高等数学

岳忠玉等　编

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/岳忠玉等编.—西安:西北大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5604-1724-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.岳…　Ⅲ.高等数学－高等学校:技术学校－教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057574 号

高等数学

出版发行	西北大学出版社	**社　址**	西安市太白北路 229 号
电　话	029－88303313	**经　销**	新华书店经销
印　刷	陕西奇彩印务有限责任公司印刷	**开　本**	787×1092　1/16
版　次	2011 年 8 月第 4 版	**印　次**	2011 年 8 月第 1 次印刷
字　数	493 千字	**印　张**	20.25
书　号	ISBN 978－7－5604－1724－0	**定　价**	28.00 元

前 言

为适应高等职业教育发展的新形势，按照“在基础课的教学中，要求以应用为目的，以必需够用为度”的原则，我们认真总结了高等职业数学教改经验并吸取国内同类教材的优点，组织力量编写了这套适用于高等职业院校的《高等数学》教材.

在编写过程中，我们充分考虑到高等职业教育的特点及对人材培养目标的要求，为了使教师好用，学生好学，特别在以下几个方面作了一定的努力:

1. 强调概念、定理的背景分析和直观解释，不追求严格的论证和推导，代之以几何说明、合情推理.

2. 精选例题、习题和复习题. 每节后的习题以反映基本概念、基本运算和基本方法的题目为主，每章后的复习题以判断、选择、填空等客观性题目和较综合的题目为主.

3. 每章后配有本章小结，旨在帮助学生掌握基本要求，突破重点难点.

4. 为与高中数学更好地衔接，特别安排了“预备知识”一章，供师生查阅. 教学中师生可灵活处理.

5. 为提高学生利用计算机解决数学问题的能力，还增加了“MATLAB 使用入门”一章，供教学时参考.

6. 书后附有四个附录，前三个是为了方便学生学习时查阅，最后一个简单介绍了数学史特别是微积分史上一些著名的数学家，目的是让学生了解一代代数学大师的光辉思想和巨大贡献，从中受到启迪，提高学习高等数学的兴趣.

7. 为满足多媒体教学的需要，本教材还配有精美的电子课件和电子书.

全书内容包括预备知识，函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分及其应用，无穷级数和 MATLAB 使用入门. 书后附有初等数学常用公式，常用平面曲线，常用积分表，著名数学家简介及习题参考答案. 本书的基本教学时数不少于 116 学时，标有* 号的内容为选学内容，需要另加学时.

参加本书编写的有西安航空技术高等专科学校岳忠玉、张政（预备知识）、张蒙（第五、八、十一章），陕西能源职业技术学院郭群虎（第一、十章），陕西职业技术学院杜卫平（第二章）、崔永红（第三章），陕西国防工业职业技

术学院成均孝(第四章),陕西交通职业技术学院王子燕(第六章),陕西工业职业技术学院张绪绪(第七章)、段瑞(第九章).全书编写大纲及框架结构安排由岳忠玉承担,最后的统稿、定稿由岳忠玉、张绪绪承担.另外,郭群虎、崔永红和王子燕也承担了部分统稿工作.

西北大学张文鹏教授承担了本书的审稿工作,提出了许多有价值的意见,在此表示衷心的感谢.

本书除可作为高等职业院校的教材外,也可作为成人高等学校、本科院校的二级职业技术学院的《高等数学》教材,还可供工程技术人员参考.

由于编者水平有限,加之时间仓促,错误和疏漏之处在所难免,恳请使用者批评指正,以便再版时进一步修改.

编 者

2011 年夏

目 录

*预备知识

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象. 函数是同一自然现象或技术过程中变量依从关系的反映. 本章将初步介绍数、极坐标、行列式与线性方程组等相关知识,便于后续章节的学习.

§0.1　数的发展

数(shù) 起源于数(shǔ). 数学家把计数的数 1,2,3… 称之为自然数或正整数. 现代数学的一个极其重要的分支 —— 数论 —— 就是专门研究自然数的,而且一些有关自然数的基本问题,如与素数有关的哥德巴赫(Goldbach,1690—1764) 猜想等,至今仍未解决.

