

数学分析

上册

复旦大学数学系主编

上海科学技术出版社

数 学 分 析

上 册

复旦大学数学系 主編

陈傳璋 金福临 胡家贛 朱学炎 欧阳光中 編

(第 二 版)

上海科学技术出版社

数 学 分 析

下 册

复旦大学数学系 主編

陈傳璋 金福临 胡家贛 朱学炎 欧阳光中 編

(第 二 版)

上海科学技术出版社

数 学 分 析 (上册)

复旦大学数学系主编

陈传璋 金福临 胡家骥 朱学炎 欧阳光中 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.375 字数 245,000

1962年12月第2版 1979年7月第6次印刷

书号: 13119·355 定价: 1.15 元

內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著“数学分析”試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并参照讀者所提出的一些意見改写的,較初版有了較多的补充和闡述,并附有适量的习題。

本书分上下两册,上册計极限論、微分学两篇,下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇,可作綜合大学数学系数学分析教材,亦可作高等院校有关专业的参考书。

数 学 分 析 (下册)

复旦大学数学系主編

陈传璋 金福临 胡家驥 朱学炎 欧阳光中 編

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 14.625 字数 349,000

1960年5月第1版 1962年12月第2版 1979年9月第6次印刷

印数 110,001—180,300

书号: 13119·357 定价: 1.65 元

內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著“数学分析”試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并參照讀者所提出的一些意見改写的，較初版有了較多的补充和闡述，并附有适量的习题。

本书分上下两册，上册計极限論、微分学两篇，下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇，可作綜合大学数学系数学分析教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

序

本书是在复旦大学数学系 1960 年編著的“数学分析(一)”試用本的基础上重新編写的。其目的是作为綜合大学数学系数学分析基础課的教材或参考书。在这次改編工作中,根据基础課的教学要求及原书在复旦大学数学系試教的实际情况,并吸取了各方面意見,基本上仍旧保持原书所采用的系統結構,进一步注意到加强基础理論、基础知識和基本訓練,从而对內容作了比較多的补充,也作了适当的改动。此外,并附入适量的习題。

本书分上下两册計四篇。上册:第一篇极限論,包括变量与函数、数列极限、函数极限、函数連續性等;第二篇微分学,包括一元函数微分学及其应用、多元函数微分学及其应用。下册:第三篇积分学,包括不定积分和定积分及其应用、各种积分的概念及計算和它們之間的联系、場論;第四篇无穷級数和广义积分,包括无穷級数、广义积分、富里埃級数等。

我們对很多兄弟学校及有关單位同志們曾对本书試用本提出不少宝贵意見和积极建議,并对曹志浩、張乃玲、陈开明、秦曾复、廖有为等同志对本书編写工作所进行的协助,以及上海科学技术出版社对本书出版工作所給予的支持,表示衷心感謝。

由于我們水平有限,編写時間也比較匆促,一定还存在不少缺点,我們除了进一步通过教学实践来修改,充实,提高外,殷切期望同志們、讀者們随时給予批評指教。

編 者 1962 年 6 月

34594

目 录

(上 册)

序

緒論	1
----	---

第一篇 极 限 論

第一章 变量与函数	9
习题	28
第二章 极限	33
§1 极限的概念	33
§2 数列极限的性质和运算	48
§3 关于数列的几个基本定理	60
§4 函数极限	76
§5 連續函数	96
§6 閉区間連續函数的性质	108
§7 多元(二元)函数的极限与連續	119
§8 无穷小量、无穷大量的阶的比較	130
习题	132
附录 实数的理論	146

