

209063

高速空气动力学及喷气技术丛书

卷 七

高速飞机部件空气动力学

上 册

A. F. 道諾文、H. R. 勞倫斯 編



國防工业出版社

下 册 目 次

第四部分(D) 高速螺旋桨

C. B. 斯密斯

D,1 引言	325
D,2 简单叶素理论	335
D,3 作用在叶素上的空气动力	340
D,4 整个螺旋桨的拉力、扭矩及效率	347
D,5 拉力及扭矩的无因次形式	349
D,6 最高效率的螺距分布	351
D,7 最有利螺距分布情况下的最大效率	356
D,8 相对于既定吸收功率的最有利螺距分布	358
D,9 理想螺旋桨	363
D,10 既定平面形状及既定厚度分布的螺旋桨的性能	367
D,11 平面形状、厚度分布以及飞行马氏数对螺旋桨性能的影响	368
D,12 实际应用上的问题	370
D,13 所引用的参考文献	371

第五部分(E) 扩压器及喷管

J. C. 爱伐得

第一章 扩压器及进气口	373
E,1 一元方程式	373
E,2 边界层分离的效应	382
E,3 超音速扩压过程	390
第二章 排气喷管及射流	628
E,4 用一元方程式来估计排气喷管的推力	628
E,5 飞机引射器	636
E,6 亚音速非压缩性射流的分布特性	639
E,7 超音速射流的分布特性	641

第四部分(D)

高速螺旋桨

C. B. 斯密斯

D, 1 引 言

在这里我們所想像的高速螺旋桨是一种简单的翼型式螺旋桨 (airfoil type propeller); 它具有适用于超音速的薄桨叶剖面。由于下面将会讨论到的原因, 当飞行马氏数超过 0.8 时, 这种螺旋桨的效率降低 (效率降低是必然的) 比较少; 这种螺旋桨适用于要求高推进效率的高速、远程以及一般用途的飞机。

在这种螺旋桨的空气动力设计及分析中, 包含着最简单的超音速理论之一。除了在超音速截面特性的应用方面, 在超音速飞行速度下没有入流 (inflow) 方面, 以及取消极限叶尖速度概念而利用最佳螺旋距角概念方面之外, 整个分析过程都是按照普通的螺旋桨长条理论进行的。

在下面的章节中将要论述这种螺旋桨的空气动力设计上的基本概念, 另外还列出了少数特殊情况的解答。

D, 2 简单叶素理论

考虑作用在图 D, 2a 中简单叶素 AA 上的力。不管这个截面的工作速度如何, 作用在叶素上的合力 dF 为

$$dF = \frac{dL}{\cos \varepsilon}; \quad (2-1)$$

式中

$$\varepsilon = \cot^{-1} \frac{L}{D}。 \quad (2-2)$$

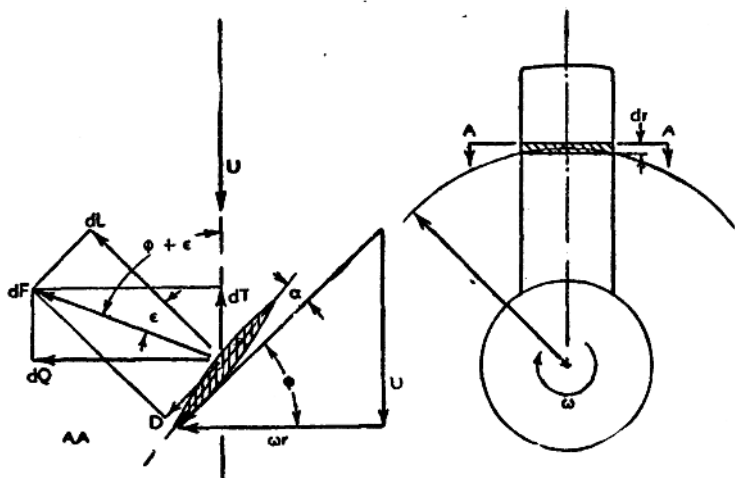


图 D, 2a. 作用在二元叶素上的空气动力的分解。

这合力在拉力方向的分量为

$$dT = dF \cos(\phi + \epsilon) = \frac{dL}{\cos \epsilon} \cos(\phi + \epsilon); \quad (2-3)$$

而其扭矩方向的分量为

$$dQ = dF \sin(\phi + \epsilon) = \frac{dL}{\cos \epsilon} \sin(\phi + \epsilon). \quad (2-4)$$

