目　　录

上　　集

目　　录

下　　集

第六章　各种泛函级数.依赖于参变量的积分、无穷乘积

§1. 泛函级数

在习题 683——692 里求出给定级数的收敛域.

683. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right)$.

684. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$.

685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$.

686. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{z\ln n}$.

687. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$.

688. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$.

689. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$.

690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$.

691. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

692. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4+z)(4+z^2)\cdots(4+z^n)}$.

693*. 证明，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ 处处收敛，其中 $|z|\neq 1$；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛圆里收敛，并且在这个圆外发散.

694. 1) 按 z 的幂展开级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$；并求出这个幂级数的收敛半径.

2) 证明，当 $|z|<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\frac{z^n}{1-z^n}=\frac{z}{(1-z)^2},$$

其中 $\varphi(n)$ 为比 n 小且与 n 互质的自然数.

提示 利用在数论里已知的对应关系 $\sum\varphi(n)=m$，其中 n 取遍数 m 的一切因数，包括 1 和 m.

695. 在 $z=2$ 的邻域里，将函数 $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-z}\ln n$ (Дзема——Риман 函数) 展开成劳级数，并求出其收敛半径.

在习题 696——699 里求出给定级数的和.

696. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^{n}}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right)$ $\qquad(|z|\neq 1)$.

697. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{(1-z^{n})(1-z^{n+1})}$ $\qquad(|z|\neq 1)$.

提示. 用 $(1-z)$ 乘在分子和分母上.

698. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^{n}}}{\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^{k}})}$ $\qquad$ 699. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^{n}}-1}$.

在集合E上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_k(z)$称为一致收敛的，如果不论怎样的$\varepsilon>0$，能够有这样的数$N(\varepsilon)$，对于一切$n>N(\varepsilon)$，和对于集合$E$中的一切点$z$，使得不等式$\left|\sum_{k=n}^{\infty}f_k(x)\right|<\varepsilon$成立.

700. 证明命题：

1) 对于在集E合上一致收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的必要和充分条件是对任意的$\varepsilon>0$，存在数$N=N(\varepsilon)$，对于一切$n>N$，一切$z\in E$，和任意的自然数$P$，不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\varepsilon$$

成立.

2) 在集合E上级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$一致收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在集合$E$上也一致收敛.

701. 求出使得给定序列一致收敛的集合

1) $\left\{\frac{1}{1+z^{n}}\right\}$; $\qquad$ 2) $\left\{\frac{1}{1+z^{2n}}\right\}$; $\qquad$ 3) $\left\{\frac{\sin nz}{n}\right\}$.

702. **证明**，对于连续函数列$\{f_n(z)\}$在有界闭集合E上一致收敛的必要和充分条件是，对集合E里的一切点收敛且在集合内所有极限点上连续. 即对于集合E里的每一个收敛到z_0的点列z_n，则有$\lim_{n\to\infty}f_n(z_n)=f(z_0)$

在习题 703——707 里求出使得给定级数一致收敛的集合.

703. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n}}\left(z^{n}+\frac{1}{z^{n}}\right)$ $\qquad$ 704. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nz}$.

705. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-z\ln n}$. $\qquad$ 706. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^{2}}$.

707. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$.

708. 证明，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^2}$在闭圆$|z|\leqslant 1$上一致收敛，其逐项微分所得的级数在圆$|z|<1$内是否一致收敛？

709. 证明．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^{n-1}}{z+n}$在平面上抠去以点$z=0$，$-1$，$-2$，……，为中心，以尽可能小的$\rho$为半径的圆的任意有限部分内一致收敛．

证明 这个级数不论在那一个点都不绝对收敛．

710. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n}$在区间（$-1$，$0$）内一致收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right|$在这个区间内收敛，但不一致收敛．（这样一来级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$在区间（$-1$，$0$）内不存在优于它的收敛的数值级数）

附注 实例指明一致收敛的充分条件准则不是必要的．

711. 1) 级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$，当$|z|\geqslant 0$，$|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{4}$时，绝对收敛．（这些$z$值没有取尽使之绝对收敛的区域，容易看出其绝对收敛域由点$z=0$和双紐线$|1+z^2|=1$的外部组成）证明级数在指出区域内不一致收敛．