自然数“不够减”怎么办?作为自然数的对应物,负自然数或负整数便应需要而出现. 正自然数、负自然数和零,统称为整数.

整数“不够除”怎么办?于是形如$\frac{a}{b}$(a、b 是整数,$b \neq 0$) 的分数或有理数便应运而生. 将有理数化成小数时,只可能出现两种情形:一种是化为有限位的小数,如$\frac{3}{4} = 0.75$;另一种是化作无限循环小数,如$\frac{12}{7} = 1.714285714285\cdots$(简记作 $1.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}$). 反之,任何有限小数或无限循环小数均为有理数.

有理数是否够用了?我们知道,将有理数进行加、减、乘、除运算,其结果仍然是一个有理数. 但有理数开方是否还是有理数?比如,2 的平方根(记作$\sqrt{2}$) 就不是有理数,而是一个无限非循环小数,$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168 87\cdots$. 数学上,将无限不循环小数叫无理数. 除$\sqrt{2}$ 外,所有素数的平方根、圆周长与直径之比 π 等都是无理数.

有理数和无理数的全体称之为实数.

实数依然不够用. 例如,求(-1) 之类的负实数的平方根时,还需要突破实数领域,因为找不到任何实数,它的平方会等于(-1). 人们将 $\sqrt{-1}$ 记作 i,称为虚数单位. i 的 2 倍、3 倍 …… 分别记作$2i$、$3i$…. $3+4i$ 或一般的 $a+bi$(a、b 是实数) 这类数,称之为复数. “虚数”不虚,它在科学技术中有着广泛的应用,我们经常离不开它!

数的领域扩展到复数是否终止了?否! 事实上,不少新的数量概念不但已经产生,而且也在广泛应用. 自然界是不断发展的,人们对于物质世界的量的方面的认识也是不断发展、深化、永远没有完结的.

§0.2 极坐标

直角坐标系是最常见的一种坐标系,在直角坐标系下,我们能够用有序实数对(x,y)来确定平面内点的位置以及建立曲线方程,但它并不是平面上确定点的位置的惟一方法.例如,雷达在捕捉目标时,通常是定出目标的方位,即方向和距离,这种利用方向和距离来确定平面内点的位置的坐标就是极坐标系.

在平面上取一定点O,称之为极点;过O点沿某一确定方向作一射线Ox,称之为极轴.平面上任一点P的位置可用它到极点的距离r(一般是非负的)和以极轴Ox为始边,OP为终边所形成的角θ(逆时针转为正,顺时针转为负)来确定(图0.1),数对(r,θ)完全确定了P点的位置,称为P点的极坐标,记作$P(r,\theta)$.

当$r=0$时,不论θ取什么值,$(0,\theta)$都表示极点,当$\theta=0$时,不论r取什么正值,这时点$P(r,0)$都在极轴上.

由于实际应用的需要,极径r和θ也可以取负值.

当$r>0$时,规定在角θ的终边上取点P,使$|OP|=r$,如图0.2(a)所示;当$r<0$时,则在角θ的终边的反向延长线上取点P,使$|OP|=|r|$,如图0.2(b)所示.当$\theta>0$时,极轴按逆时针方向旋转;当$\theta<0$时,极轴按顺时针方向旋转.