二元叶素的推进效率是

$$\eta_s = \frac{U}{\omega r} \frac{dT}{dQ} = \tan \phi \frac{dT}{dQ}. \quad (2-5)$$

在所有的亚音速飞行情况中，都存在着入流，但在这里却被略去了。

将 (2-3) 及 (2-4) 式代入 (2-5)，我们得出

$$\eta_s = \tan \phi \frac{\cos(\phi + \epsilon)}{\sin(\phi + \epsilon)} = \tan \phi \cot(\phi + \epsilon). \quad (2-6)$$

将余切项展开，并用 (2-2) 式代入 ϵ ，则得最终形式

$$\eta_s = \frac{L/D - \tan \phi}{L/D + \cot \phi}. \quad (2-7)$$

公式 (2-7) 是非常普遍的，可以应用于在亚音速及超音速速度下工作的叶素。它只取决于几何形状，并且只适用于假设没有入流的情况。

公式 (2-7) 指出, 叶素的效率决定于两个简单的量: (1) ϕ , 截面的有效螺距角; (2) L/D , 翼剖面的升力-阻力比值。在图 D, 2b 中对于一些具有代表性的 ϕ 及 L/D 值, 画出了由 (2-7) 式给出的二元叶素推进效率。在图 D, 3a 中列出了一些典型超音速截面的 L/D 值。

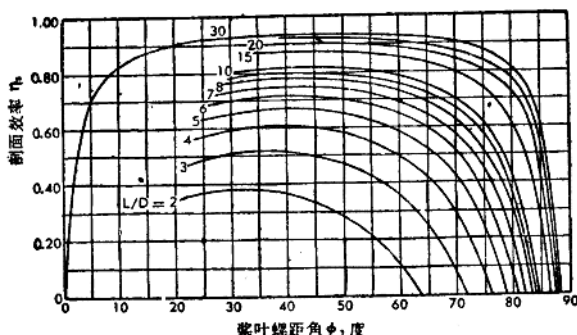


图 D, 2b. 对于不同的截面 (L/D) 值, 叶素效率随螺距角的变化。

将 (2-7) 式对 ϕ 微分, 得出

$$\frac{\partial \eta_a}{\partial \phi} = \frac{-(L/D + \tan \phi) \sec^2 \phi + (L/D - \tan \phi) \csc^2 \phi}{(L/D + \cot \phi)^2} \quad (2-8)$$

令此式等于零并化简后, 得到

$$\frac{L}{D} = \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} = \tan 2\phi, \quad (2-9)$$

对 ϕ 求解此式, 我们得出最有利螺距角

$$\phi_{\text{有利}} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{L}{D} = \frac{1}{2} \left(90^\circ - \cot^{-1} \frac{L}{D} \right),$$

$$\phi_{\text{有利}} = 45^\circ - \frac{1}{2} \cot^{-1} \frac{L}{D} = 45^\circ - \frac{\epsilon}{2} \quad (2-10)$$

将 (2-10) 式代入 (2-7) 式, 得出有利螺距角下的叶素效率如下:

$$(\eta_a)_{\text{max}} = \frac{\frac{1}{\epsilon} - \tan \left(45^\circ - \frac{\epsilon}{2} \right)}{\frac{1}{\epsilon} + \cot \left(45^\circ - \frac{\epsilon}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1 - (\epsilon/2)}{1 + (\epsilon/2)}}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{1 + (\epsilon/2)}{1 - (\epsilon/2)}} \quad (2-11)$$

化簡并略去 ϵ^2 級項后,

$$(\eta_s)_{\max} = \left[\frac{1 - (\epsilon/2)}{1 + (\epsilon/2)} \right]^2, \quad (2-11)$$

这个公式也可写成

$$(\eta_s)_{\max} = \left[\frac{2(L/D) - 1}{2(L/D) + 1} \right]^2. \quad (2-12)$$

公式 (2-7)、(2-10) 及 (2-12) 决定了叶素效率的一些重要特性。这些简单的关系式能够指示出高速螺旋桨設計的一般方向, 其原理如下。

普通低速翼型的 L/D 大約是 20 或者再高一些, 所以由图 D, 2b 看出, 当 ϕ 在 20~70 度的范围内时, 叶剖面效率約在 90% 左右。当流经翼型的气流速度增加时, 如果速度不超过翼型的临界馬氏数, 那么 L/D 仍然保持很高的数值, 而当超过临界馬氏数后, 最大 L/D 值迅速下降, 叶剖面效率也就减小了。采用后掠的桨叶可以延緩这个界限, 但不能消除它。过份的后掠在结构上是不切实际的。