附注 这指明了级数在闭区域上绝对收敛不能推出一致收敛．

2) 证明，在这个区域上级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z}{(1+z^2)^n}$一致收敛和绝对收敛．但不绝对一致收敛（即由级数的各项的绝对值项的级数不一致收敛）．

712. 证明，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$在区域$G$内的任何闭区域上一致收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$也具有这个性质．

§2. 迪里赫勒级数[1]

级数形如$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}$的，其中$a_n$是一复系数和$\lambda_n$是非负实数，满足条件

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$$

称为迪里赫勒级数．

713. 证明，如果迪里赫勒级数在点$z_0=x_0+iy_0$收敛，则它在半平面$Rez>Rez_0$内一切点收敛，并且在每一个角$|\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$内一致收敛．

提示，应用Абеля变换

1) 关于这个问题参看[Ⅰ，гл，Ⅳ，§1]。

$$\sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z_0} \quad e^{-\lambda_n (z-z_0)}$$

和利用不等式（$a<b$，$z=x+iy$）

$$|e^{-az}-e^{-bz}| = \left|z\int_a^b e^{-zt}\,dt\right| \leqslant \frac{|z|}{x}(e^{-ax}-e^{-bx}).$$

714．证明，如果迪赫勒级数在点 $z=z_0$ 绝对收敛，则它在半平面 $Rez\geqslant Rez_0$ 上绝对且一致收敛．

在习题 713 和 714 叙述的定理里，迪里赫勒级数收敛区域（如果存在）是半平面 $Rez>x_c$（$x_c\geqslant-\infty$），而且绝对收敛区域（如果存在）是半平面 $Rez>x_a$（$x_a\geqslant-\infty$）其中级数或者在直线 $Rez=x_a$ 一切点上绝对收敛，或者在这直线任何一点上不绝对收敛．数 x_c 和 x_a 称为迪里赫勒级数的收敛横坐标和绝对收敛的横坐标．

在习题 715——721 里，求出给定级数的收敛横坐标．

715．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n^3} e^{-zn^2}$．

716．$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-z\ln\ln n}$．

717．$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-z\ln\ln n}$．

718．$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln\ln n}$．

719．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln n}$．

720．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-z\ln n}$．

721．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{e^n} e^{-zn^2}$．

722．证明，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0$，则

$$x_c = x_a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}.$$

723．证明，如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \frac{\ln n}{\lambda_n}=l$，则 $x_a-x_c\leqslant l$．

在习题 724——728 里，讨论在收敛半平面边界上迪里赫勒级数的收敛性．

724．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln n}$．

725．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-z\ln n}$．

726．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-zn}$．

727．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-zn}$．

728．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(\sqrt{n})}}{n} e^{-zn}$．

提示．参看习题 479．

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ 其中 λ_n 是复数（$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$），称为广义的迪里赫勒级数．

729. 假设数 λ_n 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n n}{\lambda_n}=0 \quad 和 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{l_n|a_n|}{|\lambda_n|}=k<\infty.$$

证明，如果 $\alpha\leqslant\arg\lambda_n\leqslant\beta$，则广义的迪里赫勒级数在当 φ 属于〔α, β〕，存在不等式

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k>0$$

时的一切点 $z=x+iy$ 上绝对收敛，在当 φ 属于〔α，β〕存在不等式 $x\cos\varphi-y\sin\varphi-k<0$ 时的点 $z=x+iy$ 上发散.

730. 任给广义迪里赫勒级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n n^z}$ 令 $k(\varphi,\ \alpha)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{l_n|a_n|}{|\lambda_{n_k}|}$ 和 $k(\varphi)=\lim_{n\to\infty}k(\varphi,\ \alpha)$，其中 $\{n_k\}$ —是对于所有下标满足 $\varphi-\alpha\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\varphi+\alpha$ 的序列（如果不存在这样的子序列 $\{a_m\}$，$\lim_{n\to\infty}\arg\lambda_{n_m}=\varphi$，则假定 $k(\varphi)=-\infty$）.

证明，如果 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{l_n n}{\lambda_n}=0$，则级数在区域 G 内的点 $z=x+iy$ 对任意的 φ，满足 $x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)>0$，上绝对收敛，和在区域 G 外发散.

