

高等数学



目 录

1 函数、极限与连续	(1)
1.1 函数	(1)
1.2 极限、无穷小与无穷大	(5)
1.3 极限的运算法则	(10)
1.4 两个重要极限与无穷小的比较	(12)
1.5 函数的连续性	(15)
1.6 闭区间上连续函数的性质	(18)
1.7 复习题	(20)
2 导数与微分	(22)
2.1 导数的概念	(22)
2.2 导数的四则运算法则	(28)
2.3 复合函数与反函数的求导法则	(30)
2.4 三个求导法则	(33)
2.5 高阶导数	(37)
2.6 微分及其应用	(38)
2.7 复习题	(43)
3 中值定理与导数的应用	(45)
3.1 中值定理	(45)
3.2 洛必达(L'Hospital)法则	(47)
3.3 函数的单调性与极值	(50)
3.4 曲线的凹凸性与函数图形的描绘	(55)
3.5 复习题	(59)
4 不定积分	(61)
4.1 不定积分的概念与性质	(61)
4.2 换元积分法	(66)
4.3 分部积分法	(72)
4.4 复习题	(75)
5 定积分及其应用	(77)
5.1 定积分的概念	(77)
5.2 微积分基本公式	(83)
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	(87)
5.4 定积分的应用	(91)
5.5 复习题	(98)
6 常微分方程	(100)
6.1 微分方程的基本概念	(100)

6.2	可分离变量的一阶微分方程	(103)
6.3	一阶线性微分方程	(107)
6.4	可降阶的高阶微分方程	(110)
6.5	二阶常系数齐次线性微分方程	(113)
6.6	二阶常系数非齐次线性微分方程	(117)
6.7	复习题	(121)
7	向量与空间解析几何	(122)
7.1	向量及其线性运算	(122)
7.2	平面与直线	(132)
7.3	曲面与曲线	(139)
7.4	复习题	(145)
8	多元函数微分	(147)
8.1	多元函数	(147)
8.2	偏导数	(150)
8.3	全微分	(155)
8.4	复合函数的求导法则	(157)
8.5	偏导数在几何上的应用	(162)
8.6	多元函数极值	(165)
8.7	复习题	(169)
9	多元函数积分	(171)
9.1	二重积分	(171)
9.2	二重积分的计算	(174)
9.3	二重积分应用举例	(182)
9.4	复习题	(185)
10	无穷级数	(187)
10.1	常数项级数的概念与基本性质	(187)
10.2	正项级数及其敛散性	(190)
10.3	绝对收敛与条件收敛	(194)
10.4	幂级数	(196)
10.5	函数展开成幂级数	(200)
10.6	复习题	(203)
11	拉普拉斯变换	(205)
11.1	拉普拉斯变换的定义与性质	(205)
11.2	拉普拉斯变换的逆变换	(208)
11.3	复习题	(211)
12	数学软件 Mathematica 及其应用	(213)
12.1	初识数学软件 Mathematica	(213)
12.2	用 Mathematica 做高等数学	(221)
	习题参考答案	(229)

1 函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一,也是高等数学的主要研究对象.极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

1.1 函 数

1.1.1 函数

1) 函数的定义

引例 1.1.1 设有容积为 10m^3 的无盖圆柱桶,其底用铜制,侧壁用铁制.已知铜价是铁价的 5 倍,试建立做此桶所需费用与桶的底面半径 r 之间的关系.

解 设铁价为 k ,铜价为 $5k$,所需费用为 y ,桶的容积为 V ,侧壁高为 h (图 1.1.1).

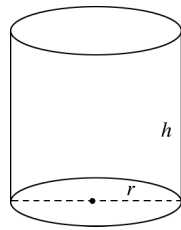


图 1.1.1

由容积与底面半径 r 及高 h 的关系,有 $V = \pi r^2 h$,则 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,侧面积为 $2\pi r h = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r}$.又知 $V = 10\text{m}^3$,得侧面积为 $\frac{20}{r}$,故所需费用 y 与桶的底面半径 r 之间的关系为 $y = \frac{20k}{r} + 5\pi r^2 k$.

当 r 在 $(0, +\infty)$ 内取定某一个数值时, y 也随之有一个确定的值与之对应.

引例 1.1.2 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 千克时,按基本运费计算,如从上海到某地,每千克收 0.20 元.当超过 50 千克时,超重部分按每千克 0.30 元收费.试求上海到某地的行李费 y (元)与重量 x (千克)之间的关系式.

