

高职高专公共课系列教材

# 高等应用数学

上册

主编 左艳芳 吴雁莎

云南大学出版社

高职高专公共课系列教材

# 高等应用数学

上册

主 编	左艳芳	吴雁莎
副主编	王 跃	王 纓
	王桂华	张建国
	吴武琴	

 云南大学出版社

### 图书在版编目 (CIP) 数据

高等应用数学. 上/左艳芳, 吴雁莎主编. —2 版.  
—昆明: 云南大学出版社, 2013  
高职高专公共课系列教材  
ISBN 978 - 7 - 5482 - 1394 - 9

I. 高… II. ①左… ②吴… III. ①应用数学—高等职业教育—教材 IV. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 020642 号

## 高等应用数学 (上册)

左艳芳 吴雁莎 主编

---

组织策划: 徐 曼  
责任编辑: 徐 曼  
封面设计: 刘 雨  
出版发行: 云南大学出版社  
印 装: 昆明研汇印刷有限责任公司  
开 本: 787mm × 1092mm 1/16  
印 张: 17.75  
字 数: 432 千  
版 次: 2013 年 1 月第 2 版  
印 次: 2013 年 8 月第 9 次印刷  
书 号: ISBN 978 - 7 - 5482 - 1394 - 9  
定 价: 32.00 元

---

地 址: 昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内 (邮编: 650091)  
发行电话: 0871 - 65033244 65031071  
网 址: [www.ynup.com](http://www.ynup.com)  
E - mail: [market@ynup.com](mailto:market@ynup.com)

# 前 言

本书是为了适应高等职业技术教育培养技术型应用型人才的需要,适应高等职业教育大众化发展趋势的现实,集多所院校之力量编写的具有云南地方特色的高等职业技术教育教材。

在本书编写过程中我们努力贯彻以下原则:

1. 突出以应用、实用、够用为度的教学原则,不追求严密论证;
2. 注重以实例引入知识点,并最终回归到数学应用的思想,加强学生对数学的应用知识、兴趣和能力的培养;
3. 注意有关概念的实际情况解释,力求表述准确、思路清晰、通俗易懂。注重教学方法和教学思想的阐述,注意培养学生的综合素质,培养学生用数学原理和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力;
4. 在每章或每节开始,都用简短语言点题,以使读者了解本章或本节所讨论问题的来龙去脉,起到承上启下的作用;每节后配有一定量的习题,供学生练习;在每章末都作了小结,帮助学生复习本章内容,理清思路,掌握学习内容及教学要求,同时附上两份复习题帮助学生检测学习效果,以便查缺补漏。

本书分上、下两册共十四章。上册为一元函数微积分、微分方程和无穷级数等内容,建议70~90学时;下册为多元函数微积分、线性代数、概率统计、拉氏变换等内容,建议60~70学时。

参加本书编写的院校有:昆明冶金高等专科学校、昆明工业职业技术学院、昆明大学、云南国土资源职业学院、云南医学高等专科学校。本书由左艳芳、吴雁莎任主编,王跃、王纓、王桂华、张建国、吴武琴任副主编。

上册编写人员:

第一章:王跃、唐波;第二章:王跃、田芳、唐波;第三章:吴武琴、刘伟、李庆芹;第四章:王纓、左艳芳、赵华明;第五章:吴雁莎、王桂华、张建国;第六章:杨春晓、杨朝丽;第七章:杨朝丽、杨春晓;第八章:王荣、杨朝晖、周宁。全书由左艳芳、吴雁莎统稿。

由于水平有限,书中错误在所难免,欢迎各位专家和使用本书的师生提出宝贵意见。

编 者  
2013年1月

# 目 录

第一章 函 数 .....	(1)
第一节 函数的概念 .....	(1)
习题 1-1 .....	(6)
第二节 初等函数 .....	(7)
习题 1-2 .....	(12)
第三节 一元二次函数及简单不等式 .....	(13)
习题 1-3 .....	(15)
第四节 常用的初等数学基本公式 .....	(16)
小 结 .....	(19)
复习题 .....	(20)
第二章 极限与连续 .....	(22)
第一节 极限的概念 .....	(22)
习题 2-1 .....	(27)
第二节 极限的运算 .....	(28)
习题 2-2 .....	(30)
第三节 无穷小与无穷大 .....	(31)
习题 2-3 .....	(33)
第四节 两个重要极限 .....	(34)
习题 2-4 .....	(37)
第五节 无穷小的比较 .....	(38)
习题 2-5 .....	(40)
第六节 函数的连续性 .....	(40)
习题 2-6 .....	(45)
小 结 .....	(46)
复习题 (一) .....	(49)
复习题 (二) .....	(50)

