三角數理

一函六冊 函

三角數理卷五

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

此卷論各角之比例數乘約變化之理

棣美弗之例

第一百三十款

指數卯無論為何數其$(\text{正弦斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{餘弦斗})^{\text{卯}}$之式必等于$\text{正弦卯斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{餘弦卯斗}$。此為算學

士棣美弗所設之例,

從此例,如欲得斗弦正一丄丅斗弦餘式之任何乘方,祇須將其斗以方指數乘之,即得,又其丅之左,可任用正負二號,其用負號之意,即同于改其斗為丅斗也,

以下所論之式,但將其丅之左為只有正號,亦未嘗不可通,

今試令其方指數卯,任為正負整分各數,一二證之,

其指數若為正則以乘法得

—(牛弦正一丅丄牛弦餘)(斗弦正一丅丄斗弦餘)

(牛弦正斗弦餘丄牛弦餘斗弦正)一丅丄牛弦正斗弦正丅牛弦餘斗弦餘。

依代數之常理知

式內所有能為實數之項必等于

(牛丄斗)弦餘。

而其虛數之項必

等于

√丅一正弦(斗丄牛).

所以

(餘弦斗丄√丅一正弦斗)(餘弦牛丄√丅一正弦牛)

——餘弦(斗丄牛)丄√丅一正弦(斗丄牛).

由是知凡有與 餘弦斗丄√丅一正弦斗 相似之兩式相乘其積仍爲相似之式惟其角則爲乘數之式中兩角之和所以若再以相似之他乘數如 餘弦井丄√丅一正弦井 者乘之則其三

式連乘之積必爲

(餘弦斗丄√丅一正弦斗)(餘弦牛丄√丅一正弦牛)(餘弦井丄√丅一正弦井)

═[餘弦(斗丄牛)丄√丅一正弦(斗丄牛)](餘弦井丄√丅一正弦井)

═餘弦(斗丄牛丄井)丄√丅一正弦(斗丄牛丄井)。

如此推之無論用若干相似之乘數連乘俱可。

所以若共有卯箇乘數俱與$\text{餘弦斗}\ \text{丄}\ \sqrt{\text{丅一}}\ \text{正弦斗}$相等則其連乘而得之積祇須以兩項之式明之如

$$\left(\text{餘弦斗}\ \text{丄}\ \sqrt{\text{丅一}}\ \text{正弦斗}\right)^{\text{卯}} = \text{餘弦卯斗}\ \text{丄}\ \sqrt{\text{丅一}}\ \text{正弦卯斗}$$

㊀

其指數若為負則因

$$(\text{餘弦卯斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦卯斗})(\text{餘弦卯斗}\top\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦卯斗})=\text{餘弦}^{\text{二}}\text{卯斗}\perp\text{正弦}^{\text{二}}\text{卯斗}=\text{一}$$

所以

$$\frac{\text{餘弦卯斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦卯斗}}{\text{一}}=\text{餘弦卯斗}\top\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦卯斗}$$

即

$$\frac{(\text{餘弦斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦斗})^{\text{卯}}}{\text{一}}=\text{餘弦卯斗}\top\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦卯斗}$$

亦即

$$(\text{餘弦斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦斗})^{\text{丅卯}}=\text{餘弦}(\text{丅卯斗})\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}(\text{丅卯斗})$$

此為本例能通于負指數之證

其指數若爲分數則可將$\frac{卯}{寅斗}$代其㊀式中之斗則式變爲

$$\left(餘弦\frac{卯}{寅}斗\perp\sqrt{\top 一}\,正弦\frac{卯}{寅}斗\right)^{卯}$$

$$=餘弦寅斗\perp\sqrt{\top 一}\,正弦寅斗$$

$$=\left(餘弦斗\perp\sqrt{\top 一}\,正弦斗\right)^{寅}。$$

若將左右兩邊各開卯方用分指數代其根號則得

$$餘弦\frac{卯}{寅}斗\perp\sqrt{\top 一}\,正弦\frac{卯}{寅}斗=\left(餘弦斗\perp\sqrt{\top 一}\,正弦斗\right)^{\frac{卯}{寅}}。$$

