高等院校成人教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（上）

主编 陈海波 严希文

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

高等院校成人教育“十二五”规划教材

高等数学

（上册）

陈海波　严希文　主编

对外经济贸易大学出版社
中国・北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上 / 陈海波，严希文主编．—北京：对外经济贸易大学出版社，2013

高等院校成人教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5663-0592-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①陈… ②严… Ⅲ．①高等数学－成人高等教育－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 266001 号

ⓒ 2013 年 对外经济贸易大学出版社出版发行

高等数学（上册）

陈海波 严希文 **主编**

责任编辑： 阮珍珍 郑 骞

对 外 经 济 贸 易 大 学 出 版 社

北京市朝阳区惠新东街 10 号 邮政编码：100029

邮购电话：010－64492338 发行部电话：010－64492342

网址：http://www.uibep.com E-mail：uibep@126.com

唐山市润丰印务有限公司印装 新华书店北京发行所发行

成品尺寸：185mm×230mm 28.75 印张 572 千字

2013 年 3 月北京第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5663-0592-3

印数：00 001－10 000 册 定价：63.00 元

高等院校成人教育“十二五”规划教材

编审委员会

总　序

党的十八大报告中指出：要积极发展继续教育，完善终身教育体系。继续教育是我国高等教育的重要组成部分，是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展以成人教育为主的继续教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行继续教育制度，鼓励发展多种形式的继续教育，建立与完善终身教育体系，培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才，对于加强社会主义精神文明建设，促进社会进步和经济发展，都将起到十分重要的作用。

按照教育部关于成人高等教育人才的培养目标，构建适用的教材体系，是成人高等教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编审委员会、作者和出版社的共同努力，“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”将陆续出版，我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材，具有以下特点：

一是体例新颖。在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖教学大纲的重点或主要内容。教材中充分考虑到学生学习时可能遇到的问题，给他们以提示和建议。在章后和书后分别设置“同步测练与解析”和“综合测练与解析”栏目，涵盖本章及本书的重要知识点，并给出详尽的参考答案，对难题进行分析点评，列出解题思路与要点，以方便学生自学自测。

二是内容丰富、形式多样。教材内容既有基础知识、基本理论，又有基本技能的展示；既注重基本原理与应用知识的传授，又将纸质教材与多媒体教学资源、网络资源相结合，将与课程内容相关的法律法规、工具模板、操作范例等以多媒体网络资源的形式提供给学生。

三是实用性强。遵循成人高等教育人才培养模式与教学规律，在教材的编写上将理论与实际紧密结合，注重案例的引入，教材中尽可能多地安排案例，并进行详细的分析讲解。旨在通过案例教学，对课程重点难点进行深化分析和实操训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题以及动手操作的能力。

在此，我相信“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”的出版，对湖南建设教育强省这一目标的实现必将起到积极的推动作用。同时，继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各院校在使用教材过程中有什么问题和建议，请及时反馈编委会，以便改进编写工作，真正把我省成人教育的教材建设提高到一个新的水平。

湖南省教育厅副厅长：申纪云

2013 年 2 月于长沙

前　　言

高等数学是理工农医及经管类成人高等教育各专业的一门重要的基础理论课程，高等数学的教学对于各专业后续专业课程的学习及合格专门人才的培养起到非常重要的作用，而一本好的高等数学教材是促进高等数学教学、提高教学质量和实现教学目标的重要保障。

我们在教学过程中常常感到，由于受教材内容、学生认识能力、教学时数等诸多因素的影响，有些问题在课堂上顾不上讲，有的又暂时不宜讲解，有的虽能讲到，教材上又缺少相应归纳总结而不便学生复习和掌握。因此，编写一本能够紧密结合成人高等教育实际，遵循成人高等教育对高等数学课程的基本要求，在“教”与“学”两方面满足本专科层次成人高等教育的教学需求，既方便教学，又能帮助学生深入理解基本概念和基本理论，牢固掌握基本运算技能，适应性和针对性较强的成人高等教育高等数学教材，是我们长期以来的一个愿望。

近年来，我们结合自己成人高等教育高等数学教学经验，在对课堂教学讲义进行反复修改的基础上，编写了这套适合成人教育的高等数学教材。

首先，在教学内容上，本套教材力图处理好专科段和本科段数学知识的“接力”问题，既保证专科和本科段知识不能脱节，又避免两阶段知识内容的重复，做到内容全面，结构合理，逻辑清晰，方便教师根据本专科不同教学计划和学时要求选择教学内容。