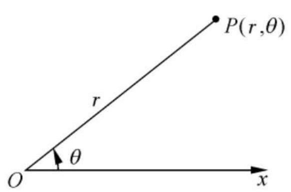


图0.1

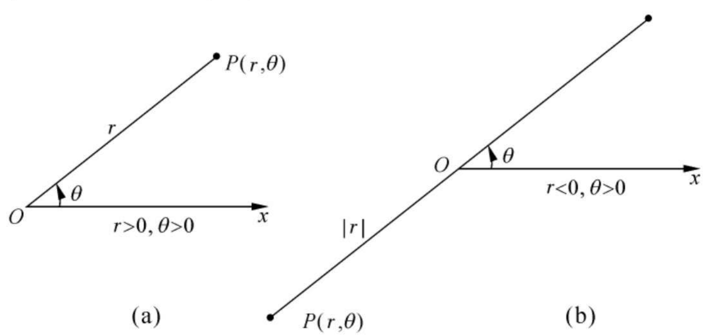


图0.2

按照上述规定,对于任意一对有序实数(r,θ),在平面上只能确定惟一的一个点$P(r,\theta)$;但反过来,平面内一个点的极坐标,可以有无穷多种表示法,如果(r,θ)是一点的极坐标,那么,$(r,2k\pi+\theta)$,$(-r,(2k+1)\pi+\theta)$ $(k\in\mathbb{Z})$,都可以作为它的极坐标,这种点与坐标之间的非一一对应关系是极坐标不同于直角坐标的地方.

然而,如果限定了$r\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi$,则除极点外,平面上的点就和极坐标一一对应了.

同一点的极坐标(r,θ)与直角坐标(x,y)(图0.3)的转换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

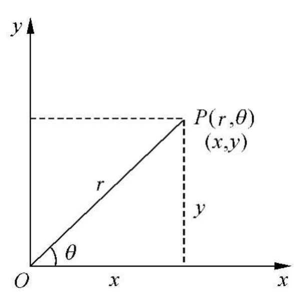


图0.3

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

在许多情况下，曲线的极坐标方程比直角坐标方程简洁. 如：圆心在极点、半径为 R 的圆的极坐标方程为 $r = R$；过极点、极角为 θ_0 的射线方程为 $\theta = \theta_0$.

例 1　将圆 $x^2 + y^2 - 2ax = 0(a > 0)$ 化为极坐标方程.

解　把 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入方程，得

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ar\cos\theta = 0,$$

$$r(r - 2a\cos\theta) = 0,$$

$$r = 0 \text{ 或 } r - 2a\cos\alpha = 0.$$

由于方程 $r = 0$ 表示极点点圆，与题设 $a > 0$ 矛盾应舍去，故所求圆的极坐标方程为

$$r = 2a\cos\theta \qquad (a > 0)（图 0.4）.$$

例 2　描绘方程 $r = 2 + 2\sin\theta$ 的图像.

解　按数据表：

表 0 - 1

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = 2 + 2\sin\theta$	2	3	3.732	4	3.732	3	2	1	0.268	0	0.268	1	2

描出图 0.5 所示曲线. 此曲线酷似心脏，因而命名为心形线.

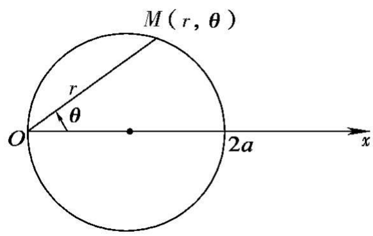


图 0.4

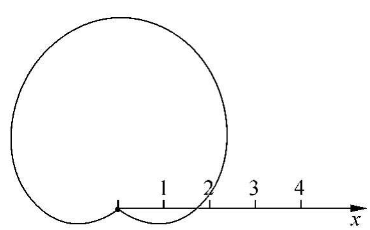


图 0.5

§0.3　行列式与线性方程组

求解线性方程组的基本方法是消元法.

以二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

为例，先消去一个未知数，从两个二元一次方程组导出一个一元一次方程.

具体地说，为消去 y，将(1) 式乘以 b_2，减去(2) 式乘以 b_1，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

立即解出

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

然后将算出的 x 代入(1) 式或(2) 式,进而求出

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

为了更清楚地揭示解与系数的关系,我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

左边 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 叫二阶行列式,横排叫行,竖排叫列,a_1、b_1、a_2、b_2 叫做行列式的元素;右边代数式 $a_1 b_2 - a_2 b_1$ 的值称为二阶行列式的值,它等于左上与右下元素之积减去左下与右上元素之积,若记

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

则二元一次方程组的解可简写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}.$$

我们看到,未知数 x、y 都可写成两个行列式之商. 分母行列式是一样的,由 x、y 的系数顺序组成,称为系数行列式. 将 D 中 x 的系数 a_1、a_2 换成常数项 c_1、c_2,便得到 x 的分子行列式 D_x;将 D 中 y 的系数 b_1、b_2 换成常数项 c_1、c_2,就是 y 的分子行列式 D_y. 这样,二元一次方程组解的规律便十分清楚地显示出来了.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}.$$

