$f(x)$.

分析 解这类问题，须找出这样的换元：在将$\dfrac{2}{x}$变换成为$\dfrac{u}{3}$的同时将$\dfrac{x}{3}$变换成$\dfrac{2}{u}$.

解 令$x=\dfrac{6}{u}$，则有$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{u}{3}\right)+3f\left(\dfrac{2}{u}\right)=\dfrac{3}{u}-\dfrac{17}{6}u$，即$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{3}\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{17}{6}x$，

与原方程联立得$\begin{cases}\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{x}\right)+3f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{17}{x}\\\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{3}\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{17}{6}x\end{cases}$，

解之可得：$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{6}{x}$，即$f(x)=x-\dfrac{2}{x}$.

◆题型三　关于函数的反函数计算的问题

例 1　求下列函数的反函数.

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$(x\geqslant 1)$；(2) $y=\begin{cases}x\ \ , & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & x>4\end{cases}$；

(3) $y=\sin x$，$\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\right)$.

解　(1) 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，有 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$.　①

于是 $e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=x-\sqrt{x^2-1}$.　②

①式与②式相加得：$x=\dfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\geqslant \ln 1=0$，即函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 的值域为 $[0,+\infty)$

从而所求反函数为：$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$x\geqslant 0$.

(2) 函数为分段函数，考虑在各区间段分别求反函数.

当 $x<1$ 时，$y=x$，其反函数为：$y=x$，$x<1$；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=x^2$，其反函数为：$y=\sqrt{x}$，$1\leqslant x\leqslant 16$；

当 $x>4$ 时，$y=2^x$，其反函数为：$y=\log_2 x$，$x>16$.

因此所求反函数为：$y=\begin{cases}x, & x>1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16.\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$

(3) 当 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi$ 时，$y=\sin x=\sin(\pi-x)$，其中 $0\leqslant \pi-x\leqslant \dfrac{\pi}{2}$，

于是从中解出 $\pi-x=\arcsin y$，即 $x=\pi-\arcsin y$. 而当 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi$ 时，有 $0\leqslant y\leqslant 1$.

因此所求反函数为：$y=\pi-\arcsin x$，$0\leqslant x\leqslant 1$.

评注　(1) 求函数反函数的基本步骤可归结为：①从直接函数 $y=f(x)$ 中反解出 $x=f^{-1}(y)$；②按习惯换字母得到 $y=f^{-1}(x)$，得到反函数的解析式；③ 求直接函数 $y=f(x)$ 的值域，此即为反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

(2) 值得注意的是：①分段函数的反函数应分段求出；②在计算三角函数的反函数时，应注意反三角表达式 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$ 的特定含义. 当三角函数的角度没有位于反三角函数定义的特定区间时，通常可利用适当的诱导公式将其移入反三角函数定义的特定区间，此时便可借助于反三角函数的表达式实现反解.

例 2　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，且 $f(x)\neq 0$，求 $g\left[\dfrac{3}{f(2x-1)}\right]$ 的反函数.

分析　由反函数定义知，可从关系式 $y=f(x)$ 中解出 $x=g(y)$；也可从关系式 $y=g(x)$ 中解出 $x=f(y)$.

解　因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，所以可由 $v=f(u)$ 解得 $u=g(v)$，反之亦然.

故可由 $y=g\left[\dfrac{3}{f(2x-1)}\right]$，得$\dfrac{3}{f(2x-1)}=f(y)$.

再由$f(2x-1)=\dfrac{3}{f(y)}$，得 $2x-1=g\left[\dfrac{3}{f(y)}\right]$，即 $x=\dfrac{1}{2}\left\{1+g\left[\dfrac{3}{f(y)}\right]\right\}$.

可知所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}\left\{1+g\left[\dfrac{3}{f(x)}\right]\right\}$.

◆题型四　关于函数奇偶性、单调性、有界性、周期性的题类

例 1　判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，其中 $a>0$，且 $a\neq 1$；

(2) $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$

(3) Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in \overline{Q}\end{cases}$;

(4) $f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $F(x)$是奇函数.