在設計低速螺旋桨时, 通常应把叶剖面的速度限制在临界速度以下; 这样就可避免 L/D 的降低, 从而保证了高效率。但是假如叶剖面的合成速度被限制在其临界值以下, 則当飞行速度增加时, 螺距角 ϕ 必然愈变愈大見图 (D, 2c)。

当飞行馬氏数大約在 0.8 以下时, 因大螺距角而丧失的效率比因

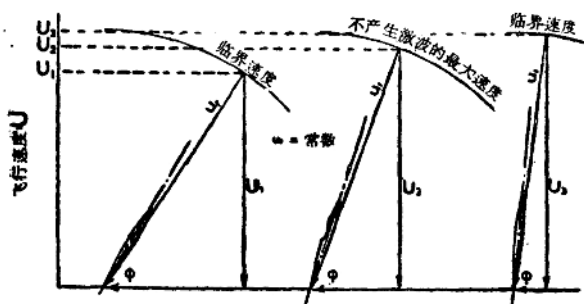


图 D, 2c. 对于不变的叶剖面速度, 螺距角随飞行速度的变化。

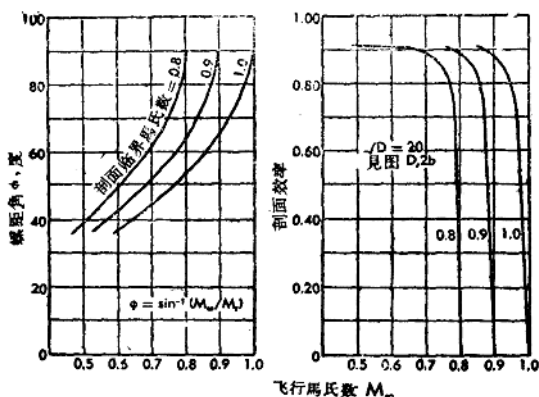


图 D, 2d. 对于不同的极限剖面速度, 螺距角随 M_∞ 的变化 (左)
对于不同的极限剖面速度, 叶素效率随 M_∞ 的变化 (右)。

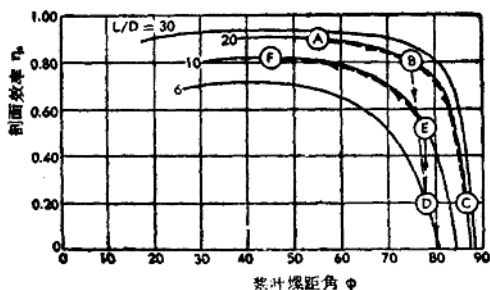


图 D, 2e. 从亚音速螺旋桨过渡到超音速螺旋桨。区域 A 表示一个普通低速螺旋桨的代表性剖面工作情况。这个剖面大约在 B 处达其临界速度。假如剖面速度被用减小 rpm 的方法限制在临界值以内, 则进一步增加飞行速度将会使普通的螺旋桨进入 C 区域 (或者 D 区域, 如果已经超过了临界速度的话)。减薄翼剖面会将效率提高到区域 E。进一步增加转速 rpm, 使螺距角达其最有价值, 则剖面效率进入区域 F。超音速螺旋桨就在这个区域中工作。

超过剖面临界速度而丧失的小。因此在設計飞行速度較低的螺旋桨时，为了得到最高的效率，叶剖面速度必須予以限制。

但当飞行馬氏数超过 0.8 以后，因过大的螺距角（为了限制剖面速度不至过大）而引起的效率損失也就变大了。例如，在图 D, 2d 中給出了几种剖面临界馬氏数下的 ϕ 对飞行馬氏数曲綫；另外在右边的图中，列出了对应的叶素效率（假定 L/D 等于 20）。这些結果說明，假如剖面速度被限制在普通桨剖面的临界速度以下，那么在高速飞行中，不可能得到良好的剖面效率。于是我們很清楚地看到，当飞行馬氏数超过 0.8 时，我們不能再采用极限叶尖速度的概念，而螺距角也应减小。这就是高速螺旋桨設計与低速螺旋桨之間的主要差別。

当我們决定了采用最有利 ϕ 的原則而不是限制剖面速度的原則之后，在螺旋桨的外形上就有了根本的改变。rpm[●] 增加到两倍，叶素的合成速度变为超音速，而吸收既定功率所必需的直徑大为减小。在图 D, 2a 中表示了当基本亚音速的螺旋桨过渡到基本超音速的螺旋桨时，其叶素效率 η 随螺距角 ϕ 的变化曲綫的变化。