解 方程组化为一般形式:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

因为,$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7, D_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10$

所以,方程组的解为:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{7}{2}, y = \frac{D_y}{D} = 5.$$

三元线性方程组的一般形式为

$$(\text{I}) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

与二元线性方程组类似,用消元法可求出解的公式为

$$
(\text{Ⅱ})\begin{cases}
x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}\\
x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_1a_{23}a_{31}+a_{13}b_3a_{21}-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}\\
x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{32}a_{21}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}a_{32}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}
\end{cases}
$$

其中分母 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\neq 0.$

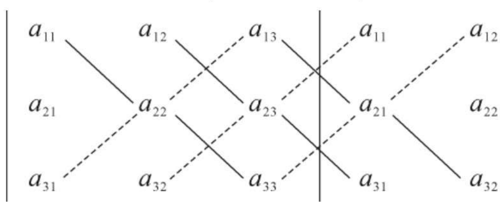
（Ⅱ）式比较复杂，为了便于记忆与讨论，仿照二阶行列式，用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$，

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

上式的左边叫做三阶行列式，右边叫做这个三阶行列式的展开式.

显然，三阶行列式有三行和三列，共 3^2 个元素，其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 是三阶行列式第 i 行第 j 列的元素，三阶行列式的展开式有 3! 项.

三阶行列式的展开可按如下方法展开(如下图所示)：



实线上三数之积取正号，虚线上三数之积取负号，然后相加就是行列式的展开式，这种展开法则叫做对角线法则.

例 2　计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}$ 的值.

解
$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}=(-2)\times 0\times 5+(-1)\times(-2)\times 2+3\times 4\times 1-3\times 0\times 2-(-1)\times 1\times 5-(-2)\times 4\times(-2)=5.$$

与二阶行列式相似，引入记号 D、D_1、D_2、D_3，其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(Ⅰ)中未知数的系数按原来的顺序排列而成,叫做方程组的系数行列式,行列式 D_1、D_2、D_3 是以 b_1、b_2、b_3 分别替换行列式 D 中的第一列、第二列、第三列的元素所得到. 因此,当 $D \neq 0$ 时,方程组(Ⅰ)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3y - z = -3. \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 40,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -3 & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 40, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 80,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -40.$$

于是 $x = \frac{D_1}{D} = 1, y = \frac{D_2}{D} = 2, z = \frac{D_3}{D} = -1.$

第一章 函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象. 函数是同一自然现象或技术过程中变量依从关系的反映. 极限方法则是研究变量的一种基本方法,是微积分学的重要工具. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

§1.1 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.

例如,在自由落体运动中,假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么下落时间 t 与下落的距离 s 之间的相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定,其中 g 是重力加速度,假定物体着地的时刻为 T,那么变量 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 s 这个变量的相应数值.

上例中变量 t 与 s 之间的这种依从关系就是我们将要讨论的函数.

定义 1 设有两个变量 x 和 y,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照某一对应法则 f,都有惟一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域. 当 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的集合叫做函数的值域.

函数可以用解析式(公式)、图形或表格表示. 今后,如无特别说明我们讨论的函数皆指用解析式表示的函数.

在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定函数的定义域. 如上例中函数的定义域就是 $D=[0,T]$. 当只给函数的解析式而没有实际背景时,其定义域就是指使解析式有意义的自变量能取的一切实数值构成的集合.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须

$$4-x^2\neq 0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0$$

即 $x \neq \pm 2$ 且 $x \geqslant -2$. 因此,该函数的定义域为$(-2,2) \cup (2,+\infty)$.

两个函数当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才被认为是相同的.例如,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$,由于它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.

定义域和对应法则是确定函数的两个要素.