解 当 $x \in [0, 50]$ 时, $y = 0.2x$.

当 $x \in (50, +\infty)$ 时, $y = 0.2 \times 50 + 0.3(x - 50) = 0.3x - 5$.

所以

$$y = \begin{cases} 0.2x, & 0 \leq x \leq 50, \\ 0.3x - 5, & x > 50. \end{cases}$$

当 x 在 $[0, +\infty)$ 内取定一个值时, y 也随之有一个确定的值与之对应.

定义 1.1.1 设 D 是一个非空实数集,如果对于 D 上的每一个 x ,按照某种对应关系 f ,都有唯一确定的值 y 和它对应,则 f 叫做 D 上的一个函数.有时又称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D.$$

x 叫做自变量, y 叫做因变量. D 叫做函数的定义域.当自变量 x 在定义域 D 内取定值 x_0 时, x_0 所对应的 y 值叫做 x_0 点的函数值,记作 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍 D 中所有值时,所得函数值的集合 M 叫做函数的值域.

如果我们同时研究两个以上的函数,一定要用不同的符号表示不同的函数.除 f 外,还常用 g, F, G 等.

2) 对于函数的几点说明

(1) 对应关系

例 1.1.1 设 $f(x)=2x^2-x$, 求 $f(-1), f(a), f(2t-1)$.

解 $f(-1)=2 \times (-1)^2 - (-1)=3; \quad f(a)=2a^2-a;$

$f(2t-1)=2(2t-1)^2 - (2t-1)=8t^2-10t+3.$

(2) 定义域

例 1.1.2 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\lg(1-x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 应满足不等式组 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$.

这两个不等式的公共解为 $-2 \leq x < 1$, 所以函数的定义域为 $[-2, 1)$.

由于知道了一个函数的对应关系和定义域, 也就知道了该函数的值域, 所以我们将函数的对应关系和定义域称为函数的两个要素.

如果两个函数的定义域与对应关系分别相同, 则将这两个函数视为相同函数. 例如, $u=v^2$ 与 $s=t^2$ 就是相同函数. 由此也可看出, 函数与其变量的符号是无关的.

例 1.1.3 判断下列各组函数是否相同?

① $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$; ② $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 ① 因为 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $\{x|x \geq 0\}$ 与函数 $y=x$ 的定义域 $\mathbb{R}$ 不相同, 所以这两个函数不相同.

② 因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$, 而且 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $\mathbb{R}$, 因此这两个函数的对应关系和定义域都是相同的, 所以这两个函数相同.

由函数的定义知道, 一个函数是否确定, 就在于它的定义域和对应关系是否确定. 如果两个函数是相同的, 那么它们的定义域和对应关系也必须相同, 否则, 就不是同一个函数.

(3) 函数的表示方法

函数的表示法通常有三种: 解析法、列表法、图像法.

用等式来表示两个变量之间函数关系的方法, 叫做解析法.

例如, $y=2x^2-x+1, y=\lg(x+1), y=2^x$ 等都是解析法表示的函数. 解析法的优点是便于理论推导和计算.

用列表来表示两个变量之间函数关系的方法, 叫做列表法. 它是将自变量的值与对应的函数值列为表格. 例如, 平方根表、三角函数表、对数表、企业历年产值表等都是用列表法表示的函数. 列表法的优点是表中列出的自变量值对应的函数值容易查得.

用图像来表示两个变量之间函数关系的方法, 叫做图像法. 满足 $y=f(x)$ 关系的点 (x, y) 的集合, 即 $M=\{(x, y)|y=f(x), x \in D\}$, 将这些点描在平面直角坐标系中, 就形成函数的图像. 这种方法在工程技术上应用较普遍, 它的优点是直观形象, 且容易看到函数的变化趋势.

(4) 分段函数

例 1.1.4 设函数 $f(x)=\begin{cases} -2x-1, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 0, \\ 2x+1, & x \geq 0. \end{cases}$ 求 $f(-2), f(-\frac{1}{2})$ 和 $f(1)$.

解 $f(-2)=-2(-2)-1=3; f(-\frac{1}{2})=1; f(1)=2 \times 1+1=3.$

例 1.1.4 中的函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 即当自变量取值范围不同时, 函数的局部表达式也不同, 像这样的函数叫做分段函数. 分段函数是定义域上的一个函数, 不是多个函数. 分段函数需要分段求值, 分段作图.