第二篇 微 分 学

第一章 导数与微分	160
§1 导数的引进与定义	160
§2 简单函数的导数	164
§3 求导法則	166

§ 4 不可导的函数举例	175
§ 5 微分	178
§ 6 高阶导数与高阶微分	182
习题	188
第二章 微分学的基本定理	196
§ 1 中值定理	196
§ 2 洛必达法则	202
§ 3 泰勒公式	210
习题	214
第三章 导数的应用, 函数作图	218
§ 1 函数的上升、下降与极值	218
§ 2 一元函数作图法	228
习题	242
第四章 多元函数的微分学	245
§ 1 偏导数与全微分	245
§ 2 二元函数的泰勒公式	263
§ 3 二元函数的极值	265
习题	271
第五章 隐函数存在定理, 函数相关	276
习题	297
第六章 限制极值(条件极值)	302
习题	311
第七章 微分学在几何上的一些应用	313
§ 1 平面曲线的切线和法线	313
§ 2 平面曲线的弧长微分、曲率和曲率半径	314
§ 3 空间曲线的切线和法平面	317
§ 4 曲面的切平面与法线	320
习题	323

目 录

(下 册)

第三篇 积 分 学

第一章 不定积分	326
§ 1 不定积分与它的简单计算方法	326
§ 2 不定积分的计算	330
习题	353
第二章 定积分概念	358
§ 1 定积分问题的提出及定积分的定义	358
§ 2 积分存在的充分必要条件	362
§ 3 可积函数类	370
§ 4 可积函数的性质	373
§ 5 定积分的计算	378
§ 6 椭圆积分	388
习题	392
第三章 定积分的应用和定积分的近似计算	396
§ 1 曲线的弧长	396
§ 2 平面图形的面积	404
§ 3 体积	411
§ 4 旋转体的侧面积	415
§ 5 重心	418
§ 6 定积分的近似计算	422
习题	427
第四章 含参变量的积分	431
习题	437

第五章 各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分)的定义及性质	439
§ 1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念	439
§ 2 积分存在的充要条件	444
§ 3 各种积分的性质	447
习题	449
第六章 各种积分的计算及应用	451
§ 1 二重积分的计算	451
§ 2 三重积分的计算	475
§ 3 第一类曲线积分的计算	490
§ 4 第一类曲面积分的计算	493
§ 5 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分在物理上的应用	500
§ 6 第二类曲线积分及第二类曲面积分	507
习题	538
第七章 各种积分间的联系和场论	545
§ 1 格林公式	545
§ 2 奥斯特洛格拉德斯基公式	549
§ 3 斯托克司公式	553
§ 4 曲线积分和道路的无关性	557
§ 5 场论	564
习题	578

第四篇 无穷级数和广义积分

第一章 数项级数	584
§ 1 预备知识 上限和下限	584
§ 2 级数的收敛性及其基本性质	588
§ 3 正项级数	594
§ 4 任意项级数的收敛判别法	602

§ 5 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质	611
§ 6 无穷乘积	619
习题	625
第二章 函数项级数	629
§ 1 函数序列和函数项级数的收敛和一致收敛	629
§ 2 一致收敛级数的性质	638
§ 3 一致收敛级数的判别法	643
习题	649
第三章 幂级数	652
§ 1 幂级数的收敛半径和它的性质	652
§ 2 函数的幂级数展开式	657
§ 3 幂级数在近似计算中的应用	664
习题	666
第四章 广义积分	669
§ 1 无穷限的积分	669
§ 2 无穷限积分的收敛性判别法	675
§ 3 无界函数的积分	681
§ 4 广义重积分	687
习题	692
第五章 含参变量的广义积分	696
§ 1 含参变量广义积分的一致收敛性	696
§ 2 一致收敛积分的性质	701
§ 3 例题	707
§ 4 欧拉积分[Beta 函数 $B(p, q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(s)$]	711
习题	718
第六章 富里埃级数	721
§ 1 三角级数和富里埃级数	721
§ 2 一般正交函数系	727
§ 3 狄利克来积分和黎曼引理	733
§ 4 富里埃级数的收敛性定理(狄尼判别法及其推论)	739

§ 5 狄利克来引理、狄利克来-約当判別法	742
§ 6 函数 $f(x)$ 的富里埃級数展开	746
§ 7 富里埃級数的逐項积分与逐項微分	753
§ 8 平方平均逼近	757
§ 9 算术平均求和概念与費埃爾定理	761
§ 10 三角函数系的封閉性	767
§ 11 富里埃积分	769
习題	780

