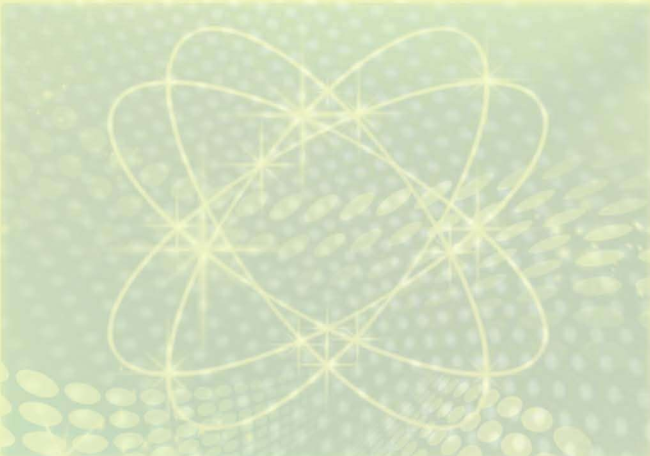
高等数学习题课教程
下册

薛利敏　关文吉　主编



西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程. 下册/ 薛利敏,关文吉主编—2 版. —西安:西北大学出版社,2014. 8

ISBN 978-7-5604-3429-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①薛…　②关…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178492 号

书　　名	高等数学习题课教程　下册
主　　编	薛利敏　关文吉
出版发行	西北大学出版社
社　　址	西安市太白北路 229 号
邮政编码	710069
电　　话	029－88303059
经　　销	新华书店
印　　刷	西安华新彩印有限责任公司
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　张	13
字　　数	348 千字
版　　次	2007 年 11 月第 1 版
	2014 年 8 月第 2 版
印　　次	2014 年 8 月第 5 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5604-3429-2
定　　价	26.00 元

本书所用数学符号及其含义

N	自然数集合
N^+ 或 N_+	正整数集合
Z	整数集合
Q	有理数集合
R	实数集合
C	复数集合
$\varnothing$	空集
$\forall x$	对一切 x
$\exists x$	存在 x
$\in$	属于
$\overline{\in}$ 或 $\notin$	不属于
$\subset$	含于
$\supset$	包含
$\cap$	交集
$\cup$	并集
$\backslash$	差集
$\lvert a \rvert$	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘，即 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，即 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)$
$(2n-1)!!$	$(2n-1)$ 的双阶乘，即 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$
$\binom{\alpha}{n}$	即 $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$（$\alpha$ 为实数）
$\binom{n}{k}$ 或 C_n^k	二项系数（从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同组合的总数）即 $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}$

$\sum$	总和
$\prod$	连乘
$\%$	百分比
∞	无穷大
$[\ ]$	方括号,表示其中数的整数部分
$\{\ \}$	花括号,表示其中数的分数部分
$^{\circ}\ '\ ''$	度,分,秒(例 $21^{\circ}23'18''$)
$\overset{\frown}{AB}$	弧
π	圆周率
$\because$	因为
$\therefore$	所以
$\lg x$	以 10 为底的对数(称为常用对数)
$\ln x$	以 e 为底的对数(称为自然对数)
e	自然对数的底
e^x 或 $\exp x$	指数函数(以 e 为底)
$\Gamma(\zeta)$	伽马函数($\Gamma-$ 函数)
$\beta(p,q)$	贝塔函数($\beta-$ 函数)
$\nearrow(\searrow)$	单调上升(单调下降)
$\to$	收敛于,趋于
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界
$\max$	最大
$\min$	最小
Δx	x 的有限增量

序　言

本学习指导书是陕西省教育厅组织的21世纪高等教育系列规划教材《高等数学》(主编辛小龙)的配套辅导书.

《高等数学》教材出版后,已被我省许多高校采用作为教材使用.在使用过程中,许多任课教师和学生都认为有必要出版一本配套学习指导书,目的有两个:一是为学生学习《高等数学》提供必要的学习和指导;二是为讲授这套教材的青年教师提供帮助.薛利敏副教授主编的这本学习指导书,正迎合了这样的需求.