(5) 隐函数

用解析法表示的函数,可以有不同的形式.像 $y=\sin x$, $y=3x+1$ 等,明显地揭示了 y 怎样随着 x 的变化而变化的,这样的函数叫做显函数.

变量 x, y 之间的函数关系是由某一个方程 $F(x, y)=0$ 所确定的,称为由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数.如 $e^y - xy=0$ 与 $2x^2 - yx + 1=0$ 等.

把一个隐函数化成显函数的形式,叫做隐函数的显化.

3) 反函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D , 值域是 M . 如果对于 M 中的每一个 y 值,都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 ($x \in D$) 与之对应,从而就确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x=\varphi(y)$, 这个函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$. M 是其定义域, D 是值域.

习惯上常把字母 x 作为自变量, y 作为因变量. 所以把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式,称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数,简称为 $y=f(x)$ 的反函数. 而把 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的直接反函数.

把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个直角坐标平面上,那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.1.5 求 $y=\sqrt{x}-1$ 的反函数.

解 由 $y=\sqrt{x}-1$ 得 $x=(y+1)^2$, $y \in [-1, +\infty)$, 所以函数 $y=\sqrt{x}-1$ 的反函数是 $y=(x+1)^2$, $x \in [-1, +\infty)$.

1.1.2 函数的几种特性

1) 有界性

定义 1.1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subseteq D$, 如果存在正数 M , 使得对任一 $x \in I$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界(图 1.1.2).

$f(x)$ 在 I 上有界, 其图形夹在两条平行于 x 轴的直线之间.

2) 单调性

定义 1.1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , $(a, b) \subseteq D$, 任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的; 如果任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 区间 (a, b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调区间. 函数在区间 (a, b) 内的单调增加或单调减少的性质, 叫做函数的单调性.

单调增函数图像沿 x 轴正方向上升(图 1.1.3); 单调减函数图像沿 x 轴正方向下降(图 1.1.4).

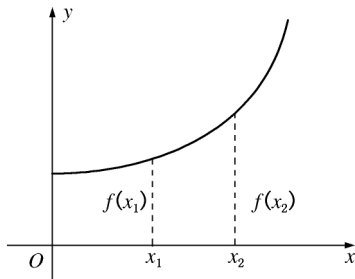


图 1.1.3

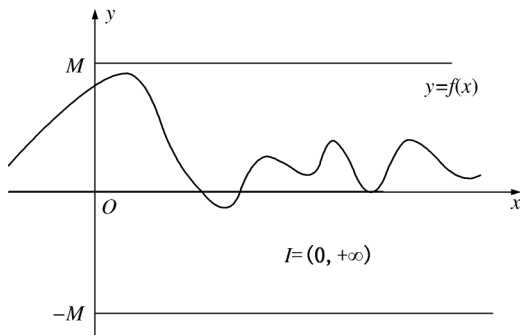


图 1.1.2

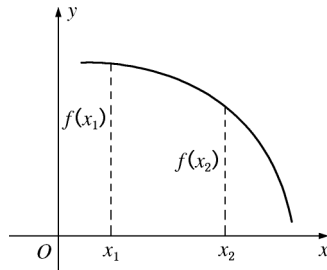


图 1.1.4

3) 奇偶性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 对于任意一个 $x \in D$, 若恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

如 $y = x^2, y = \cos x$ 是偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.1.5). $y = x^3, y = \sin x$ 是奇函数. 奇函数的图形关于原点对称(图 1.1.6).

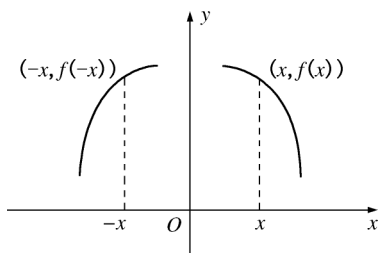


图 1.1.5

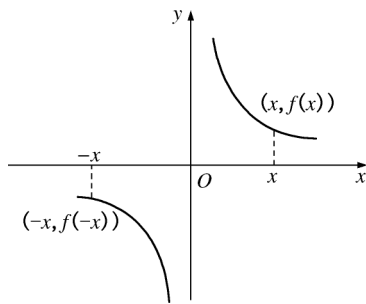


图 1.1.6

4) 周期性

定义 1.1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 若存在不为零的常数 T , 使得对于任意的 $x \in D$, 都有 $x+T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 其中 T 叫做函数的周期. 通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

如 $y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为最小正周期的周期函数. $y = \tan x, y = \cot x$ 都是以 π 为最小正周期的周期函数(图 1.1.7).