第三章 导数与微分 .....	(53)
第一节 导数的概念 .....	(53)
习题 3-1 .....	(61)
第二节 函数和、差、积、商的求导法则 .....	(63)
习题 3-2 .....	(65)
第三节 反函数的导数 复合函数的求导法则 .....	(66)
习题 3-3 .....	(72)
第四节 隐函数的求导 参数方程确定的函数的导数 .....	(73)
习题 3-4 .....	(77)
第五节 高阶导数 .....	(77)
习题 3-5 .....	(80)
第六节 函数的微分 .....	(80)
习题 3-6 .....	(87)
小 结 .....	(89)
复习题 (一) .....	(92)
复习题 (二) .....	(93)
第四章 导数的应用 .....	(95)
第一节 中值定理 .....	(95)
习题 4-1 .....	(97)
第二节 罗必达法则 .....	(98)
习题 4-2 .....	(102)
第三节 函数单调性的判定法 .....	(102)
习题 4-3 .....	(105)
第四节 函数的极值及其求法 .....	(105)
习题 4-4 .....	(108)
第五节 函数的最大值和最小值 .....	(108)
习题 4-5 .....	(111)
第六节 曲线的凹凸和拐点 函数图形的描绘 .....	(111)
习题 4-6 .....	(116)
第七节 曲线的曲率 .....	(116)
习题 4-7 .....	(120)
小 结 .....	(120)
复习题 (一) .....	(123)
复习题 (二) .....	(124)

<b>第五章 不定积分</b> .....	(125)
第一节 不定积分的概念及性质 .....	(125)
习题 5-1 .....	(129)
第二节 换元积分法 .....	(130)
习题 5-2 .....	(137)
第三节 分部积分法 .....	(137)
习题 5-3 .....	(140)
第四节 积分表的使用 .....	(140)
小 结 .....	(142)
复习题 (一) .....	(143)
复习题 (二) .....	(145)
<b>第六章 定积分及其应用</b> .....	(147)
第一节 定积分的概念与性质 .....	(147)
习题 6-1 .....	(154)
第二节 微积分基本公式 .....	(155)
习题 6-2 .....	(159)
第三节 定积分的换元积分法与分部积分法 .....	(159)
习题 6-3 .....	(165)
第四节 广义积分 .....	(166)
习题 6-4 .....	(170)
第五节 定积分的应用 .....	(170)
习题 6-5 .....	(177)
小 结 .....	(178)
复习题 (一) .....	(180)
复习题 (二) .....	(181)
<b>第七章 微分方程</b> .....	(182)
第一节 微分方程的基本概念 .....	(182)
习题 7-1 .....	(184)
第二节 可分离变量的一阶微分方程 .....	(184)
习题 7-2 .....	(189)
第三节 一阶线性微分方程 .....	(190)
习题 7-3 .....	(197)

第四节 二阶常系数线性齐次微分方程 .....	(198)
习题 7-4 .....	(203)
第五节 二阶常系数线性非齐次微分方程 .....	(204)
习题 7-5 .....	(207)
小 结 .....	(207)
复习题 (一) .....	(209)
复习题 (二) .....	(210)
第八章 无穷级数 .....	(213)
第一节 常数项级数 .....	(213)
习题 8-1 .....	(217)
第二节 数项级数审敛法 .....	(217)
习题 8-2 .....	(221)
第三节 幂级数 .....	(222)
习题 8-3 .....	(227)
第四节 函数的幂级数展开 .....	(227)
习题 8-4 .....	(232)
第五节 傅里叶级数 .....	(232)
习题 8-5 .....	(240)
小 结 .....	(241)
复习题 (一) .....	(244)
复习题 (二) .....	(246)
附录 简易积分表 .....	(248)
习题答案 .....	(256)

