高等数学竞赛试题解析（2013）

高职高专适用

GAODENGSHUXUE JINGSAISHITI JIEXI（2013）

陈 仲 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学竞赛试题解析(2013)

（高职高专适用）

陈　仲　编著

东 南 大 学 出 版 社

·南京·

内 容 提 要

本书内容含两篇，上篇介绍高等数学竞赛(高职高专)的基本内容与重要方法，下篇为高等数学竞赛(高职高专)试题解析.竞赛试题包含江苏省普通高校(1—11届)高等数学竞赛专科类试题、北京市大学生(5—14届)高等数学竞赛大专组试题、浙江省大学生(2003—2011年)高等数学(微积分)竞赛大专类试题、上海市大学生(1991年)高等数学竞赛专科组试题.

高等数学竞赛能激励高职高专的大学生学习高等数学的兴趣，活跃思想.高等数学竞赛试题中既含基本题，又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题.这些题目构思绝妙，方法灵活，技巧性强.本书下篇将上列31份竞赛原题逐条解析，对重要题目深入分析，总结解题方法与技巧.

本书可供准备大专类高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可供高职高专的大学生作为学习高等数学与"专升本"考试的参考书，特别有益于成绩优秀的高职高专大学生提高高等数学水平.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛试题解析.2013 / 陈仲编著.—南京：东南大学出版社，2012.12

高职高专适用

ISBN 978-7-5641-3954-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第290386号

高等数学竞赛试题解析(2013)(高职高专适用)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼2号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞
电　　话	(025)83793169(办公室)，83362442(传真)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm 1/16
印　　张	14.75
字　　数	289千字
版　　次	2013年1月第1版
印　　次	2013年1月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-3954-4
定　　价	29.80元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　　言

高等数学(或称大学数学)是高职高专一年级大学生的基础课程,江苏、北京、浙江等省市都成功组织了十多届全省或全市性的大专类高等数学竞赛.

本书内容含两篇,上篇介绍高等数学竞赛(高职高专)的基本内容与重要方法,下篇为高等数学竞赛(高职高专)试题解析.竞赛试题包含江苏省普通高校(1—11届)高等数学竞赛专科类试题、北京市大学生(5—14届)高等数学竞赛大专组试题、浙江省大学生(2003—2011年)高等数学(微积分)竞赛大专类试题、上海市大学生(1991年)高等数学竞赛专科组试题.

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于高等学校要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量.高等数学竞赛能激励高职高专的大学生学习高等数学的兴趣,活跃思想,它要求学生比较系统地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.这些试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题.它们构思绝妙,方法灵活,技巧性强.本书下篇将上列31份竞赛原题逐条解析,对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧.

本书可供准备大专类高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供高职高专的大学生作为学习高等数学与“专升本”考试的参考书,特别有益于成绩优秀的高职高专大学生提高高等数学水平.

书中错误难免,敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2012年12月于南京大学

目 录

上篇 高等数学竞赛(高职高专)的基本内容与重要方法

下篇 高等数学竞赛(高职高专)试题解析

上　篇

高等数学竞赛(高职高专)的基本内容与重要方法[①]

① 各省市高等数学竞赛(高职高专)的考核内容不完全相同,例如江苏省考一元函数微积分、空间解析几何和级数;北京市考一元函数微积分、多元函数微分学、二重积分和微分方程;浙江省只考一元函数微积分.

1　函数与极限

1.1　一元函数基本概念

1）函数的奇偶性、周期性、单调性、有界性.

常用的奇函数：

$$y=\sin x,\quad y=\tan x,\quad y=\arctan x$$

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\quad y=f(x)-f(-x),\quad \cdots$$

常用的偶函数：

$$y=x^2,\quad y=\cos x,\quad y=f(x)+f(-x),\quad \cdots$$

常用的有界函数：

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\arctan x,\quad y=\operatorname{arccot} x,\quad \cdots$$

2）五类基本初等函数：幂函数 $y=x^\lambda$；指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$；对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；6个三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,\cdots$.

基本初等函数的定义域、值域、奇偶性、周期性、单调性、有界性.

指数函数的基本公式：

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\quad u(x)=\exp(\ln u(x)),\quad u(x)=\ln(\mathrm{e}^{u(x)})$$

对数函数的基本公式：

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y,\quad \log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}$$

三角函数的基本公式(平方和公式、和角公式、倍角公式、半角公式)：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\quad \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

3) 初等函数与初等函数的分解.