例 1.1.6 证明 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, 2π 为其周期, 且为有界函数.

证 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 关于原点对称.

又因为 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, 所以函数 $f(x) = \sin x$ 为奇函数.

因为 $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x) = \sin x$ 的周期为 2π .

因为 $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$, 所以函数 $f(x) = \sin x$ 为有界函数.

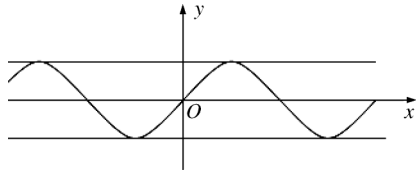


图 1.1.7

1.1.3 初等函数

1) 基本初等函数

- (1) 常量函数 $y = c$ (c 为常数).
- (2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为常数, $\mu \in \mathbb{R}$).
- (3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数).
- (4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数).
- (5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.
- (6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

2) 简单函数

由基本初等函数经过有限次四则运算并且可用一个式子表示的函数, 称为简单函数. 如 $y = 5 - x, y = 2x^2$ 等函数.

3) 复合函数

在实际问题中,我们常会遇到由几个基本初等函数组合而成的较复杂的函数.如某商场经营一种价格允许浮动的商品,销售额 y 是价格 u 的函数,而价格 u 又是货源 x 的函数,即 y 通过 u 是 x 的函数.这种函数有如下定义:

定义 1.1.7 设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$, 且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内,那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数,称其为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

注意 不是任意两个函数都可以复合成复合函数.例如, $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x-2$ 就不能复合.因为 $u=\sin x-2$ 的值域 $[-3, -1]$, 而 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$, 这两个集合交集为空集.不能构成复合函数.

例 1.1.7 指出下列复合函数的复合结构:

$$(1) y=\lg(\tan 3x^2); \quad (2) y=\sin^2(1+4x).$$

解 (1) $y=\lg u$, $u=\tan v$, $v=3x^2$ 复合而成.

(2) $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=1+4x$ 复合而成.

分析一个复合函数的复合结构一般由外向里,现阶段每一步都应是基本初等函数或简单函数的形式.

4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的,并且可用一个数学式子表示的函数,称为初等函数.

例如, $y=\sqrt{\ln 5x}-3^x$, $y=\frac{\sqrt[3]{3x+\tan 5x}}{x^3 \sin x-2^{-x}}$ 都是初等函数.今后我们所讨论的函数,绝大多数都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数.

1.1.4 练习题

$$1. \text{ 已知函数 } f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<-1, \\ 1-x^2, & -1\leq x<1, \\ -x+1, & x\geq 1. \end{cases} \text{ 求 } f(-2), f(\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ 和 } f(2).$$

2. 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$, 求 $f(\cos x)$.

3. 下列各对函数,相同的函数是().

A. $y=2\lg x, y=\lg x^2$

B. $y=x, y=\sqrt{x^2}$

C. $y=x(x>0), y=e^{\ln x}$

D. $y=\sin x, y=\sqrt{1-\cos^2 x}$

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=x^2+1, x\in(0, +\infty)$;

(2) $y=x^2, x\in(-\infty, 0)$.

5. 下列函数哪些是基本初等函数,哪些不是,为什么?

(1) $y=x^2$;

(2) $y=x^2+1$;

(3) $y=\sin^2 5x$;

(4) $y=2\lg x$.

6. 指出下列复合函数的结构:

(1) $y=3^{\sin x}$;

(2) $y=\sqrt[3]{5x-1}$;

(3) $y=\sin^2 5x$.

1.2 极限、无穷小与无穷大

在生产实践中,除了要讨论变量之间的关系(函数)外,还需进一步讨论函数的自变量按某种方式变化时,

因变量随之而变化的趋势. 极限方法则是研究这种变化的基本方法. 本节将讨论函数极限的概念.

1.2.1 函数的极限

引例 1.2.1 晚上, 当你走在大街上, 会发现你的影子时长时短. 当你从任何方向走近路灯时, 你的影子会随着你与路灯的接近而越来越短, 当你到达路灯下面时, 影子的长度无限接近于零.

引例 1.2.2 将一杯 100°C 的开水放在一间室温恒为 20°C 的房间里, 水温将逐渐降低, 随着时间的推移, 水温会无限接近室温.

现将根据 x 的不同变化过程, 分以下两种情况来讨论函数 $y=f(x)$ 的极限.