# 第一章 函 数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，它揭示了客观世界中各种量之间的联系和变化规律，是学习高等应用数学和其它科学技术必不可少的基础。在本章中，我们把中学教材中介绍的函数基本知识及有关内容系统地复习一下，为后续课程的学习打下基础。

## 第一节 函数的概念

### (一) 函数的定义

客观世界中各种不同的变化着的量不是孤立的，而是相互联系、相互制约的，我们不但要研究事物的量的变化，更重要的是要研究在同一问题中不同的量之间的相互依赖关系，这种依赖关系，就是数学中的函数关系。

现在来考察两个实例。

**例 1** 考虑圆的面积  $A$  与半径  $r$  之间的相依关系。它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定，当半径  $r$  取定某一正的数值时，圆面积  $A$  随之有一个确定的数值与之对应。即面积  $A$  与半径  $r$  有关。

**例 2** 考虑自由落体问题：设物体下落的时间为  $t$ ，位移为  $s$ ，假定开始下落的时刻为  $t=0$ ，那么  $s$  与  $t$  之间的依赖关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中  $g$  是重力加速度。假定物体着地的时间为  $T$ ，那么当时间  $t$  取  $[0, T]$  中的某一数值时，上式就可确定位移  $s$  的一个数值，即位移  $s$  与下落时间  $t$  有关。

例 1 和例 2 具有共同的性质，在两个问题中都包含两个变量，它们之间相互依赖，并且存在确定的对应法则。即当一个变量取一个确定的值时，另一个变量按一定的规则总有确定的值与之对应。在现实生活中，我们可能遇到这种变量间的依赖关系的实例很多，抽去它们的实际意义，概括其共同特点，抽象为数学概念——函数。

**定义 1.1.1** 如果在某变化过程中有两个变量  $x$ 、 $y$ ，当  $x$  在某一范围内任意给定一个数值，按照某个对应法则  $f$ ， $y$  都有唯一确定的值与之对应，那么就称  $y$  是  $x$  的函数。记作  $y=f(x)$ ，其中， $x$  称为自变量， $y$  称为因变量。

自变量  $x$  的取值范围  $D$  叫做函数的定义域。当  $x$  取数值  $x_0 \in D$  时，与  $x_0$  对应的  $y$  的数值称为函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的函数值，记作  $f(x_0)$  或  $y_0$ 、 $f(x)|_{x=x_0}$ 、 $y|_{x=x_0}$ ，当自变量  $x$  取遍定义域  $D$  中的每一个  $x$ ，得到的全体函数值组成的集合称为函数的值域。

一般地，函数还可用  $F(x)$ 、 $g(x)$ 、 $G(x)$  等表示。在同时讨论几个不同的函数时，需

要用不同的函数记号来表示。

由函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素。

函数关系通常可以用表格、图像或解析式来表示。高等应用数学中所涉及的函数主要用解析式表示。

**例 3** 设  $y = x^2 - 3x + 2$ ，求  $f(-1)$ 、 $f(a+1)$ 、 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 、 $f[f(x)]$ 。

**解** 因为函数的对应法则是  $f(\quad) = (\quad)^2 - 3 \times (\quad) + 2$ ，所以

$$f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6;$$

$$f(a+1) = (a+1)^2 - 3 \times (a+1) + 2 = a^2 - a;$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{x}\right) + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2;$$

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= [f(x)]^2 - 3 \times [f(x)] + 2 = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3 \times (x^2 - 3x + 2) + 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x. \end{aligned}$$

## (二) 函数定义域的求法

### 1. 区间及其表示法

函数的定义域常用区间来表示。

**定义 1.1.2** 介于两个实数之间的所有实数组成的集合叫做区间，这两个实数叫做区间的端点，端点间的距离叫做区间的长。区间的长为有限时，叫做有限区间；区间的长为无限时，叫做无限区间。

下面将各种区间的定义、名称、符号及图像列于表 1.1.1 中(其中：符号  $-\infty$  和  $+\infty$  分别代表负无穷大和正无穷大，不代表一个数)。