这本学习指导书体现了以下几个特点:

1. 分类讲解,层次分明.每节内容分为内容提要、学习要求、答疑解惑、典型题解、习题选解等五部分内容,分类指导.

2. 内容简明,重点清楚.每一节都在"内容提要"中简明地列出了知识要点,并在"学习要求"中列出了重点难点.

3. 方法具体.在各节的"典型题解"、"习题选解"中,对解题的思路、依据、步骤等进行了具体详尽的介绍,还通过画龙点睛式的点拨,使学生尽量收到举一反三的效果.

4. 兼顾普及与提高.这本学习指导书在突出基本知识、基本技能、基本数学思想的基础上,还选编了部分考研试题,以期对考研的学生能起到促进作用.

本学习指导书内容丰富、选材得当、编写认真、特点鲜明,相信本书出版后能对我省相关院校高等数学教学起到积极促进作用.

辛小龙

2007年7月

前　　言

高等数学习题课是高等数学课程的重要组成部分，加强高等数学习题课的教学是提高高等数学课程教学质量的重要环节.

本书是与西北大学出版社出版的薛利敏、赵小鹏主编的《高等数学》(第三版)相配套的习题课教程，是编者在 2007 年编写的《高等数学学习指导与习题详解》的基础上，经过近几年高等数学精品课程建设，不断进行教学研究和教学改革，广泛吸收使用该书的广大师生的意见和建议修编而成的. 本书既可作为理、工、农、经、管、生、化等各专业学生高等数学习题课的教材，也可作为报考硕士研究生同学的复习资料.

根据习题课的需要，本书是按照《高等数学》(第三版)的编排体系逐节对应编写的，每节都由以下五部分组成：

一、内容提要　本部分内容以清晰的思路对各节的主要内容进行了言简意赅的总结和归纳，指出了重点和难点，阐明了本节内容在本章及在高等数学中的地位和作用，使学生对本节内容有一个系统的认识和深刻的理解.

二、学习要求　在内容提要的基础上，根据教学大纲和本节的内容，从基本概念、基本理论、基本运算及其能力等方面对学生提出了具体要求.

三、答疑解惑　这部分内容是编者根据多年的教学经验和教学体会，对学生学习中遇到的难点和易于混淆不清的地方提出问题，采用问答的方式编写的. 问题涉及很多方面，诸如概念的实质、定理的意义、定理的对比、定理的应用、等价命题、重要反例、方法分析等等. 以帮助学生复习掌握内容，深化对知识的理解. 顺便指

出，通过答疑解惑，旨在起到抛砖引玉的作用，希望读者在学习过程中提出并解决更多的问题.

四、典型题解　在教材所给例题的基础上，我们从大量题目中筛选出了若干个典型例题，这些例题在解题方法上具有典型性，在解题思路上具有启发性，在内容上是教材的补充和提高. 采用一题多解或分析提问的方式，对解题思路、论证方法、例题意义等作了简要的说明，力求达到具有启迪性的指导意义和举一反三的作用. 许多例题选自近年来硕士研究生高等数学入学考试试题，以拓宽学生视野，提高学生分析问题和解决问题的能力，使学生在本科学习阶段就能了解考研要求，提前进入角色，激发学习兴趣，打好数学基础. 我们认为学生学习一些典型例题的论证方法和解题技巧是必要的，有利于学生在模仿中提高，在模仿中创新.

五、习题选解　本部分内容对教材中的典型习题、较难习题给出了详解或提示. 另外，我们分上、下册给出了两套期末试题及详解，以检测学生的学习情况.

我们希望同学们在阅读本书时，不要简单地将自己置身于一个"接受器"的角色，而要充分发挥自己的主观能动性，积极地进行思考. 在学习过程中，你肯定有疑问，不妨先自问自答. 譬如，对于答疑解惑这部分内容，先看问题，看看哪些问题你已经提出来了？哪些问题你还没有提出来？对自己提出的问题你答对了吗？对你没有提出的问题，不妨先自己解答，然后再看本书答案，看看自己的解答是否正确？还有什么没有注意到？等等. 我们认为只有这样，才能对数学的学习有所帮助. 对于习题选解，同学们先要认真思考，力争独立完成，以提高自己解决问题的能力. 只有在自己经过反复思考，百思不得其解时，才参看解答，只有这样，才会更有收益.