为了叙述的方便, 我们规定: 当 x 从 x_0 的左右两端无限接近于 x_0 时, 用记号 $x \rightarrow x_0$ (读作 x 趋于 x_0) 表示; 当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时, 用记号 $x \rightarrow x_0^+$ 表示; 当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时, 用记号 $x \rightarrow x_0^-$ 表示; 当 x 无限增大时, 用记号 $x \rightarrow +\infty$ (读作 x 趋于正无穷大) 表示; 当 x 无限减少时, 用记号 $x \rightarrow -\infty$ (读作 x 趋于负无穷大) 表示; 当 $|x|$ 无限增大时, 用记号 $x \rightarrow \infty$ (读作 x 趋于无穷大) 表示. 下面根据自变量 x 的变化趋势, 分别研究函数的极限.

1) 当 x 趋向于无穷大时, 函数 $f(x)$ 的极限

(1) $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > a$ 时有定义 (a 为某个正实数), 当 x 的绝对值无限增大时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋于无穷大时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 由图 1.2.1 可知, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

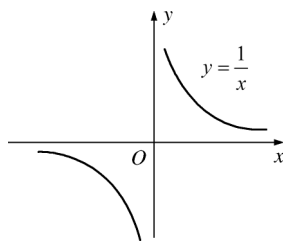


图 1.2.1

在该定义中, x 的绝对值无限增大是指 x 既取正值无限增大, 也取负值无限增大.

但对于某些函数 $f(x)$, x 的变化趋势只能或只需取这两种变化中的一种情形时, $f(x)$ 才无限趋近于一个常数 A . 例如 $f(x) = e^{-x}$, 由图 1.2.2 可知, 只有当 x 取正值而无限增大时, 它才无限趋近于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

(2) $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有定义 (a 为某个常数), 如果当 x 无限增大时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋于正无穷大时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

由图 1.2.1 及该定义可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

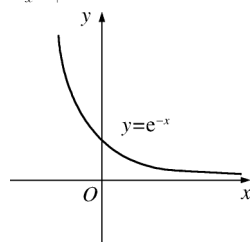


图 1.2.2

(3) $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 有定义 (a 为某个常数), 如果当 x 无限变小 (或 $-x$ 无限增大) 时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋于负无穷大时, $f(x)$ 的极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

由上述三个定义不难得出如下定理.

定理 1.2.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

例 1.2.1 函数 $y = \arctan x$, 考察 $x \rightarrow \infty$ 时的极限.

解 由图 1.2.3 可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

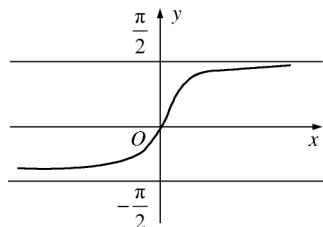


图 1.2.3

例 1.2.2 判断 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在?

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

2) 当 x 趋向于某一实数时, 函数 $f(x)$ 的极限

为了叙述问题的方便, 先介绍一下邻域的概念: 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为以 x_0 为中心, 以 $\delta (\delta > 0)$ 为半径的邻域, 简称为点 x_0 的邻域, 记为 $N(x_0, \delta)$. 如图 1.2.4 所示.

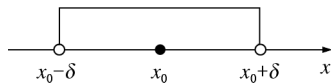


图 1.2.4

通常, 为了使 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数极限的定义适用范围更广泛, 不必要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义, 只需要 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 内有定义即可, 以后用 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 表示 x_0 的去心邻域. 如图 1.2.5 所示.

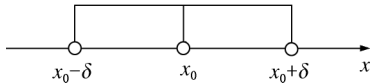


图 1.2.5

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

例 1.2.3 讨论当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势.

解 此函数在 $x = 1$ 无定义, 由图 1.2.6 可看出, 当 $x \neq 1$ 但动点 x 离 1 越来越近时, 相应的函数值 $f(x)$ 越来越近于常数 2, 即 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) \rightarrow 2$.

对于这种当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势, 有

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 在 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内无限趋近于 x_0 时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

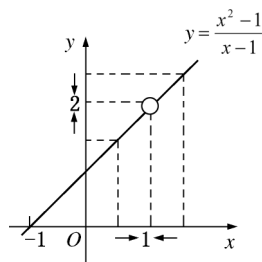


图 1.2.6

由图 1.2.6 可得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

在 $x \rightarrow x_0$ 中, x 是以任何方式无限趋近于 x_0 , 但有时只限于 x 从大于 x_0 的方向或小于 x_0 的方向无限趋近于 x_0 , 此时就有

(2) 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2.5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右半邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义, 当 x 在此半邻域内无限趋近于 x_0 时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的右极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

由图 1.2.6 可得

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

(3) 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2.6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左半邻域 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内有定义, 当 x 在此半邻域内无限趋近于 x_0 时, 相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的左极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

由图 1.2.6 可得

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

由上述三个定义可得

定理 1.2.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 1.2.4 判断 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 是否存在?