表 1.1.1

定义	名称	符号	图示
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	$(a, b)$	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a < x < +\infty\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid a \leq x < +\infty\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid -\infty < x < b\}$	无限区间	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	无限区间	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	无限区间	$(-\infty, +\infty)$	

以后我们还会遇到以点  $x_0$  为中心的开区间，称这种开区间为点  $x_0$  的邻域。对任意一个正数  $\delta$ ，开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  称为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域(简称点  $x_0$  的邻域)；区间  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  称为点  $x_0$  的去心邻域。显然，任何包含  $x_0$  的一个开区间

$(a, b)$ ，也总包含有  $x_0$  的一个邻域。

## 2. 函数定义域的求法

在实际问题中，函数的定义域由具体问题来确定，如例 2 中  $t$  的取值区间  $[0, T]$ 。

函数的定义域是使解析式有意义的自变量的一切实数值。

求定义域时应注意以下几条原则：

①如果函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

②如果函数的表达式中含有偶次根式，则根号下的表达式必须大于或等于零；

③如果函数的表达式中含有对数，则对数的真数必须大于零；

④如果函数的表达式中含有正切函数或余切函数，则必须符合正切函数或余切函数的定义域；

⑤如果函数的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数，则必须符合反正弦函数或反余弦函数的定义域。

**例 4** 求函数  $y = x^2 - 3x + 2$  的定义域。

**解** 当  $x$  取任何实数时， $y$  都有一个确定的值与之对应，所以函数  $y$  的定义域是全体实数，即定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。

**例 5** 求函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\lg(3-x)}$  的定义域。

**解** 该函数由两个函数相除而得，要使函数有意义，则  $x$  的取值应满足不等式组

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ \lg(3-x) \neq 0 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$

所以，函数的定义域为  $[-1, 2) \cup (2, 3)$ 。

**例 6** 求函数  $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \arcsin(2x-5)$  的定义域。

**解** 该函数由两个函数相加而得，要使函数有意义，则  $x$  的取值应满足不等式组

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ |2x-5| \leq 1 \end{cases}$$

由  $9-x^2 \geq 0$  得  $-3 \leq x \leq 3$ ，由  $|2x-5| \leq 1$  得  $2 \leq x \leq 3$ ，所以函数的定义域为  $[2, 3]$ 。

**例 7** 下列函数是否相同，为什么？

(1)  $y = \ln x^2$  与  $y = 2 \ln x$ ；

(2)  $w = \sqrt{u}$  与  $y = \sqrt{x}$ 。

**解** (1)  $y = \ln x^2$  与  $y = 2 \ln x$  不是相同的函数，因为  $y = \ln x^2$  的定义域是不等于零的实数， $y = 2 \ln x$  的定义域是  $x > 0$ ，它们的定义域不相同。

(2)  $w = \sqrt{u}$  与  $y = \sqrt{x}$  是相同的函数，因为它们的定义域和对应规律均相同。

### (三) 函数的几种特性

#### 1. 单调性

**定义 1.1.3** 设函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有定义, 对于任意  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 设  $x_1 < x_2$ 。

(1) 如果  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调增加;

(2) 如果  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调减少。

在整个定义域上单调增加的函数称为单调增加函数, 在整个定义域上单调减少的函数称为单调减少函数, 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数。

例如,  $y=x^2$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调减少, 在区间  $(0, +\infty)$  上单调增加; 函数  $y=e^x$  在其定义域  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加, 它是单调增加函数。

从几何图形来看, 如果函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调增加, 则当  $x$  自左至右变化时, 函数的图形上升(如图 1.1.1); 如果函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  上单调减少, 则当  $x$  自左至右变化时, 函数的图形下降(如图 1.1.2)。