需要强调的是求函数值的关键在于弄清对应法则. 对于一个已知函数必须会找它的对应法则. 如函数 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的对应法则为

$$f(\quad)=\frac{e^{(\quad)}+e^{-(\quad)}}{e^{(\quad)}-e^{-(\quad)}}.$$

2. **分段函数**

分段函数是指在自变量的不同取值范围内,用不同的表达式表示的函数. 应特别注意,用几个表达式表示的分段函数是一个函数,而不是几个函数. 求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应的表达式中去计算.

例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \\ 0, & \text{当 } x=0 \\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

及取整函数 $y=[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,都是分段函数.

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$,求 $f(4)$ 和 $f(-3)$.

解 当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$,所以 $f(4)=\sqrt{4}=2$,
当 $x<0$ 时,$f(x)=-x$,所以 $f(-3)=-(-3)=3$.

二、函数的几种特性

1. **有界性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $I \subset D$,如果存在一个正数 M,对于 I 内的任一 x 总有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在数集 I 上有界.

如 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,而 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,但在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$内有界.

2. **单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间. 若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称单调减区间.

3. **奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x \in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$

为偶函数;若都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. **周期性**

函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x+T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立.则称 $f(x)$ 为周期函数.通常说的函数的周期是指它的最小正周期.

注意　常值函数无最小正周期.

三、反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,如果对于 W 中的任一 y,由 $y=f(x)$ 能解出惟一的 $x(x=\varphi(y))$,这时 y 成了自变量,而 x 成了因变量,我们称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,$f(x)$ 称为直接函数.它们两者的图像显然是重合的.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示.因此常常把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$,称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.这时它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

1. **基本初等函数**

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数皆称为基本初等函数.它们的定义域、值域、图像和特性如基本初等函数表(表中没有列出正割和余割函数,它们的图像参见附录二)所示.

2. **复合函数**

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的一部分取值时,所对应的 u 的值使 $y=f(u)$ 有定义,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数,称 u 为中间变量.

注意　不是任何两个函数都可以构成一个复合函数,例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不可能复合成一个复合函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域内的任何 x 值所对应的 u 值都使 $y=\arcsin u$ 没有意义.

对于一个给定的复合函数,必须会分析清楚它的复合过程(即会将复合函数进行分解).掌握这种分析复合过程的方法,对将来求函数的导数和积分会带来很多方便.

例 3　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$　　(2) $y=\cos^2 x$　　(3) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$

解　(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt[4]{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成.

(2) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成.

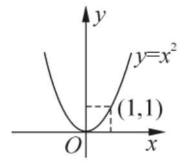
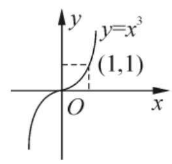
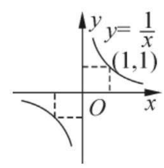
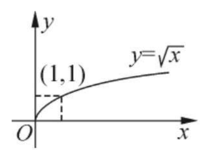
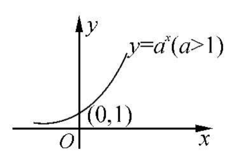
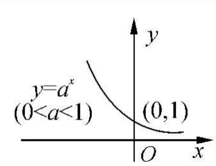
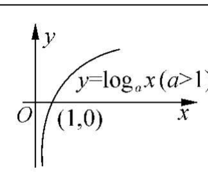
(3) $y=e^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=e^u$,$u=\arctan v$ 和 $v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成.

3. **初等函数**

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的并能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

例如,$y=\cos(x^2+2x+3)$ 和 $t=\sqrt{\lg(x^2+1)}+e^{\sqrt{x}}$ 都是初等函数.

基本初等函数表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
幂函数 $y=x^{\alpha}$	$y=x^2$	R	$y\geqslant 0$	偶函数 $x>0$,递增 $x<0$,递减	
	$y=x^3$	R	R	奇函数 单调递增	
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	$y\neq 0$	奇函数 在区间 $(-\infty,0)$ 和$(0,+\infty)$ 分别单调递减	
	$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$	$a>1$	R	R^+	单调递增 过(0,1)	
	$0<a<1$	R	R^+	单调递减 过(0,1)	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$a>1$	R^+	R	单调递增 过(1,0)	
	$0<a<1$	R^+	R	单调递减 过(1,0)