其次，在每章每节对知识要点与重点难点进行了归纳总结，例题典型，解析详细，并配有大量习题，难易恰当，同时做到语言通俗，叙述清楚，方便学生自学。

教材分上下两册，全书为理工类和经管类成人学历教育（成人、网络、自学考试）高升本、专升本、专科（上册）通用教材，也可作为高职高专理工类和经管类参考教材。

上册内容是一元函数微积分学的基本知识，包括函数与极限，导数与微分，中值定

理与导数的应用，不定积分与定积分及其应用，微分方程等。

下册内容主要是多元函数微积分学，包括多元函数微分法及其应用，重积分与曲线积分及曲面积分，同时还介绍了空间解析几何与无穷级数的相关知识。

教材在编排上采用“内容提要与基本要求—基本内容叙述—典型例题解析—习题—本章基本知识体系（小结）”的章节结构，与之相适应的教学环节是“预习—系统面授—同步练习—每章归纳总结”。

全书由中南大学陈海波和严希文任主编，廖耘、史建权任副主编，参加编写的还有王俊杰、史红霞、周君君。

由于编者水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 1 月

目　　录

第 1 章 函数、极限与连续

高等数学的研究对象是函数，它的主要概念与计算是以极限作为基础的，因此极限方法是本章研究的基本方法. 无穷小量与无穷大量是变量的两种特殊变化趋势. 连续是函数的一种重要性态，在高等数学中主要研究连续函数.

本章从极限概念出发，讨论了极限存在的必要条件、充分条件、充要条件、无穷小与无穷大的关系，极限与无穷小的关系、极限与连续的关系、极限的四则运算法则，这些知识为极限计算提供了理论依据和基本方法.

这一章的重点是函数、极限、无穷小、函数的连续性等概念，以及极限的四则运算法则；难点是复合函数、极限的定义、函数在一点连续的定义.

§1.1 函　　数

一、内容提要与基本要求

内容提要	基本要求
1　函数的概念	了解函数的定义，掌握常用的三种函数表示法、熟练掌握确定函数定义域的方法
2　函数的性质	理解函数的几个基本性质，熟练运用几个常用结论

二、区间、邻域的概念

集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为这个集合的元素. 事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$； a 不是集合的元素，记作 $a \notin M$.

具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，记作

$$M = \{ x \mid x\text{所具有的特征} \}$$

高等数学用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合.

设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，把数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 分别称为区间的左端点和右端点，把数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记作 (a, b) 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

显然端点 a，$b \in [a, b]$，但 a，$b \notin (a, b)$

类似地，把

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

及
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

称为半开（闭）区间.

以上区间都称为有限区间，而把区间

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\} = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x < b\} = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in R\}$$

称为无限（穷）区间，如图 1.1 所示.

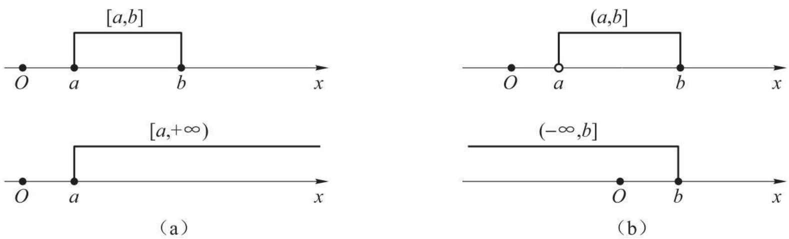

图 1.1

以后在不必辨明区间是否包含端点，以及是有限或无限区间时，就简称为区间，常用 I 表示.

设 x_0 是数轴上的点，以 δ 为半径的邻域，简称 x_0 的邻域，记作 $N(x_0, \delta)$，即 $N(x_0, \delta) = \{x \| x - x_0| < \delta\}$

因为不等式 $|x - x_0| < \delta$ 相当于 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$，所以

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

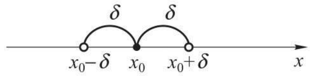

图 1.2

由此可见 $N(x_0, \delta)$即为开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
如图 1.2 所示.

集合 $$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

（这时 x_0 不属于这个集合）称为 x_0 去心 δ 邻域，记作 $N^0(x_0, \delta)$.

三、函数概念

1. 函数的定义

在初等数学里，已经见过一些简单的函数：

线性函数：$y=kx+b$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等，其中 x、y 是两个变量. 一般地，有如下函数概念.

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个非空实数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照某一确定的法则 f，都有确定的实数 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x)$，式中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，自变量的取值范围（即数集 D）叫做函数的定义域，对应法则 f 也叫做函数关系.

当自变量 x 取遍 D 中的一切数时，因变量 y 的取值范围叫做函数的值域.