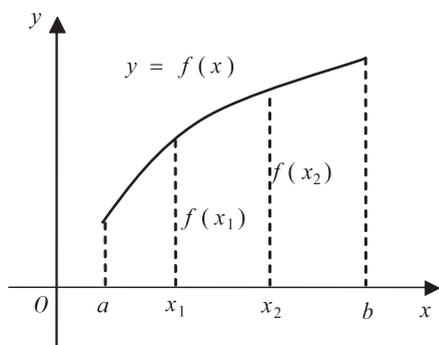


图 1.1.1

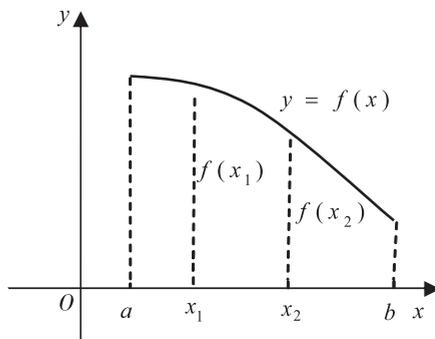


图 1.1.2

#### 2. 奇偶性

**定义 1.1.4** 设函数  $y=f(x)$  的定义域  $D$  关于坐标原点对称, 即对任意  $x \in D$ , 均有  $-x \in D$ 。如果

(1)  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $y=f(x)$  是奇函数;

(2)  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $y=f(x)$  是偶函数。

从几何图形来看, 奇函数的图形关于坐标原点对称, 偶函数的图形关于  $y$  轴对称。

**例 8** 判定下列函数的奇偶性:

(1)  $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$ ;

(2)  $f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$ ;

(3)  $f(x) = c$  (其中  $c$  为常数)。

**解** (1) 把  $-x$  代入  $f(x)$  得:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \lg \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \lg(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} \\ &= -\lg(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  是奇函数。

$$(2) \text{ 把 } -x \text{ 代入 } f(x) \text{ 得, } f(-x) = \frac{-x}{a^{-x}-1} = \frac{xa^x}{a^x-1}$$

$$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$$

所以  $f(x)$  是非奇非偶函数。

(3) 此函数称为常量函数, 其特点是无论  $x$  取任何值, 函数值恒为  $c$ , 于是对任何  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(-x) = f(x) = c$ , 所以函数  $f(x) = c$  是偶函数。

特别地, 当  $c = 0$  时,  $f(x) = 0$  既是奇函数又是偶函数。

### 3. 周期性

**定义 1.1.5** 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在常数  $T \neq 0$ , 使得对任意  $x \in D$ , 均有  $x + T \in D$ , 且  $f(x + T) = f(x)$ , 则称函数  $y = f(x)$  为周期函数, 常数  $T$  称为  $f(x)$  的周期。

对于周期函数来说, 定义中的  $T$  有无穷多个。因为:

若  $f(x + T) = f(x)$ , 则  $f(x + 2T) = f(x)$ 、 $f(x + 3T) = f(x) \cdots f(x - T) = f(x)$ 、 $f(x - 2T) = f(x)$ 、 $f(x - 3T) = f(x) \cdots$  从而  $2T$ 、 $3T$ 、 $-T$ 、 $-2T$ 、 $3T \cdots$  都是函数的周期, 我们将其中的最小正数  $T$  称为函数  $y = f(x)$  的最小正周期。我们通常所说的周期函数的周期是指最小正周期。例如:  $y = \sin x$ 、 $y = \tan x$  的周期分别为  $2\pi$ 、 $\pi$ 。

周期函数的图形, 在函数定义域内每间隔一个周期的区间上, 函数图形有相同的形状。

### 4. 有界性

**定义 1.1.6** 设函数的定义域为  $D$ , 区间  $X \subseteq D$ , 若存在正数  $M$ , 使得对任何  $x \in X$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  为区间  $X$  上的有界函数; 如果这样的正数  $M$  不存在, 就称  $f(x)$  在区间  $X$  上无界。这就是说, 如果对于任何正数  $M$ , 总存在  $x_0 \in X$ , 使得  $|f(x_0)| > M$ , 那么函数  $f(x)$  在区间  $X$  上无界。

例如, 当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时, 恒有  $|\sin x| \leq 1$  成立, 这里  $M = 1$  (当然也可以取大于 1 的任何数作为  $M$ ), 所以函数  $y = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 而  $y = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是无界函数。函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在开区间  $(0, 1)$  内是无界的, 因为不存在这样的正数  $M$ ,