参加本书编写的有渭南师范学院的薛利敏(第一、二、十一、十二章)、关文吉(第三章和上、下册附录)、王永兴(第四章)、查淑玲(第五章)、李瑞婷(第六章)、李凤(第七章)，西安理工大学的唐平

(第八章),延安大学的王荣波(第九章)和湖北汽车工业学院的茹永刚(第十章).由渭南师范学院的薛利敏教授完成策划、统稿、改写及校对工作.

本书在编写过程中得到了渭南师范学院教务处和数学与信息科学学院领导及从事高等数学教学的广大教师的热情支持,特别是杨倩丽教授、杨秀香教授、周焕芹教授、杨明顺教授等,对本书的编写提出了许多宝贵的意见,编者在此致以深深的谢意.我们特别感谢西北大学出版社和李宝宁编辑的指导和帮助.同时,本书还得到了渭南师范学院教育教学改革研究重点项目《高等数学精品教材建设的研究与实践》(JG201314)的资助,以及渭南师范学院省扶持学科数学学科基金资助项目(14SXZD005)的资助,在此表示感谢.

由于编者水平有限,书中难免有不足和错误之处,恳请同行、专家和广大读者批评指正.

编　者

2014 年 6 月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

平面解析几何是在平面直角坐标系的基础上用代数的方法研究平面几何问题. 同样,空间解析几何是在空间直角坐标系的基础上用代数的方法研究空间几何问题. 像平面解析几何是研究一元函数微积分学的基础一样,向量代数与空间解析几何是研究多元函数微积分学的基础. 本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置,我们建立了平面直角坐标系. 同样,为了确定空间一点的位置,我们要建立空间直角坐标系. 像平面直角坐标系是平面解析几何的基础一样,空间直角坐标系是空间解析几何的基础.

§7.1.1　空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴,它们都以定点 O 为原点,且一般取相同的长度单位,这三条数轴分别为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴). 它们的正向符合右手系(当右手的四个手指由 x 正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向). 通常将 x 轴、y 轴放置在水平面上,z 轴为铅垂线,见图 7-1 所示,这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,点 O 称为坐标原点. 每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是 xOy 面、yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限,并逐个编号为 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ,分别称为第一卦限,第二卦限,…,第八卦限,如图 7-2.

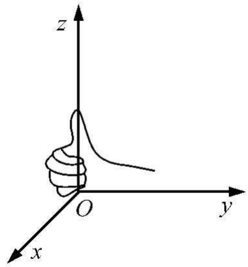


图 7-1

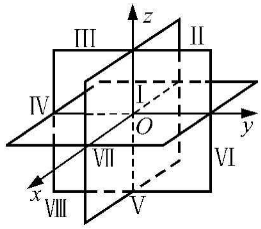


图 7-2

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧,见图 7-1,及正等侧,见图 7-3.

设 M 为空间的一点(见图 7-4),过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面,

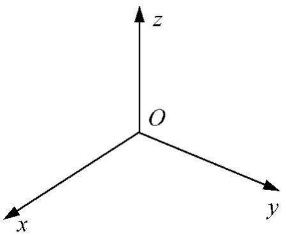


图 7-3

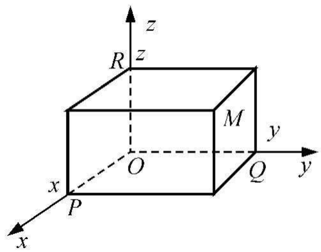


图 7-4

它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R,其坐标依次为 x,y,z,从而得到一个有序数组 (x,y,z);反之,给定一有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $OP = x, OQ = y, OR = z$,然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,这三个平面确定了惟一的交点 M. 这样,空间点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标,记为 $M(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

原点的坐标为 $O(0,0,0)$;x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标的形式分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$;xOy 面、yOz 面和 zOx 面上点的坐标的形式分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$.