定义 1 反映了现实世界中变量之间既互相联系又互相制约的本质.

依此定义，要决定一个函数，最主要的要素是定义域 D 和函数关系 f.

例 1　在自由落体问题中，物体下落的距离 s 和时间 t 的对应规律是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，它的定义域是$[0, T]$，其中 T 为物体着地的时刻. 只有当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，下落距离 s 和时间 t 才有上述对应规律，否则没有意义.

例 2　$y=\arcsin(2+x^2)$

对任何实数 x，按给定的表达式都没有与之对应的 y 值. 因此，这个表达式不表示函数关系.

例 3　研究（1）$y=2\lg x$ 与 $y=\lg x^2$；（2）$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是否有相同的函数关系.

解　（1）$y=2\lg x$ 的定义域为$(0, +\infty)$，而 $y=\lg x^2$ 的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，因为定义域不同，故为不同的函数.

（2）它们的对应规律（或值域）不同，故也不为相同的函数.

2. 函数的表示法

（1）三种表示法. 常用的函数表示法有公式法、表格法和图示法.

公式法是以数学式子表示自变量与因变量之间对应规律的一种方法（如例 1）. 该法具有简明、准确，便于理论分析的优点. 但不够直观，且对某些实际问题中所遇到的函数关系有时很难甚至不能用公式表示出来.

表格法是将自变量的值与对应的函数值列成表格以表示自变量与因变量之间的对应规律的一种方法. 如对数表，三角函数表等.

图示法是一种用函数图象表示函数的方法. 设 $y=f(x)$的定义域为 D，在平面直角坐标系中，以自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标的点为 $M(x,y)$，当 x 取遍 D 的值时，点 $M(x,y)$ 就描出了平面上的一个图形，称为 $y=f(x)$的图象（图 1.3）. 该法直观，有时能表示出公式法无法表示的函数.

在函数研究中，常将三种方法结合起来用.

（2）用公式法表示函数时，有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学式子表示出来，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数，如图 1.4 所示.

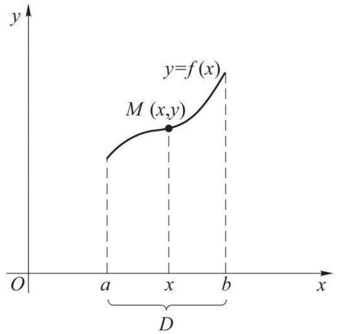

图 1.3

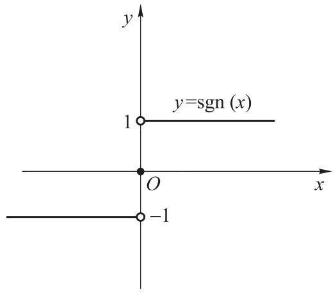

图 1.4

注意，分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，实际应用中常用到这种表示形式.

（3）隐函数. 用公式法表示函数时，有些函数的因变量是用自变量的表达方式表示的，称为显函数，如 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ 等. 而有些函数，它的因变量与自变量的对应规律是用方程来表示的. 例如，方程 $x+y^3+1=0$ 就表示一个函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，变量 y 有确定的值与之对应，这样的函数称为隐函数.

一般地，如果在含变量 x 和 y 的方程中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有

满足方程的唯一的 y 值存在，则称该方程在该区间内确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

3. 函数的定义域

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 有确定的 y 值与之对应，则称函数在点 x_0 有定义，可见函数的定义域就是使函数有定义的一切点的全体所组成的集合. 那么，如何确定函数的定义域呢？如果函数是反映实际问题的，其定义域则由实际问题的意义来确定，如半径为 r 的球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，其定义域是（0，$+\infty$）.

如果函数是用一般地数学式子表示的，其定义域就是自变量所能取的使数学式子有意义的一切实数值.

例 5　确定下列函数的定义域：

（1）$y=\arccos\dfrac{x-1}{2}$；（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\lg(x-1)$

解　（1）根据反三角函数的定义，要使函数有定义，须使

$$\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1 \quad 即\ -1\leqslant x\leqslant 3$$

故定义域为$[-1,3]$.

（2）要使函数有定义，须使

$$\begin{cases}4-x^2>0\\x-1>0\end{cases} 即 \begin{cases}-2<x<2\\x>1\end{cases} \quad 1<x<2$$

故定义域为（1,2）.