第三篇 积 分 学

本篇將討論一种在理論上和實踐上极为重要的数学工具——积分。为了使讀者能够理解积分本质,掌握它和运用它,所以在处理材料时,不是形式地按照定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分、……等次序孤立地进行叙述,而是按照它們之間的內在联系,以統一的观点有重点地叙述。积分的本质是一个具有特殊结构的和式的极限,在各种积分中,这种和式的极限只是表现形式不同而已。因此在叙述时,我們首先把定积分概念讲深讲透,然后将二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分抓住其本质統一叙述。这样,就可把格林公式,奥斯特洛格拉得斯基公式及斯托克司公式統一起来,加以比較,体现了一个基本思想:函数在区域上的积分值,可以用它的“原函数”在边界上的值或积分来表示。

在本篇中,每个重要概念引入时,都将指出它的实际背景,然后提高到理論上来分析它們的本质,同时插入大量实例,使得讀者能够比較好地掌握教材内容,学会解决实际問題的方法。

第一章 不定积分

§1 不定积分与它的简单计算方法

在上一篇中讨论了导数与微分，它是由给定的函数求出其导数或微分。但是，在科学、技术的许多问题中，常常需要解决相反的问题，就是要由一个函数的已知导数，求出这个函数。例如在上一篇中，我们假定已知物体的运动方程 $s=s(t)$ ，用微分法求得其速度 $v=\frac{ds}{dt}$ ，然后找出其加速度 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ 。但是实际上，往往还需要解决反面的问题：已给定加速度 a 是时间 t 的函数，而要求确定速度 v 及其所经过的路程，这样就需要由已知的函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$ ，而它的导数就是 $a(t)$ ，然后从求得的 $v(t)$ 再求出函数 $s=s(t)$ ，而它的导数就是 $v(t)$ 。

一般地，我们给出如下的定义：

定义 若在某一区间上， $F'(x)=f(x)$ ，则在这个区间上，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数。

显然，从定义可知，一个函数的原函数不是唯一的，因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$ (C 为任意常数)，所以若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 也是 $f(x)$ 的原函数。反过来，由第二篇第二章拉格朗日定理的推论可知，如果两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，那末它们至多相差一个常数项，所以 $F(x)-G(x)=C$ ，因此函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $F(x)+C$ 。

称函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $f(x)$ 的不定积分，记

为 $\int f(x)dx$ 。由上所述可见，求不定积分的运算就是求导数的逆运算。

回到一开始提出来的那个力学问题上，我们现在可以把它表示为

$$v = \int a(t) dt$$

及
$$s = \int v(t) dt.$$

如果讨论的是等加速运动，在重力作用下，就有（ g 为重力加速度）

$$v = \int g dt = gt + C_1$$

及
$$s = \frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。我们不难通过求导数来验证这些等式的正确性。但是，如果需要完全确定的解决，还需要知道在某一时刻的速度以及在此时刻的路程。例如，已知 $t=t_0$ 时

$$v = v_0, s = s_0,$$

那末就可以定出

$$C_1 = v_0 - gt_0$$

及
$$C_2 = s_0 + \frac{1}{2} gt_0^2 - v_0 t_0,$$

从而得到
$$v = g(t - t_0) + v_0$$

及
$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

习惯上称 t_0, s_0 及 v_0 分别是 t, s 及 v 的初始值。

作为导数的逆运算，很容易求得初等函数的不定积分，下面是最简单的不定积分表：

1. $\int 0 dx = C;$

2. $\int k dx = kx + C$ (k 为常数);

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$9. \int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C;$$

$$10. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C;$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

借助于积分法则可以把上面得到的积分表所适用的范围加以扩充。最简单的积分法则有以下三个：

一、若 a 是常数 ($a \neq 0$)， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$