使  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$  对于  $(0, 1)$  内任何  $x$  都成立。

## (四) 反函数

### 1. 反函数的概念

函数关系中的两个变量, 一个是自变量, 另一个是因变量, 它们的地位是不同的。在实际问题中, 两个变量中哪个作自变量哪个作因变量, 不是绝对的, 在一定条件下, 可以互相转化。如在例 2 中, 当我们用时间  $t$  来确定位移时, 在公式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  中取  $t$  为自变量;

反过来, 如果已知位移  $s$  求下落时间  $t$ , 那么在公式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  中解出  $t$ , 有

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

这时,  $s$  是自变量,  $t$  是因变量。

从函数  $s = \frac{1}{2}gt^2$  得到的函数  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$  叫做函数  $s = \frac{1}{2}gt^2$  的反函数。

**定义 1.1.7** 设函数  $y=f(x)$  的值域为  $Y$ , 如果对于任意  $y \in Y$ , 都可以从等式  $y=f(x)$  中唯一确定  $x$ , 那么便得到一个定义在  $Y$  上的以  $y$  为自变量、 $x$  为因变量的函数, 记为  $x=f^{-1}(y)$  (读作  $x$  等于  $f$  逆  $y$ ), 则称此函数为函数  $y=f(x)$  的反函数, 相应地称  $y=f(x)$  为直接函数。

习惯上, 用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 则  $y=f(x)$  的反函数  $x=f^{-1}(y)$  可记作  $y=f^{-1}(x)$ 。

注意: 从定义可以看出, 如果函数  $y=f(x)$  的反函数存在, 则  $x, y$  应满足一一对应关系, 即单调函数存在反函数; 函数  $y=f(x)$  的定义域、值域分别是其反函数的值域和定义域。

在直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y=f(x)$  和它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称。

## 2. 反函数的求法

由定义知, 反函数  $y=f^{-1}(x)$  是由函数  $y=f(x)$  变化而来的, 可以由等式  $y=f(x)$  解出  $x$ , 得到  $x$  关于  $y$  的解析式, 再交换  $x, y$  的位置求得。

**例 9** 求函数  $y = \sqrt[3]{x+1}$  的反函数。

**解** 由等式  $y = \sqrt[3]{x+1}$  解得  $x = y^3 - 1$ , 交换  $x, y$  的位置得所给函数的反函数  $y = x^3 - 1$ , 其定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。

**例 10** 求函数  $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$  的反函数。

**解** 由  $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$  解得  $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$ , 交换  $x, y$  的位置得所给函数的反函数  $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$ , 其定义域为  $(0, 1)$ 。

## 习题 1-1

### 1. 求函数的定义域:

$$(1) y = 2x^2 - x + 1 \quad (2) y = \sqrt{3x+2} \quad (3) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$(4) y = \log_a(x^2 + 2x - 3) \quad (5) y = \arcsin(1 - x^2) \quad (6) y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

2. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ , 求  $f(0), f(2), f(-1), f(x+1), f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ 。

### 3. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 3x - 1 \quad (2) y = 2^x \quad (3) y = \log_2 x + 1 \quad (4) y = \arcsin \frac{1-x}{4}$$

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1)  $y = x^6 + 2x^2$                       (2)  $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12}$                       (3)  $y = x + \tan x$

(4)  $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$                       (5)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$                       (6)  $y = \sin x - \cos x$

(7)  $g(x) = f(x) \left( \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$ , 其中  $f(x)$  是奇函数。

5. 判断下列函数是否相同? 为什么?

