代數術

代數術卷二十四

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論八線數理

第二百十五款　用代數以解幾何之題又有一種爲八線算學其法以各角之正弦餘弦正矢餘矢正切餘切正割餘割求其相比之理也

第二百十六款　八線之理古時已有人知之其理之根源乃從平圓中所容之正方形其兩對角線所成之矩形等于其兩邊所成之矩形之倍此理始見于特里密

之書。而爲希臘國人解三角各理之本。近時有里的亞斯者。著一種論三角形之書。阿特名人在一千五百九十六年續成而印行之。又畢的斯克斯一千五百九十九年所印之書。亦有此論。則八線之由來。蓋已久矣。

嘗攷滿得剌所著算學傳中。言一千七百年以前。尙未有人攷求弦切等線之式。惟因弦切各線。爲算學家所必用之數。爰有俄羅斯京中博學會內之人名美耶者。其所印出之書。初論此理。然觀美耶之說。知其未曾讀過畢的斯克斯之書。因畢的斯克斯所著之書。其第二卷第八第九題已有求兩弧正餘弦和較之法。此乃一

千六百十二年所印行之本也。

迨一千七百二十二年。有卜里奴者著書論數弧切線之和。其式俱以本弧之切線明之

以上二書。皆先于美耶之書。而美耶之書。乃于一千七百二十七年間始印行。惟其書初以代數之法解三角。則爲前所未有。

又有尤拉者。于一千七百五十四五兩年中。著書論八線之理。比前人更明。而弧三角之法。亦爲尤拉于一千七百七十九年所成之書。初以代數馭之

一千七百八十三年。有第國華者。亦著書論弧三角之

理。又有法蘭西人拉果蘭諸。亦論之。至此時。三角之法蓋已精矣。

第二百十七款　八線數理。在解明各幾何之題。用處最廣。可甚省古時爲幾何格致各題所專設之繁圖。蓋幾何之理。若用近時所設之代數法馭之。則最繁之圖。及最密最多之諸數。或多方位之題。大約可不必作多線之圖。但用代數之法解之。已可極其明白。　即如哥斯人名所設平圓內作十七等邊形之題。亦可不繁言而解。又如用八線入代數。已可將方程式之諸理。廓充至最廣。又如天文之家。可得甚簡便之法。以推算各行星與

彗星之動角及所行之各道並視行實行之方位又如動靜兩種重學中亦不必用多圖而可明各重各力相比之理且以代數馭八線可將對數與八線表合用而甚省幾何中用實數推算之勞譬如數件器具每器各有專司若合爲一器則所省之力更多也

第二百十八款　八線數理與一切幾何若以代數之法馭之無論其所設所求之數爲線爲角俱可以數目之字明之

法先設一箇一定之線或一定之角爲一而凡他線或他角皆可用其倍數爲線或角之各數惟此所命爲一

之數其大小本無一定祗因欲借此數以明他數之大小故所令為一之數不能為甚整之倍數而其奇零小數可謂之小于一之數

第二百十九款　凡命為一之數而可以度各角者即正方角九十分之一亦即四箇正方角之三百六十分之一也此數名之曰一度而每度又分之為六十分每分又分之為六十秒每秒又分之為六十微

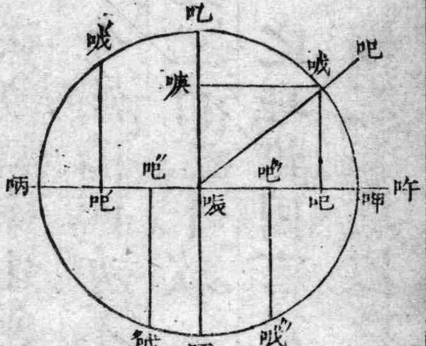
凡寫任何角度之法如一二°一五′一〇″二〇‴即十二度十五分十秒二十

三微也惟尋常言角其秒以下之數每以十分秒之幾計之如三‴四爲三秒又十分秒之四

法蘭西國變亂之時曾有人設一角度之新數目令正方之角分爲一百等分每分各平分爲一百秒每秒又分爲一百微然其法未能通行于各國惜拉不拉斯之天文算家中常用此法致令後人讀其書者甚以爲難今法蘭西亦不用此法而仍用三百六十度之舊法矣