例如,初等函数 $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 可以分解为 $f_1=\mathrm{e}^u, f_2=u^2, f_3=\sin u, f_4=\dfrac{1}{x}$,则

$$y=f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$$

4) 分段函数.

5) 常用的数学方法:极坐标变换法($x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$)、数学归纳法、反证法等.

1.2 极限概念

1) 数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的"$\varepsilon-N$"定义:$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

(2) 收敛数列的三条性质(极限的唯一性、数列的有界性、极限的保向性).

2) 函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-\delta$"定义:$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

(2) 函数的左极限与右极限:

$$f(a-)=\lim_{x\to a-}f(x),\quad f(a+)=\lim_{x\to a+}f(x)$$

定理 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(a-)=f(a+)=A$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-K$"定义:$\forall\varepsilon>0,\exists K>0$,当 $x>K$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

(4) 函数的极限的六种极限过程:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a+}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a-}f(x)=A$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

定理 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(5) 函数极限存在时的三条性质(极限的唯一性、函数的局部有界性、极限的保向性).

3) 无穷小量、无穷小的运算性质、无穷小的比较(高阶、低阶、同阶、等价).

1.3　极限存在的两个准则

定理 1（夹逼准则 Ⅰ）　设数列 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

定理 1′（夹逼准则 Ⅱ）　设函数 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

定理 2（单调有界准则）　设数列 $\{x_n\}$ 单调增加，有上界（或单调减少，有下界），则该数列 $\{x_n\}$ 收敛.

1.4　复合函数的极限（求极限的变量代换法则）

定理　设 $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$，$\lim\limits_{u\to b} f(u) = A$，且在 $x = a$ 的某去心邻域内 $\varphi(x) \neq b$，则有

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to b} f(u) = A$$

1.5　求极限的各种方法

1）应用四则运算法则求函数的极限.

2）应用变量代换法则求函数的极限.

3）应用夹逼准则求数列与函数的极限.

4）应用单调有界准则证明数列的极限存在，再求该数列的极限.

5）应用关于 e 的重要极限求 1^{∞} 型的极限：设 $\square = u(x)$，则

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = \mathrm{e},\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}$$

6）应用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量来求极限.

7）利用等价无穷小因子代换法则求 $\frac{0}{0}$ 型的极限.

定理 1（等价无穷小因子代换法则）　若在某极限过程下，例如 $x \to a$ 时，$\alpha(x) \to 0$，$\beta(x) \to 0$，且 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，$\beta(x) \sim \beta_1(x)$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot u(x)}{\beta(x)\cdot v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)\cdot u(x)}{\beta_1(x)\cdot v(x)}$$

注意:① α(或 β) 必须是整个分子(或分母) 的无穷小因子. 譬如分子为 $\alpha \cdot u(x)+h(x)$ $(h(x)\neq 0)$ 时,分子不能用 $\alpha_1 \cdot u(x)+h(x)$ 代换.

② $u(x)$(或 $v(x)$) 中有因子的极限不为 0 时,最好先求出来.

定理 2(等价无穷小基本公式) 若在 x 的某极限过程下,$\square = u(x)\to 0$,则

$$\square \sim \sin\square \sim \arcsin\square \sim \tan\square \sim \arctan\square \sim \mathrm{e}^{\square}-1 \sim \ln(1+\square)$$

$$1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2,\quad (1+\square)^{\lambda}-1 \sim \lambda\square$$

8) 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 求数列$\{x_n\}$ 极限.

9) 利用导数的定义求极限.

10) 利用洛必达法则求$\dfrac{0}{0}$ 型与$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限.

11) 利用马克劳林展式求极限.

12) 利用定积分的定义求极限.

13) 利用级数的性质求极限.

14) 利用幂级数的和函数求极限.

1.6 函数的连续性概念

1) 函数连续的定义:若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

此定义含有下列三个要素,三者缺一不可:

(1) 等式左边是考察 $x\neq a$ 时,要求函数 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时有极限,记为 A;

(2) 等式右边是考察 $x=a$ 时,要求函数 $f(x)$ 有定义,函数值为 $f(a)$;

(3) 要求函数值 $f(a)$ 与极限值 A 相等,即 $f(a)=A$.

2) 初等函数的连续性定理.