§3. 依赖于参变量的积分

731. 证明定理：

设简单曲线 C（闭的或者非闭的）具有有限长度，设函数 $f(\tau\cdot z)$— 对于变量 z 解析，z 属于某个区域 D，对于变量 τ 连续，τ 属于曲线 C. 于是函数可表示成积分

$$F(z)=\int_C f(\tau\cdot z)d\tau.$$

对于 z 函数解析且有

$$F'(z)=\int_C f'(\tau\cdot z)d\tau.$$

如果积分 $\int_C f(\tau\cdot z)d\tau$ 是反常的即如果被积函数存在孤立的不连续点 $\tau\in C$ 或者积分曲线包括含有无穷远点的话，则定义积分收敛或一致收敛，完全类似数学分析教程里的相应的定义.

732. 证明，在集合 E 上沿曲线 C 的积分 $\int_C f(\tau\cdot z)d\tau$，（$C$ 上不包含 ∞ 点）一致收敛的必要和充分条件是对于任意的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta(\varepsilon)$，使得

$$\left|\int_{C_\sigma}f(\tau\cdot z)d\tau\right|<\varepsilon$$

对于一切属于集合 E 的点 z 和曲线 C 的任何弧 C_σ（C_σ 在点 τ_0 的 δ 邻域里且 τ_0 不在 C_σ 的内部和其端点上），成立.

733. 如果 $\tau_0 \neq \infty$ 叙述和证明积分一致收敛的类似准则研究曲线C在一个方向和两个方向无界的情形.

734. 证明，如果对于集合E的一切点z有 $|f(\tau, z)| \leqslant |\varphi(\tau)|$ 并且如果$\int_c |\varphi(\tau)| d\tau$ 收敛，则积分$\int_c f(\tau, z)d\tau$ 在集合E上一致收敛.

735. 设函数 $f(\tau, z)$对D内的z解析，对τ连续，τ属于围线C，函数 $f(\tau,z)$在C上的孤立点的全部或部分上连续性遭到破坏.

证明，如果反常的积分在区域D内一致收敛（即在区域D的任何闭子区域上），则函数 $F(z)$ 解析，且

$$F'(z) = \int_c \frac{\partial f}{\partial z} d\tau \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

并且积分（$*$）在D内部一致收敛.

在习题 736——743 里，求出使积分一致收敛的集合

736. $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (t^{z-1} = e^{(z-1)l_n t})$.

737. $\int_0^\infty e^{-tz} dt$.

738. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z} dt$.

739. $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^z} dt$.

740. $\int_0^\infty \frac{\sin tz}{t} dt$.

741. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t} dt \qquad (c \neq 0)$.

742. $\int_c^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t} dt \qquad (c \neq 0)$.

743. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^t}{t} dt \qquad (c \neq 0, \ z^t = e^{t l_n z})$.

积分形如

$$\int_0^\infty e^{-tz} f(x) dt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

其中函数 $f(t)$ 对任意的$a < \infty$，在区间〔0，a〕上可积，称为**拉普拉斯积分**.

744. 证明下面命题：

1) 如果积分（1）在点 $z=z_0$ 收敛，则它在半平面 $Rez > Rez_0$ 上收敛，并且在角 $|\arg(z-z_0)| \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ 上一致收敛.

2) 如果积分（1）当 $z=z_0$ 时绝对收敛，则它在半平面 $Rez \geqslant Rez_0$ 上绝对且一致收敛.

3) 如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{l_n|f(t)|}{t} = \beta$，则积分（1）在半平面 $Rez > \beta$ 上绝对收敛，并且在任何的半平面 $Rez \geqslant \beta + \varepsilon$ （$\varepsilon > 0$）上一致收敛.（对于 $\beta = \infty$ 拉普拉斯积分在全平面上绝对收敛）

4） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n|f(t)|}{t}=\alpha$，则积分（1）在半平面 $Rez<\alpha$ 任何一点上不绝对收敛．

在习题744的定理里，拉普拉斯积分的收敛域和绝对收敛域(如果存在这样的域)是半平面 $Rez>x_c$ 和 $Rez>x_a$；点 x_c 称为**拉普拉斯积分的收敛横坐标**，而点 x_a **称为拉普拉斯积分的绝对收敛坐标**

在习题745——751里，求出积分 $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ 其中 $f(t)$ 为给出函数的 x_c 和 x_a．