4. 函数的记号

关系式 $y=f(x)$表示 y 是 x 的函数，其中“f”表示自变量 x 与因变量 y 的对应规律，表示这种对应规律的记号，显然可以用任何字母，如 g、F、φ、y、…等，因此 y 是 x 的函数可以记为

$$y=g(x)，y=F(x)，y=\varphi(x)，y=y(x)，\cdots$$

等. 但是，在同一问题中，若须同时研究几个函数，则应使用不同的函数记号，例如分别记为 $y=g(x)$，$y=F(x)$，或 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$等等.

由函数定义可知，确定一个函数的根本要素是定义域和函数关系，而不是自变量和因变量采用何种符号. 例如 $y=3x^2+1$ 与 $s=3t^2+1$，它们的定义域和对应规律都相同，因此二者所表示的是同一个函数.

对函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取值 $x_0\in D$ 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0)或\ y\Big|_{x=x_0}$$

表示. 计算时，只要将 x_0 代替 $f(x)$中的 x，就得到 $f(x)$在点 x_0 的函数值.

例 6 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(-1)$，$f(-x)$，$f(x+1)$.

解 $f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)+2=6$

$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2$，

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$

例 7 已知 $f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(x-1)$.

解 $f(-1)=-1$，$f(0)=0$，$f(2)=2^2+1=5$

$$f(x-1)=\begin{cases}-1 & ,x-1<0\\ 0 & ,x-1=0\\ (x-1)^2+1, & x-1>0\end{cases} \quad 即 \quad f(x-1)=\begin{cases}-1 & ,x<1\\ 0 & ,x=1\\ x^2-2x+2, & x>1\end{cases}$$

四、函数的性质

1. 单值性与多值性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对于每一个 $x\in D$，只有唯一的一个函数值与之对应，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 本书凡未特别指明的函数皆为单值函数.

2. 奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为奇函数.

例如 $f(x)=x^2$，$g(x)=\cos x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上是偶函数，$f(x)=x^3$，$g(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$上是奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

3. 单调性

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意的两点 x_1，$x_2\in$ I，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，记为↗，其图形是上升的（图 1.5）；如果对于任意的 x_1，$x_2\in$ I，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，记作↘，其图形是下降的（图 1.6）.

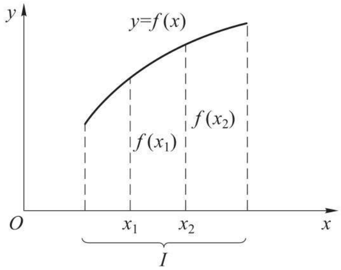

图 1.5

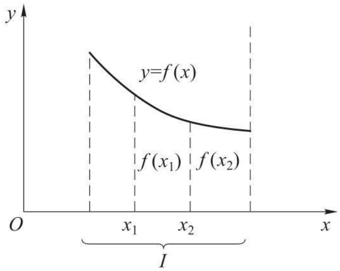

图 1.6

在某区间上单调增加或单调减少的函数统称为该区间上的单调函数.

例如 $f(x)=x^2$，在（$-\infty$，0］上单调减少，在［0，$+\infty$）上单调增加，但在（$-\infty$，$+\infty$）上，不是单调函数.

4. 有界性

设 $y=f(x)$ 在 D 上有定义. 如果存在常数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 上为有上界的，如果存在常数 m，使得对于一切 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$在 D 上为有下界的.

如果存在常数 $M>0$，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 上为有界的.

例如：$f(x)=1-x^2$，因为 $f(x)\leqslant 1$，故 $f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）有上界；$g(x)=e^x$，因为 $g(x)>0$，故 $g(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）有下界；$h(x)=1+\sin x$，因为 $|h(x)|\leqslant 2$，故 $h(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）有界. 反之，如果对任意 $M>0$，存在 $x'\in D$，使得 $|f(x')|>M$，则称 $f(x)$ 在 D 上为无界的.

5. 周期性

设 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在一个数是 $l\neq 0$，使得对于任意的 $x\in D$ 时，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 称为周期函数，通常称 $T=l$ 中的最小正数为 $f(x)$ 的周期. 例如，$\sin x$、$\cos x$ 是周期为 2π的周期函数，$\tan x$、$\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

周期函数在其定义域内，在平移长度为 l 的区间上，函数图形的形状相同（图 1.7）.

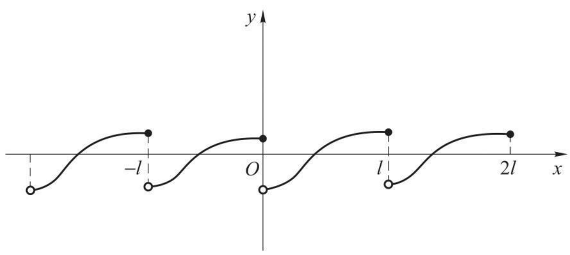

图 1.7