(1)  $y = \sqrt{x^2}$  与  $y = |x|$                       (2)  $y = \sqrt{2}\cos x$  与  $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$

(3)  $y = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x}$  与  $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^3}}$

(4)  $f(x) = x + \sqrt{2+x^2} (x > 0)$  与  $g(x) = \frac{1 + \sqrt{1+2x^2}}{x}$

6. 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$ , 求  $f(-x)$ 。

## 第二节 初等函数

### 一、基本初等函数

微积分研究的对象, 主要是初等函数, 而初等函数是由基本初等函数构成的。下面我们先给出基本初等函数的定义。

**定义 1.2.1** 通常把常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数。

关于这些函数的性质和图像, 在中学已学过, 下面列表归纳如下:

表 1.2.1 常量函数的性质和图像

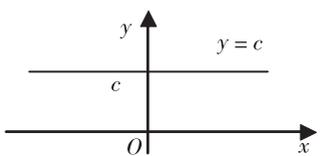
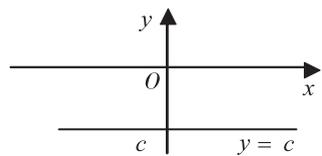
$y = c$ ( $c$ 为常数)	$c \geq 0$	$c < 0$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
值域	$\{y   y = c\}$	
性质	图像是平行于 $x$ 轴的直线, $c = 0$ 时图像是与 $x$ 轴重合的直线	
图像		

表 1.2.2 幂函数的性质和图像

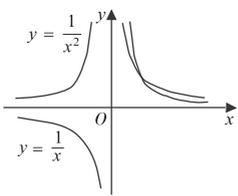
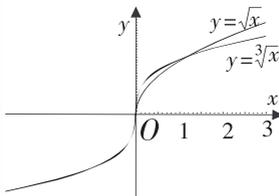
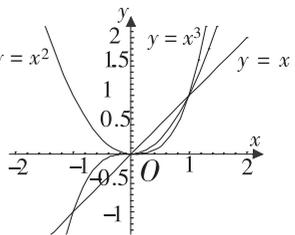
$y = x^a$	$a < 0$	$0 < a < 1$	$a > 1$
定义域	随 $a$ 而定, 但在区间 $(0, +\infty)$ 内有定义。		
值域	随 $a$ 而定, 但区间 $(0, +\infty)$ 总包含在值域内。		
在区间 $(0, +\infty)$ 上的性质	图像通过点 $(1, 1)$		
	单调减少且向上凹	单调增加且向上凸	单调减少且向上凹
	$x \rightarrow 0^+$ 时, $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0^+$	$x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$	
图像			

表 1.2.3 指数函数的性质和图像

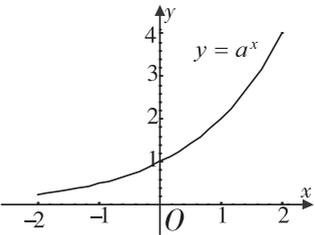
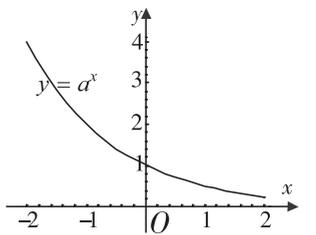
$y = a^x$ ( $a > 0$ 且 $a \neq 1$ )	$a > 1$	$0 < a < 1$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
值域	$(0, +\infty)$	
性质	单调增加, 过点 $(0, 1)$	单调减少, 过点 $(0, 1)$
图像		

表 1.2.4 对数函数的性质和图像

$y = \log_a x$ ( $a > 0$ 且 $a \neq 1$ )	$a > 1$	$0 < a < 1$
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$(-\infty, +\infty)$	
性质	单调增加, 过点 $(1, 0)$	单调减少, 过点 $(1, 0)$
图像		

表 1.2.5 三角函数的性质和图像

函数	定义域	值域	性质	图像
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	周期为 $2\pi$ , 奇函数, 单调增加区间为: $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 单调减少区间为: $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + 3\frac{\pi}{2}\right]$	
$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	周期为 $2\pi$ , 偶函数, 单调增加区间为: $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 单调减少区间为: $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$	
$y = \tan x$	$\{x   x \in \mathbb{R},$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},$ $k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, +\infty)$	周期为 $\pi$ , 奇函数, 单 调增加区间为: $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$	
$y = \cot x$	$\{x   x \in \mathbb{R},$ $x \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, +\infty)$	周期为 $\pi$ , 奇函数, 单 调减少区间为: $(k\pi, k\pi + \pi)$	