D, 3 作用在叶素上的空气动力

为了根据公式 (2-3)、(2-4) 及 (2-7) 来計算叶素上的拉力負荷、扭矩負荷以及剖面效率，必須預先求出叶素上的空气动力。对于一个用在 0.9 飞行馬氏数或更高馬氏数上的翼型式螺旋桨，前几节曾經指出，它的叶素是在超音速下工作的。所以在大多数的場合下，我們均可应用小扰动理論的二元結果（部分 A 及卷六中之部分 C）。

按照綫性小扰动理論，二元剖面上的升力等于

$$C_L \cong C_N = \frac{4\alpha}{\beta}, \quad (3-1)$$

其中

α = 用弧度度量的攻角；

$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ ；

● rpm 是 revolutions per minute 的縮写，即每分钟轉數——譯者。

M_r = 剖面合成馬氏数。

根据这简单理論的假設，(3-1) 式所給出的升力与叶剖面形状无关。

小扰动理論所給出的阻力为

$$C_D = C_L \alpha + \frac{K(t/c)^2}{\beta} + \frac{K(\bar{a}/c)^2}{\beta} + C_{Df}, \quad (3-2)$$

式中

K = 翼剖面形状常数，对于对称的双楔形剖面， $K = 4$ ；对于双凸形剖面， $K = 16/3$ ；

t/c = 剖面的相对厚度；

c = 翼剖面弦长；

$\bar{a}$ = 翼剖面中心的最大弯度；

C_{Df} = 表面摩擦阻力系数。

因为弯度并不会提供什么好处，所以在一般的情况下，(3-2) 式中的第三項等于零。

因此，(2-3)、(2-4) 及 (2-7) 中的升阻比为

$$\frac{L}{D} = \frac{4\alpha/\beta}{(4\alpha^2/\beta) + (K(t/c)^2/\beta) + C_{Df}} = \frac{4\alpha}{4\alpha^2 + K(t/c)^2 + \beta C_{Df}}. \quad (3-3)$$

将 (3-3) 式对 α 微分，并使之等于零，我們得出 $(L/D)_{\max}$ 时的攻角为

$$\alpha_{(L/D) \max} = \frac{1}{2} \sqrt{K(t/c)^2 + \beta C_{Df}}. \quad (3-4)$$

将 (3-4) 式代入 (3-3)，并化簡之：

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{K(t/c)^2 + \beta C_{Df}}}, \quad (3-5)$$

这就是用剖面相对厚度及表面摩擦系数表示的最大升阻比。这个表达式也可以写成

$$(L/D)_{\max} = \frac{1}{2\alpha_{(L/D) \max}} \quad (3-6)$$

或者，

$$\alpha_{(L/D) \max} = \frac{1}{2} \frac{1}{(L/D)_{\max}} = \frac{\epsilon_{\min}}{2}. \quad (3-7)$$

对于邻近叶尖的区域，最有利剖面应能在既定的抗扭剛性上具有

最小的阻力；而对里面的剖面，应能在既定的抗弯刚性上具有最小的阻力。不管是对实心的或者是壳式的桨叶构造，双凸形剖面●几乎都能满足这两种条件。这种剖面的 $K = 16/3$ 。

图 D, 3a 对于一族不同相对厚度的双凸剖面，给出了由 (3-3) 至 (3-7) 式所得出的结果。因高度及剖面弦长所引起的效应是相对于表面摩擦阻力（层流的）的，并且属于次要的影响。

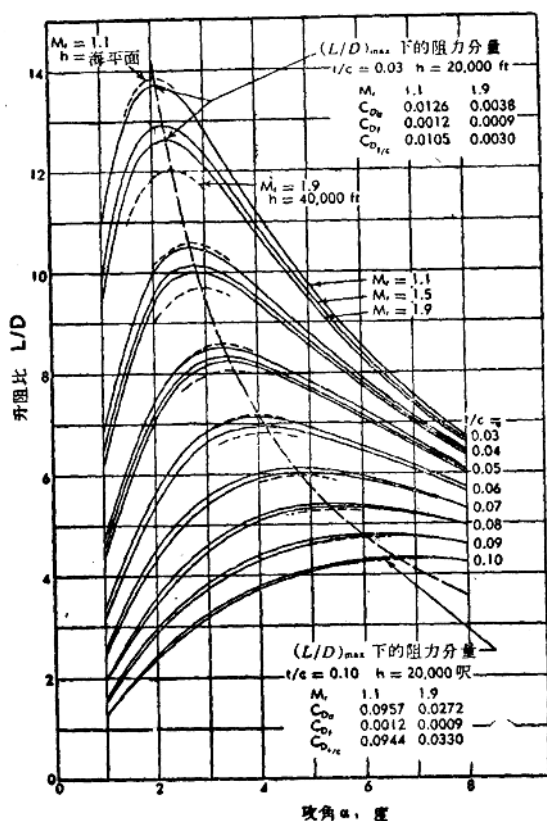
我们利用 (3-3) 式（如果可能的话也可用图 D, 3a）算出任意给定叶素的 L/D 值，代入 (2-7) 式后即得其推进效率。由此看出，采用薄翼型是非常必要的。