第二百二十款　凡角度之與平圓本不必有一定相關之理惟因言角者必想及全圓言全圓者必想及其分圓之角所以此書中必並言之

如圖令吧㖘與吘㖘皆爲直線而能成角其第一線吘㖘之方位已知又令其第二線吧㖘之起端恆以㖘點爲心而吧㖘線初時與吘㖘相合後繞㖘點而旋則吧㖘必成一吧㖘吘角其半徑之端哦點必行成一呷哦弧如吧㖘線再繞㖘點而旋行一周其哦點必行成平圓則爲四個正角所合如此則易見任何吧㖘吘角與四個正角之比若呷哦弧與全周之比所以平圓之弧可爲角之度數

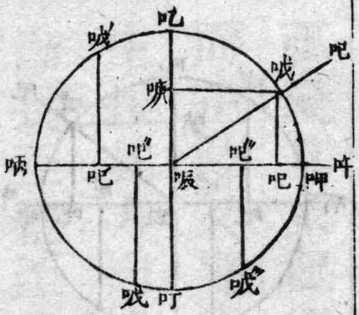


如設全周爲三百六十度每度爲六十分

每分爲六十秒則角與弧皆可同以若干度分秒之
數明之

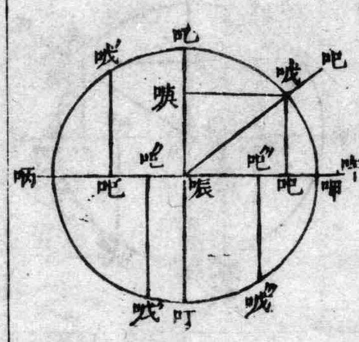
第二百二十一款

令呷呩吃叮彼此各互爲垂線則此二徑必分全周爲
四象限而其全圓分爲呷㖇吃吃㖇呩
呩㖇叮叮㖇呷四箇直角形



凡角與正角即直角亦即方角相較謂之餘角凡弧與象限相
較謂之餘弧

凡角與兩箇正角（即一百八十度）相較，謂之外角。凡弧與半周相較，謂之外弧。



如吧㖒吃為吧㖒吘之餘角，而吧㖒哂為吧㖒吘之外角。吃吱為呷吱之餘弧，而哂吱為呷吱之外弧。

第二百二十二款

設呷為呷吱弧之原點，則從此弧之吱端作直線吱吧為呷哂徑之垂線，其名曰呷吱弧之正弦。又作吱嗔線與吃叮為垂線，名曰呷吱弧之餘弦。由此可見凡弧之

餘弦.恆等于正弦距平圓心點之數

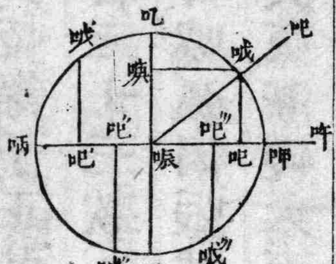
第二百二十三款

設呷呅弧因㖘呅半徑.漸離㖘呷之位.而向吃㖖叮行.則其弧漸變大.而呅吧正弦.本等于○者.亦漸變大.至弧變爲象限以後.則呅吧正弦.漸變小.至弧增至半周.而正弦又變爲○.若其弧再增大.則正弦吧呅.又能再生.惟其方向.必與第一象限內之吧呅相反.如是正弦漸長至變至第三象限以後.又漸變小.至弧滿四限之時.正弦仍爲○.　若其㖘呅半徑再行第二轉.成呷吃㖖叮呷呅弧.比全周更大.則又成正弦呅吧.其餘各象