解 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在;

当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

例 1.2.5 讨论函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

解 由图 1.2.7 可知,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

思考: $x \rightarrow 1$ 时该函数的极限?

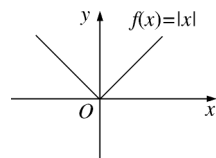


图 1.2.7

例 1.2.6 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

解 函数的图形 (图 1.2.8), 由图可知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在.}$$

思考: $x \rightarrow 1$ 时该函数的极限?

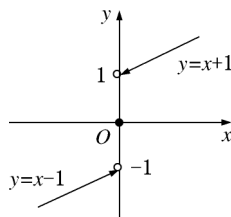


图 1.2.8

1.2.2 无穷小量与无穷大量

1) 无穷小量

(1) 无穷小的定义

定义 1.2.7 极限为零的变量称为无穷小量, 简称无穷小.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$, 则 $a(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小; 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$, 则 $a(x)$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注意 ① 无穷小是一个变量, 说一个变量是无穷小量, 应同时指明自变量的变化趋势;

② 不要把绝对值很小的常数说成是无穷小;

③ 常数中只有零可以看成是特殊的无穷小.

(2) 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 如 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \dots, \frac{n}{n^2}$ 均为无穷小,

$$\text{但 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

性质 2 有限个无穷小的积是无穷小.

推论 常数与无穷小的积是无穷小.

性质 3 无穷小与有界量的乘积是无穷小.

注意 两个无穷小的商未必是无穷小. 例如 $x \rightarrow 0$ 时, x 和 $2x$ 均为无穷小, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$, 由无穷小的定义

知, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{2x}{x}$ 不是无穷小.

例 1.2.7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$.

解 因为 $x \rightarrow 0$ 时 x^2 是无穷小, 同时 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, $\sin \frac{1}{x}$ 是有界量. 由无穷小与有界量的乘积是无穷小, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

(3) 函数极限与无穷小的关系

定理 1.2.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

定理 1.2.3 中自变量的变化趋势换成任何一种情形时, 结论都成立.

2) 无穷大量

定义 1.2.8 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f(x)| \rightarrow +\infty$, 则称 $f(x)$ 为在 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 简称无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. 如果相应的函数值 $f(x)$ (或 $-f(x)$) 无限增大, 则称 $f(x)$ 为在 $x \rightarrow x_0$ 时的正 (或负) 无穷大. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

注意

- (1) 无穷大是极限不存在的一种情形, 这里借用极限的记号, 并不表示极限存在.
- (2) 无穷大是一个变量, 说一个量是无穷大, 应同时指明自变量的变化趋势.
- (3) 不要把绝对值很大的常数说成是无穷大量.

1.2.3 无穷小与无穷大的关系

由无穷小与无穷大的定义, 不难得出:

定理 1.2.4 在自变量的同一变化过程中, 无穷大的倒数是无穷小; 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

例 1.2.8 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$.

解 因为当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1 \rightarrow 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$. 也就是说 $x-1$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小量, 所以 $\frac{1}{x-1}$ 是 $x \rightarrow 1$ 的无穷大量, 即 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

1.2.4 练习题

1. 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 为何只要求 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义?

2. 设 C 为常数, $\lim_{x \rightarrow x_0} C$ 存在吗?

3. 画图说明, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数的极限是否存在?

(1) $y = x$; (2) $y = \sin x$; (3) $y = \frac{1}{x}$.

4. 画图说明, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 下列函数的极限是否存在?

(1) $y = 2^x$; (2) $y = \arctan x$; (3) $y = \frac{1}{x^2}$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0, \end{cases}$ 作出图形, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 并判断 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的存在性.

6. 自变量 x 在怎样变化过程中, 函数 $y = \ln x$ 是无穷大量? 在怎样的变化过程中是无穷小量?