定理(初等函数的连续性定理) 初等函数在其定义域上的每一点处连续.

3) 间断点:连续性的定义中,三要素至少有一条不成立时,称 $x=a$ 为间断点.

4) 讨论分段函数的连续性以及间断点的分类.

设

$$f(x)=\begin{cases}F(x) & (x<a);\\ A(\text{或不存在}) & (x=a);\\ G(x) & (x>a)\end{cases}$$

这里 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为已知的初等函数. 讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的连续性,并将间断点分类的方法是先求左极限与右极限:

$$f(a-)=\lim_{x\to a-}F(x),\quad f(a+)=\lim_{x\to a+}G(x)$$

(1) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不存在,称 $x=a$ 为第 Ⅱ 类间断点;

(2) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 都存在但不相等,即 $f(a-)\neq f(a+)$,称 $x=a$ 为第 Ⅰ 类跳跃型间断点;

(3) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 都存在并且相等,即 $f(a-)=f(a+)$,但 $f(x)$ 在 $x=a$ 处无定义,或者虽有定义,但 $f(a-)=f(a+)\neq A=f(a)$,称 $x=a$ 为第 Ⅰ 类可去型间断点;

(4) 仅当 $f(a-)=f(a+)=A=f(a)$ 时,$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

1.7　复合函数的极限与连续性

定理 1　设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$,$f(u)$ 在 $u=b$ 处连续,则 $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处极限存在,且有

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to a}\varphi(x))=f(b)$$

定理 2　设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续,$f(u)$ 在 $u=b=\varphi(a)$ 处连续,则 $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处连续,且有

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to a}\varphi(x))=f(b)=f(\varphi(a))$$

1.8　定义在闭区间上的连续函数的重要性质

定理 1(有界定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理 2(最值定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

定理 3(介值定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 M 和 m,$\forall\mu\in(m,M)$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 4(零点定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

2　一元函数微分学

2.1　导数的定义

1）函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数定义为

$$f'(0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\square \to 0} \frac{f(\square)-f(0)}{\square}$$

2）函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义为

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\square \to 0} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$$

3）函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右导数定义为

$$f'_{-}(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\square \to 0-} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$$

$$f'_{+}(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\square \to 0+} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$$

定理 1　函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的必要条件是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

定理 2　函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右导数皆存在且相等,即 $f'_{-}(a)=f'_{+}(a)$.

4）导数的几何意义:$f'(a)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线的斜率,其切线方程为 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

5）讨论分段函数的可导性.

设

$$f(x)=\begin{cases} F(x) & (x<a); \\ A & (x=a); \\ G(x) & (x>a) \end{cases}$$

这里 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为已知的可导函数,讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性的方法如下:

(1) 先考察连续性,当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续时,$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导;当

$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续时，继续讨论可导性.

(2) 求左导数与右导数，即有

$$f'_{-}(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad f'_{+}(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

若 $f'_{-}(a)$，$f'_{+}(a)$ 中至少有一个不存在，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导；若 $f'_{-}(a)$，$f'_{+}(a)$ 都存在但不相等，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导；若 $f'_{-}(a)$，$f'_{+}(a)$ 都存在且相等，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=f'_{-}(a)=f'_{+}(a)$.

6) 讨论分段函数的连续可导性.

设

$$f(x)=\begin{cases}F(x) & (x<a);\\ A & (x=a);\\ G(x) & (x>a)\end{cases}$$

这里 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为已知的可导函数，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的连续可导性的方法如下：

(1) 应用上述 5) 求得

$$f'(x)=\begin{cases}F'(x) & (x<a);\\ f'(a) & (x=a);\\ G'(x) & (x>a)\end{cases}$$

(2) 考察 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右极限

$$f'(a-)=\lim_{x\to a-}F'(x),\quad f'(a+)=\lim_{x\to a+}G'(x)$$

仅当 $f'(a-)=f'(a+)=f'(a)$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续可导；否则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续可导.

2.2　导数基本公式

$$(x^{\lambda})'=\lambda x^{\lambda-1},\quad (a^{x})'=a^{x}\ln a,\quad (\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x},\quad (\log_{a}x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\quad (\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,\quad (\tan x)'=\sec^{2}x$$

$$(\cot x)'=-\csc^{2}x,\quad (\sec x)'=\sec x\tan x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^{2}},\quad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^{2}}$$