745. $f(t)=1$．　　746. $f(t)=e^{-t^2}$．

747. $f(t)=e^{t^2}$

748. $f(t)=e^{-t^2}$ 当 $0\leqslant t<l_nl_n z$ 和 $l_nl_n2k\leqslant t<l_nl_n(2k+1)$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$f(t)=-e^{-t^2}$ 当 $l_nl_n(2k+1)\leqslant t<l_nl_n(2k+2)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

749. $f(t)=e^{\frac{1}{2}e^t}$ 当 $0\leqslant t<l_nl_n3$ 和 $l_nl_n2k\leqslant t<l_nl_n(2k+1)$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$f(t)=-e^{\frac{1}{2}e^t}$ 当 $l_nl_n(2k+1)\leqslant t<l_nl_n(2k+2)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$．

750. $f(t)=e^{e^t}$ 当 $0\leqslant t<l_nl_n3$ 和 $l_nl_n2k\leqslant t<l_nl_n(2k+1)$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$f(t)=-e^{e^t}$ 当 $l_nl_n(2k+1)\leqslant t<l_nl_n(2k+2)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$．

751. $f(t)=e^t$ 当 $l_n(2k-1)\leqslant t<l_n2k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

$f(t)=-e^t$ 当 $l_n2k\leqslant t<l_n(2k+1)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

在习题752——755里讨论拉普拉斯积分 $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ 在收敛半平面边界上的收敛性．

752. $f(t)=1$．

753. $f(t)=0$ 当 $0\leqslant t\leqslant 1$，$f(t)=\dfrac{1}{t^2}$ 当 $t>1$．

754. $f(t)=0$ 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时

$f(t)=\dfrac{1}{t}$ 当 $t>1$ 时

755. $f(t)=0$ 当 $t=0$ 时

$f(t)=1$ 当 $0<t\leqslant 1$ 时，而当 $t>1$ 时，$f(t)$ 按下面形式定义：

若 $(2k-1)^2<t+1\leqslant(2k)^2$　$f(t+1)=f(t)+1$，

若 $(2k^2)<t+1\leqslant(2k+1)^2$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$　$f(t+1)=f(t)-1$．

§4. 无 穷 乘 积

在习题 756——762 里证明等式

756. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

757. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$.

758. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

759. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

760. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

761. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]=1$.

762. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^C$ 　其中$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-l_n n\right)$为尤拉常数.

763. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

提示. 先证明恒等式

$$\sin\varphi=2^k\sin\frac{\varphi}{2^k}\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

764. 利用习题 763 的解法去证明

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\ \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

765*. 证明瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\ \frac{2n}{2n+1}\right).$$

766. 证明 若 $-\pi<\arg p_n\leqslant\pi$，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}P_n$ 与级数 $\prod_{n=1}^{\infty}l_nP_n$ 同时收敛和发散.

767. 阐明上题的论断在下面条件下是否成立. 1) $0\leqslant\arg p_n<2\pi$; 2) $\alpha<\arg p_n\leqslant\alpha+2\pi$ $(\alpha<0)$.

768. 证明无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛(即级数$\sum_{n=1}^{\infty}l_n(1+a_n)$ 绝收敛的充分和必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

769. 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 收敛. 讨论下列乘积的收敛性：

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$;　　2) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n)$

3) $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$　　4) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$

在习题 770——774 里讨论给定乘积的收斂性和绝对收斂性.

770. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-)^{n+1}}{n}\right]$

771. $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

772. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$ $(p>0)$.

773. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ $(p>0)$.

774. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos z_n$，若已知级数 $\prod_{n=1}^{\infty}\left|z^n\right|^2$ 收斂.

775. 证明，在单位圆里

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z}$$

并且乘积绝对收斂.

在习题 776——784 里求出乘积的收斂域.

776. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$.

777. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{2^n}\right)$.

778. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

779. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}z^{-n}\right]$.

780. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n\right]$.

781. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{n}$.

782. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$

783. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

784. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z)$， 若已知级数 $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ 收斂.

785. 证明乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right]\qquad (n^z=e^{z\ln n})$$

在半平面 $Rez>\frac{1}{2}$ 上收斂和在半平面 $Rez>1$ 上绝对收斂.