限照此類推總之無論繞至幾周其在各象限內所成之正弦均與第一周內相同

第二百二十四款　凡弧之餘弦其方向及變大變小之法亦可與正弦同理推之

其呷哦弧自○增至第一象限之時其餘弦⿰口長⿰口己本等于⿰口長呷半徑者漸變小至不見若其弧再增至第



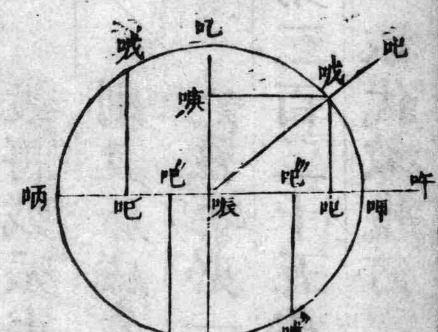
二象限內之任弧呷⿰口乙哦則又成餘弦⿰口長⿰口己'而方向必與第一象限內之餘弦相反所以其弧增至滿兩象限時其餘弦又為極大如⿰口長哂等于惟⿰口長呷是也

方向必與前相反.若其弧再增至呷呐戊.則餘弦又漸小.如唇咆至弧大至呷叱呐叮.為三個象限.則餘弦再變為〇.其第四象限內.餘弦唇咆復生.而仍與第一象限內之方位同.至一周圓滿之時.而餘弦仍為唇呷.如再行第二匝.其理仍同.

設將哎唇半徑.繞唇而旋.與前相反.自呷而叮而呐.則其所成之弧呷戊.其正餘弦之方向.及變大變小之法.亦必一例.

第二百二十五款

依代數幾何之理.呷哎弧.呷戊弧.其哎吧正弦.戊吧正



弦之方向與呷哦弧呷哦弧之哦吧正弦及哦吧正弦之方向相反此可以上下二號記之其㖘吧餘弦㖘吧餘弦與㖘吧餘弦㖘吧餘弦之方向亦然

識別得呷呐徑線兩邊（即上下）之弧其正弦之正負皆相反而吃叮徑線兩邊（即左右）之餘弦亦必正負相反如呷哦弧為正則在第一象限以內之正餘弦不論以為正以為負俱可至變小為〇而復生之後其方向必與前相反故其正負之號必變

設命呷㖃為任何正號之弧則其正弦餘弦在第㊀象限內皆為正至第㊁象限內其正弦仍為正而餘弦變為負至第㊂象限內則正弦餘弦皆為負至第㊃象限內其正弦仍為負而餘弦變為正

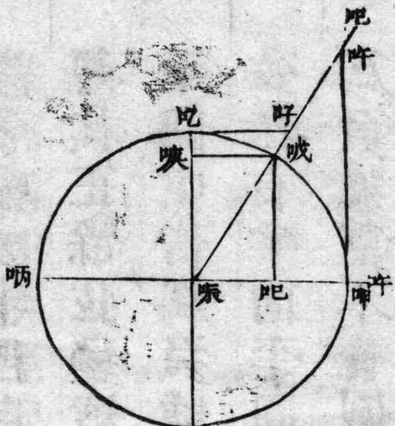
設令㖞㖃半徑自呷向叮哂而旋則所成之弧為負而觀其正餘弦變號之法與前相比則見正弦在下半箇平圓中皆為負號而至上半箇平圓內皆為正號其餘弦在右半箇平圓內皆為正號而至左半箇平圓內皆為負號莫不一例

第二百二十六款

設有直線呷啐與呷哂全徑為垂線遇引長之半徑𠵾

哎于啐其呷啐線為呷哎弧之正

切而𠵾啐線為呷哎弧之正割



第二百二十七款 設再作𠵾吃之垂線吃吁與呷哎弧

之正割線𠵾啐遇于吁則吁吃線為呷哎弧之餘切線

而𠵾吁為其餘割線

第二百二十八款 弧與弦所截半徑之一段謂之矢如