7. 自变量 x 在怎样变化过程中, 下列函数为无穷小?

$$(1) y = \frac{1}{x-1};$$

$$(2) y = 2x - 1;$$

$$(3) y = 2^x;$$

$$(4) y = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

1.3 极限的运算法则

求函数的极限也是一种运算, 也有一定的运算法则. 极限的四则运算法则是微积分学的基本运算之一, 其包含题型多, 解题方法技巧性强, 应适当地多做些练习, 注意总结其基本解题方法.

1.3.1 极限的四则运算法则

在下面的讨论中, 记号“ $\lim$ ”下面没有标明自变量的变化过程, 下面的法则对于 x 在任何变化趋势下都是成立的.

定理 1.3.1 设在自变量 x 的同一变化过程中, $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 则有下列法则:

法则 1 $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x).$

法则 2 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$

法则 3 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (\lim g(x) \neq 0).$

推论 1 $\lim kf(x) = k \lim f(x)$ (k 为任意常数), 即常数因子可以提到极限符号之外.

推论 2 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$

1) 直接应用法则求极限

例 1.3.1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1).$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$

例 1.3.2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+1}.$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$, 由法则 3 得

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)} = \frac{3}{5}.$$

2) “ $\frac{0}{0}$ ”型(即分子、分母的极限均为 0)

例 1.3.3 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}.$

解 当 $x \rightarrow 3$ 时, 分子、分母有公因式 $x-3 \rightarrow 0$ (称 $x-3$ 为零因子). 但 $x \neq 3$, 因而可约去零因子, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-4} = -5.$$

这种极限求法是将分子、分母分解后, 约去它们公共无穷小因子(又称零因子), 再求极限.

3) 分母的极限为 0, 分子的极限不为 0

例 1.3.4 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}.$

解 当 $x \rightarrow 3$ 时, 分母 $x-3 \rightarrow 0$, 分子 $x+1 \rightarrow 4 \neq 0$. 可把分子分母颠倒求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \frac{0}{4}. \text{ 由无穷小的倒数是无穷大得 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \infty.$$

4) $x \rightarrow \infty$ 时的“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

例 1.3.5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3}{5x^3 + 2x + 1}$.

解 用 x^3 同除分子和分母, 再求极限(称为无穷小分离法).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3}{5x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^3}}{5 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{5}.$$

用同样的方法可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m=n; \\ 0, & m>n; \\ \infty, & m<n. \end{cases}$$

注意 此结果可作为公式使用, 但只适用于 $x \rightarrow \infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 的情形. 这种极限求法: 它是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 用分子、分母同时除以 x 的最高次幂后再求极限.

5) 其他类型求极限

例 1.3.6 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}).$$

解 (1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 呈“ $\infty - \infty$ ”型, 不能直接用法则, 方法是先通分再用相应方法求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

(2) 当 $x \rightarrow 2$ 时, 分子、分母均为 0, 即“ $\frac{0}{0}$ ”型, 不能直接用商的极限运算法则, 可先分子有理化, 然后再用相应方法求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 两项极限均为无穷大, 即“ $\infty - \infty$ ”型, 不能直接用法则运算, 一般处理方法是先通分再用相应方法求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

在求极限的过程中, 要特别注意如下两点: ①只有在各项极限都存在时(对商的极限, 分母的极限还不能为零), 才能运用极限法则求极限; ②若所求极限呈现“ $\frac{0}{0}$ ”, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”等形式, 则不能直接用极限法则, 必须先对原式进行恒等变形(约分、通分、有理化、变量代换等), 然后再求极限.

1.3.2 练习题

1. 求下列函数的极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 2x + 1); & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}; & (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}; \\
 (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 3}{5x^4 + 2x + 1}; & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}; & (6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}).
 \end{aligned}$$

2. 下列运算错在何处?

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)} = \frac{1}{0} = \infty; \\
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0.
 \end{aligned}$$

1.4 两个重要极限与无穷小的比较

1.4.1 两个重要极限

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

观察表 1.4.1, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x}$ 的变化趋势.

表 1.4.1

x	± 0.5	± 0.1	± 0.01	± 0.001	$\dots$	$\rightarrow$	0
$\frac{\sin x}{x}$	0.958 85	0.998 33	0.999 58	0.999 8	$\dots$	$\rightarrow$	1

从上表可以看出, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

我们称之为第一个重要极限.

该公式可以演变为 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$ 或 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\sin \Delta} = 1$.说明: (1) 无论 x 的变化趋势如何, 只要该极限呈 $\frac{0}{0}$ 型;(2) 函数分子中变量 Δ 与分母中变量 Δ 相同.