解　(1)函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$，且

$$f(-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

(2) 函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$，且

$\operatorname{sgn}(-x)=\begin{cases}1, & -x>0\\ 0, & -x=0\\ -1, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}=-\operatorname{sgn}x$，故$f(x)$是奇函数.

(3) 函数的定义域为$(-\infty，+\infty)$，且 $D(-x)=\begin{cases}1, & -x\in Q\\ 0, & -x\in\overline{Q}\end{cases}=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in\overline{Q}\end{cases}=D(x)$,

所以 $D(x)$是偶函数.

(4) 易知：$f(x)$的定义域关于原点对称，且 $F(x)$是奇函数，

$$\begin{aligned}f(-x)&=F(-x)\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-F(x)\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=-F(x)\left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x)\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)=f(x).\end{aligned}$$

所以$f(x)$是偶函数.

例 2　设$f(x)$在区间$[-a，a](a>0)$上有定义. 证明：$f(x)$可表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

分析　由$f(x)$在$[-a，a]$上定义知：对$\forall x\in[-a，a]$，$f(x)$与$f(-x)$均有意义. 设满足题意的分解是可行的，即存在一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)+h(x)$. 我们可以试着用奇函数和偶函数的定义将 $g(x)$和 $h(x)$求出来. 由于 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)$,

联立$\begin{cases} g(x)+h(x)=f(x) \\ -g(x)+h(x)=f(-x) \end{cases}$,

由此解得：$g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

证明 令 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

因为 $g(-x)=-g(x)$，$h(-x)=h(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=g(x)+h(x)$，从而说明 $f(x)$ 可表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

评注 由奇偶性的定义可知，具有奇偶性的函数其定义域必关于原点对称，因此讨论函数的奇偶性时应首先考察函数的定义域.

例 3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的单调性.

解 易知函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1+\dfrac{-2}{e^{2x}+1}$.

对 $\forall x_1$，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，令 $x_1<x_2$，由于

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(1+\frac{-2}{e^{2x_1}+1}\right)-\left(1+\frac{-2}{e^{2x_2}+1}\right)=\frac{2(e^{2x_1}-e^{2x_2})}{(e^{2x_1}+1)(e^{2x_2}+1)}<0$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

例 4 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增，记 $\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$. 证明：$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增.

证明 任取 x_1，$x_2\in(a, b)$，且设 $x_1<x_2$. 由题意知：$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，$g(x_1)\leqslant g(x_2)$.

而 $\varphi(x_2)=\max\{f(x_2), g(x_2)\}\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1)$,

$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2), g(x_2)\}\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1)$,

由此得到 $\varphi(x_2)\geqslant\max\{f(x_1), g(x_1)\}=\varphi(x_1)$. 故 $\varphi(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增.

同理：$\psi(x_1)=\min\{f(x_1), g(x_1)\}\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_2)$,

$\psi(x_1)=\min\{f(x_1), g(x_1)\}\leqslant g(x_1)\leqslant g(x_2)$,

所以 $\psi(x_1)\leqslant\min\{f(x_2), g(x_2)\}=\psi(x_2)$，即 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增.

例 5 设函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增.

证明：对任意的 $a>0$，$b>0$ 都有 $f(a+b)>f(a)+f(b)$.

证明 由于 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\forall a>0$，$b>0$，都有 $a<a+b$，$b<a+b$,

所以 $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(a+b)}{a+b}$，进而得到 $f(a)<\dfrac{af(a+b)}{a+b}$ ①

同理：$\dfrac{f(b)}{b}<\dfrac{f(a+b)}{a+b}$，进而得 $f(b)<\dfrac{bf(a+b)}{a+b}$ ②

将①②两式相加得：$f(a+b)>f(a)+f(b)$.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f[f(x)]=x$.

证明：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x)=x$.