786. $\{f_n(z)\}$ 为区域G内的解析函数序列（其中除有限个外），其值在G内不为零. 证明如果对于 $z\in G$，有 $|f_n(z)|\leqslant a_n$，a_n 与 z 无关，并且级数 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$收斂，则函数

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$$

在区域G内解析.

在习题 787——790 里阐明伽玛函数的某些性质，并由它定义无穷乘积的极限（参看〔1，Ⅶ章. §4〕或〔3，Ⅶ章. §1〕）.

787. 证明 乘积

$$\Gamma(z+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}\qquad\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}=e^{z\ln\frac{n+1}{n}}\right)$$

在平面上当 $z\neq-1$，-2，……绝对收敛并且函数 $\Gamma(z+1)$ 在 $z\neq-1$，-2，……的平面上解析.

788. 证明尤拉公式

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\qquad(n=e^{z\ln n})$$

并且有：1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$;

2) $\Gamma(m+1)=m!$ 若 m 为自然数.

789. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\qquad(\alpha,\ \beta\neq-1,\ -2,\ \cdots\cdots)$$

790. 证明 *Вейерштрасса* 公式

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

其中 C 为 Эйлерк 常数.

提示. 利用习题 762 解、

791.* 设 P_1，P_2，……，P_n……为质数序列（$P_1=2$，$P_2=3$，$P_3=5$，……），而 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ ($n^{-s}=e^{-s\ln n}$)为 Дзема Ричан 函数在半平面 $Rez>1$ 上解析（参看习题 705）证明

1) $\zeta(s)=\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-P_n^{-s})}$,

2) 函数 $\zeta(s)$ 在半平面 $Rez>1$ 上为零.

附注. 研究 Дзема 函数较多的文献；可参看例如 монографию：Е.К. Тимчмарш，Дзема 函数 Римана 定理. ИЛ，М. 1953.

792.* 证明 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P^{n}}$$

其中 $\{P_n\}$ 为质数序列发散.

第七章　残数及其应用

§1. 残数的计算

在习题793 ——813 里求出函数关于孤立奇点和无穷远点（若它们不是极限点）的残数.

793. $\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

794. $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

795. $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ （n 为自然数），

796. $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

797. $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

789. $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

799. $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

800. $\operatorname{tg} z$.

801. $\dfrac{1}{\sin z}$.

802. $\operatorname{ctg}^2 z$.

803. $\operatorname{ctg}^3 z$.

804. 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$;

2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

805. $e^{z+\frac{1}{z}}$.

806. $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$.

807. $\sin\dfrac{z}{z+1}$.

808. $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

809. $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$. （$h\neq 0$）.

810. $z^n\sin\dfrac{1}{z}$ （n 为整数）.

811. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$.

812. $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

813. $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ （n 为自然数）

在习题 814——821 里求出多值函数的每一个单值分枝关于指定点的残数.

814. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$　$z=1$.

815. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$　$z=1$.

816. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ $(z^a=e^{a\,l_n z})$ $z=1$.

817. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $z=\infty$. 818. 1) $L_n\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ $z=\infty$;

2) $e^z L_n\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ $z=\infty$. 819. 1) $L_n z\sin\dfrac{1}{z-1}$ $z=1$;

2) $L_n z\cos\dfrac{1}{z-1}$ $z=1$. 820. $\dfrac{A_{rc}\mathrm{tg}z}{z}$ $z=0$ 和 $z=\infty$.

821. $z^n L_n\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$（$n$为整数）$z=0$和$z=\infty$（当计算 $z=0$的残数时，假定 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$）.

822. 在无穷远点的邻域内函数展式为

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots\cdots$$

求出 $res[\{f(z)\}^2]_{z=\infty}$.

823. 求出 $res[\varphi(z)f(z)]_{z=a}$，假设$\varphi(z)$在点$a$解析，而$f(z)$在这点具有：1) 简单极点，留数为$A$；2) k阶级点，主要部分为$\dfrac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

824. 求出 $res\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$，假设：1) a为函数$f(z)$的n阶零点；2) a为函数$f(z)$ n阶极点.

825. 求出 $res\left[\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$，假设$\varphi(z)$在点$a$解析，且 1) a为函数$f(z)$的n阶零点；2) a为函数$f(z)$的n阶极点.

826. 求出 $res\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$，假设函数$\varphi(z)$在点$a$解析且$\varphi'(a)\neq 0$，而$f(\zeta)$在点$\zeta=\varphi(a)$具有一阶极点，留数为$A$.