此爲本例能通于分指數之證。

第一百三十一款

從上款可見 $餘弦\frac{卯}{寅}斗丄丅一彳弦\frac{卯}{寅}斗$ 爲 $(餘弦斗丄丅一正弦斗)^{\frac{卯}{寅}}$ 式中依代數之理所能有卯箇同數內之一，而其餘各同數亦不難定，因可徑依前所證之說，其斗爲任何角，則能以同用此正弦同用此餘弦之各角之公同數 $二未周丅斗$ 代之故也，其未爲任何整數，或正或負俱可。

則可見餘弦$\frac{卯}{寅}$(二未周丄斗)丄丅一正弦$\frac{卯}{寅}$(二未周丄斗)㊁為[餘弦(二未周丄斗)丄丅一正弦(二未周丄斗)]$^{\frac{卯}{寅}}$式之一箇同數，亦卽為(餘弦斗丄丅一正弦斗)$^{\frac{卯}{寅}}$式之一箇同數。

茲欲證㊁式只能有卯箇不同之同數，而不能再多。祇須令未遞等于〇、一、二、三以至卯丅一，卽得卯箇不同之同

數因若有兩數相同如 未＝巳.未＝午. 則其角式 $\frac{\text{卯}}{\text{寅}}$（二巳周丄斗）.與 $\frac{\text{卯}}{\text{寅}}$（二午周丄斗）.所

分別者祇在 二周 之倍數耳.卽 $\frac{\text{卯}}{\text{寅（巳丅午）周}}$ 必爲周率之倍數.惟

因巳與午各小于卯.而寅不能以卯度之.所以不能有

此事.若取未爲〇與卯以外之數.則不能更有新同

數.

若令 未一虛卯丄未. 其虛爲任何正負之數.未爲小于卯之正數.則

未能代任何正負數而式變為 餘弦[二虛寅周丄卯/寅(二未周丄半)]丄丅一正弦[二虛寅周丄卯/寅(二未周丄半)] 此式中若不用二周

之倍數則得 餘弦卯/寅(二未周丄半)丄丅一正弦卯/寅(二未周丄半) 因未為小于卯之正數則其數必在

$未=一$、$未=二$以至$未=卯丅一$各數之內。

所以$(餘弦斗\perp丅一正弦斗)^{\frac{卯}{寅}}$式之全同數在$(餘弦斗\perp丅一正弦斗)^{\frac{卯}{寅}}=餘弦\frac{卯}{寅}(二未周\perp斗)\perp丅一正弦\frac{卯}{寅}(二未周\perp斗)$式中，其未為任何正負之整數，而〇不在外。言〇數亦在其內也。第一式之卯箇同數，從第二式右邊之卯箇同數而生，必令其未為從〇至$卯丅一$之各數以得之。

由此又可見若令卯斗═二周未丄角其末爲任何整數而角爲○與周

率間之任一角則其斗有卯箇不同之同數俱與餘弦斗丄√丅一正弦斗之

同數不同惟與餘弦卯斗丄√丅一正弦卯斗之同數皆同

第一百三十一款附

若令寅＝一。則求$\text{餘弦斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦斗}$之卯方根，必在

$$\sqrt[\text{卯}]{\text{餘弦斗}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦斗}}=\text{餘弦}\frac{\text{卯}}{\text{二未周}\perp\text{斗}}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}\frac{\text{卯}}{\text{二未周}\perp\text{斗}}$$

式中。所以若令斗＝〇。斗＝周。即得丄一與丅一之卯方根之公式為

$$\sqrt[\text{卯}]{\text{一}}=\text{餘弦}\frac{\text{卯}}{\text{二未周}}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}\frac{\text{卯}}{\text{二未周}}.$$

$$\sqrt[\text{卯}]{\text{丅一}}=\text{餘弦}\frac{\text{卯}}{(\text{二未}\perp\text{一})\text{周}}\perp\sqrt{\text{丅一}}\,\text{正弦}\frac{\text{卯}}{(\text{二未}\perp\text{一})\text{周}}.$$

而其不

同之各同數可合未爲從〇至卯下一之各數以得之

又如合 $\frac{斗}{斗}$ ━ $\frac{〇}{周}$ 則 (一)寅 與 (下一)寅 之公同數變爲 周寅未二弦正一 / 周寅未二弦餘 與 周寅(一上未二)弦正一 / 周寅(一上未二)弦餘 其寅爲

分數若寅之分數中其分母爲巳則(一)寅之同數與(下一)寅之同數可合未爲從〇至卯下一之各數以得之

茲列要說如下