注意,图 7-4 中的点 P,虽然它在 x 轴上的坐标是 x,但是它的空间直角坐标却是 $(x,0,0)$,而不是 x.

例 1 设 P 是空间内一点,其坐标为 (x,y,z),即 $P(x,y,z)$,求:

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为$(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足坐标为$(x,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足坐标为$(0,y,z)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足坐标为$(x,0,z)$.

例 2 求点 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴、坐标面及原点对称点的坐标.

解 根据点与坐标及对称性的关系得

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为$(1,-2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为$(-1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为$(-1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为$(1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为$(-1,2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为$(1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于原点对称点的坐标为$(-1,-2,-3)$.

注 两个点关于某平面(或轴)对称,是指这两点的连线垂直于该平面(或轴)且被该平面(或轴)平分;两个点关于某点对称,是指这两点的连线通过该点且被该点所平分.

§7.1.2 空间两点间的距离

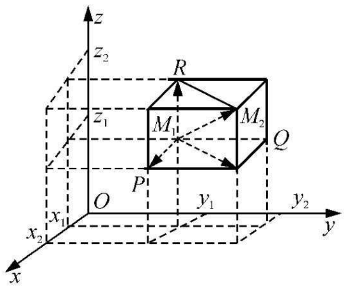


图 7-5

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7-5). 因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2+|NM_2|^2\\ &= |M_1P|^2+|M_1Q|^2\\ &\quad +|NM_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1)$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上,所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$,根据题意有 $|MA|=|MB|$,即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$

$$= \sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

化简得 $z=\dfrac{14}{9}$,故所求的点为 $M(0,0,\dfrac{14}{9})$.

习题 7.1

1. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点?指出下列各点的位置.

   $A(3,4,0)$;$B(0,1,2)$;$C(3,0,0)$;$D(0,-1,0)$.

2. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

6. 证明 $P_1(1,2,3)$,$P_2(2,3,1)$,$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节　向量及其线性运算

§7.2.1　向量的概念

在研究力学、物理学以及其它应用学科时,常会遇到这样的一类量,它们既有大小,又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,我们将这种既有大小又有方向的量,称为向量(或矢量).

在数学上,往往用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,以 M_1 为起点,M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(见图 7-6).有时也用一个黑体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$.向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数),如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$.模为 1 的向量称为单位向量,模为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,其方向可任意选取.

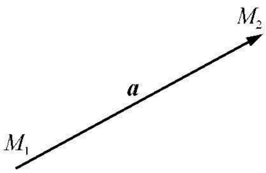


图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量,即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方,这种向量称为自由向量.由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相

等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看,就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

§7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC(见图 7-7(a)),向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的三角形法则.

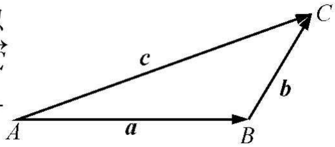


图 7-7(a)

仿此,也有向量加法的平行四边形法则:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC(图 7-7(b)),向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

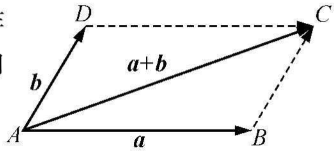


图 7-7(b)

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

见图 7-7(c).

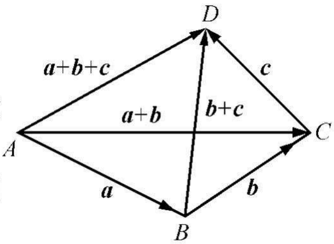


图 7-7(c)

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,由此,我们规定 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$(见图 7-8).

2. 向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,λ 是一个非零实数,则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为:当 $\lambda>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

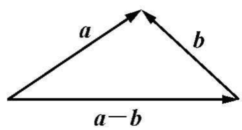


图 7-8(a)

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证,向量与数的乘法满足以下运算规律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

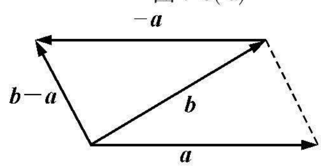


图 7-8(b)

其中 λ,μ 都是常数.