满足以上条件, 极限值为 1.

$$\text{例 1.4.1} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

$$\text{例 1.4.2} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{\cos 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos 3x} = 1 \times 3 = 3.$$

例 1.4.3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

例 1.4.4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = 1 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

例 1.4.5 求 $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{-\sin(-x)}{2\pi - x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{-\sin(2\pi - x)}{2\pi - x} = -1.$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

关于这个极限,我们也不作理论讨论,只列出 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的数值表(表 1.4.2),以观察它的变化趋势.

表 1.4.2

x	10	100	1 000	10 000	100 000	...	$\rightarrow$	∞
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.594	2.705	2.717	2.718	2.718 27	...	$\rightarrow$	2.718 281 828...

从表 1.4.2 可看出,当 $x \rightarrow +\infty$ 时,函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 无限趋近于无理数 2.718 281 828..., 可以证明,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 也无限趋近于无理数 2.718 281 828..., 该极限是一个无理数,通常用 e 来表示 ($e = 2.718 281 828 \dots$), 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

我们称之为第二个重要极限.

该公式可以演变为: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e$ 或 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{\Delta} = e$.

说明: (1) 无论 x 的变化如何,只要该极限呈现 1^∞ 型;

(2) 函数底数位置的变量 Δ 与指数位置的变量 Δ 相同.

满足以上两个条件,极限值为 e .

例 1.4.6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$.

解 所求极限类型是“ 1^∞ ”型,则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

例 1.4.7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 所求极限类型是“ 1^∞ ”型,则

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - 2x)^{\frac{1}{-2x}} \right]^{-2} = e^{-2}.$$

例 1.4.8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$.

解 所求极限类型是“ 1^∞ ”型, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\tan x}} = e.$$

例 1.4.9 设有本金 10 000 元, 2009 年存款年利率为 2.25%, 若用年复利计算, 即每年末将当年的本利和存入银行, 5 年后本利和为多少?

解 (1) 若一年计算一次利息, 则一年末本利和为 $10\,000(1+0.022\,5)^1$,
 两年末本利和为 $10\,000(1+0.022\,5)^2$

.....

五年末本利和为 $10\,000(1+0.022\,5)^5 = 11\,176.8$ (元).

(2) 若每季度计算一次利息, 季利率为 $\frac{0.022\,5}{4}$, 一年结算四次, 则一年末本利和为 $10\,000\left(1+\frac{0.022\,5}{4}\right)^4$,
 x 年末结算 $4x$ 次, x 年本利和为 $10\,000\left(1+\frac{0.022\,5}{4}\right)^{4x}$,

五年末本利和为 $10\,000\left(1+\frac{0.022\,5}{4}\right)^{20} = 11\,187.2$ (元),

(3) 若每年结算 n 次, x 年结算 nx 次, x 年本利和为 $10\,000\left(1+\frac{0.022\,5}{n}\right)^{nx}$,

(4) 连续复利: 当每年结算无穷多次, 即每年计息次数 $n \rightarrow +\infty$ (称为连续复利), 则 x 年末本利和为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10\,000\left(1+\frac{0.022\,5}{n}\right)^{nx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10\,000\left[\left(1+\frac{0.022\,5}{n}\right)^{\frac{n}{0.022\,5}}\right]^{0.022\,5x} = 10\,000e^{0.022\,5x},$$

五年末本利和为 $10\,000e^{0.022\,5 \times 5} = 11\,190.7$ (元).

1.4.2 无穷小的比较

我们已经知道, 两个无穷小的和、差、积仍为无穷小, 但两个无穷小的商却会出现不同的情形. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, 3x, x^2$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0.$$

两个无穷小商的极限不同, 反映了不同的无穷小趋于零的快慢程度, 为比较无穷小趋于零的快慢, 我们引入无穷小阶的概念.

定义 1.4.1 设 α, β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小, 且 $\alpha \neq 0$.

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C, (C \neq 0)$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小.

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

显然当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是 $3x$ 的高阶无穷小, $3x$ 是 x 的同阶无穷小.

下面是当 $x \rightarrow 0$ 时常用的几个等价无穷小, 要熟记:

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x; & \tan x &\sim x; & \arcsin x &\sim x; & \arctan x &\sim x; \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2; & \ln(1+x) &\sim x; & e^x - 1 &\sim x; & \sqrt{1+x} - 1 &\sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

等价无穷小在求两个无穷小之比的极限时, 有重要作用. 对此, 有如下定理.