827. 函数$\varphi(z)$在点a具有一阶极点，留数为A，而$f(\zeta)$在无穷远点具有一阶极点，主要部分为$B\zeta$. 求

$$res\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}.$$

828. 函数$f(z)$在圆周$|z-a|=R$弧l上取实值，按着对称原理通过弧可解析开拓，设点$z=\beta(\beta\neq a)$是函数$f(z)$的k阶极点，其重要部分为$\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}$，求 $res[f(z)]_{z=\beta^*}$，其中β^*点是β关于弧l的对称点.

§2. 积 分 的 计 算

在习题 829——837 里计算环绕闭曲线沿正方向的积分.

829. $\displaystyle\int_C\frac{zdz}{z^4+1}$，其中$C$为圆周 $x^2+y^2=2x$.

830. $\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$. 其中$C$为圆周$|z-2|=\frac{1}{2}$.

831. $\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$. 其中$C$为圆周$|z|=2$.

提示：利用所有奇点(包含无穷远点)的留数和等于零.

832. $\int_C \frac{z^3\,dt}{2z^4+1}$，其中$C$为圆周$|z|=1$.

833. $\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$，其中$C$为圆周$|z|=1$.

834. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}dz$，其中$C$为圆周$|z|=r$.

835. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}dz$. 其中$C$为圆周$|z|=r$.

836. $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{\frac{2}{z}}dz$，其中$n$为整数，$C$为圆周$|z|=r$.

837. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{zg(z)}$. 设$C$为包含点$z=0$的区域$G$的边界（简单曲线），函数$f(z)$在闭区域$G$上解析，函数$\frac{1}{g(z)}$在$C$上解析，而在$G$内只有简单极点$a_1, a_2, \cdots, a_n$（$a_k\neq 0$，$k$取任意值）.

在习题 838——841 里，计算积分.

838. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$，其中$C$为圆周$|z|=r\neq 1$.

839. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ $(\sqrt{1}=1)$，其中C为抛物线$y^2=x$，绕行方向为使y增加的方向.

840. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{a^z\sin\pi z}$ $(a^z=e^{z\ln a})$，其中$a>0$，C为线段$x=\alpha$，$0<\alpha<1$，方向为自下往上.

提示. 研究$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{a^z\sin\pi z}$，其中曲线$r$如图13所示，且当$\beta\to\infty$时的极限位置.

841. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z\,dz}{\cos z}$，其中$C$如图14所示.

如果函数$f(x)$在$x=c$ $(a<c<b)$上变成无穷，则称

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

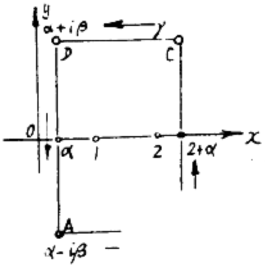

图 13

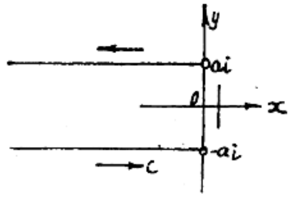

图 14

为哥西意义下的积分$\int_a^b f(x)dx$ 的主值.

将这个定义推广.

如果函数 $f(x)$ 在实轴上连续，那么积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$的主值定义为$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx$.

在习题 842——849 里如果积分反常或发散，求出积分的定义和求出它的主值（如果它存在）

842. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ （$a>1$）.

提示，假设 $e^{i\varphi}=z$.

843. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$ （$a>b>0$）.

844. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$ （$a>0$，$b>0$）.

845. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ （a为复数且$a\neq\pm 1$）.

846. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ （a为复数且$a\neq\pm 1$）.

847. $\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi$ （n为整数）

848. $\int_0^{\pi}\operatorname{tg}(x+ia)dx$ （a为实数）

849. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}(x+a)dx$ （a为复数且 $Ima\neq 0$）.

850. 证明 当 $b>a>-1$时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^a\varphi\cos b\varphi\, d\varphi=\frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}$$

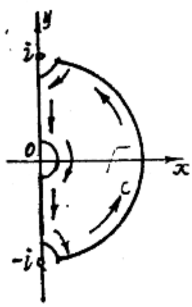

图 15