被自桨叶叶尖发出的马氏锥所切割的叶素并不具有二元特性。按线性理论所得出的这种剖面的平均升力及因升力而产生的阻力，大约是其二元值的 $3/4$ （见部分 A）；其平均波阻力（即因厚度而引起的阻力）等于二元波阻力。叶尖剖面升力的所谓叶尖修正因数见图 D, 3b。现在还没有对波阻力作出类似的逐个剖面的修正因数，但是因为这个平均值等于二元值，所以在一般的实用中，可以在所有的翼尖剖面上采用二元值。

图 C, 3c 表示长方形桨叶叶尖的平均升阻比。一般说来，叶尖效应会降低叶尖剖面的效率。但是对于薄剖面，这种效应很小，因为合成阻力中的一大部分是因升力的阻力方向分量 $C_L \alpha$ 而产生的（见公式 (3-12)），这个分量随升力而降低，因此升阻比 (3-13) 式并未受到翼尖多大的影响。将叶尖尖缩成一点，那么在理论上，就可消去这种叶尖损失了。

在将定常状态的小扰动理论应用于决定螺旋桨剖面特性的时候，必须注意某些限制。因为流经叶素的气流是定常的，所以我们可将座标轴固定于桨叶。但是如图 D, 3d 所示，沿着桨叶存在着速度梯度。因此严格地说来，相对于桨叶座标轴的气流并不是无旋的，也没有什么速度位。当将定常状态的小扰动理论应用于这种情况时，我们应在

● 由抛物线组成之对称剖面——俄校者。



图D, 3a. 二元双凸形剖面(弦长18吋)的 $(L/D)_\alpha$ ——线性理论。

普通的小扰动假设上再加上这样的假设： A 及 D 点上的自由主流速度相对于 u_∞ 的增量或减量，与 u_∞ 本身比较起来均可略去不计。

除了无旋性的问题以外，这里还有一种桨叶干扰效应，在某些情况下：这种效应会使小扰动理论结果部分地失效。现对这种效应的本质讨论如下。

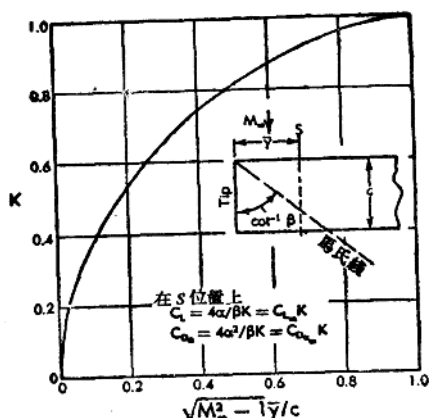


图 D, 3b. 叶尖剖面的升力修正因数——綫性理論。

$$M_\infty \geq 1.2; C_L = C_{L\infty} K.$$

当一二元叶素以超音速速度在空气中运动时，其扰动只限于桨叶上下表面的两縫状区域中；这两区域的边界大約就是合成气流的馬氏綫。如果螺旋桨桨叶位于相邻桨叶的扰动区域以外，則如图 D, 3e 所示，每个桨叶都在基本上是自由主流的条件下工作，沒有受到直接的干扰效应。但是假定有一个桨叶位于另一个桨叶的扰动区域之内，則就出現了直接干扰，而作用在叶素上的力也与孤立翼型理論所給出的不同了。这种情况示于图 D, 3f 中。这里，每个桨叶上位于前一个桨叶扰动区域中的部分，其攻角等于零，而翼型上的升力也按比例减小。很明显，当飞行馬氏数等于 1.0 时，这种形式的干扰达其最大值，而叶素上的升力会等于零。

对于有限长度的桨叶，应将上述縫状扰动区进行修改，并且这个区域将逐渐消散在自叶尖发出的馬氏錐中。通常，受到干扰影响的桨叶位于前一桨叶的叶尖馬氏錐中。这种情况以及馬氏数梯度对目前情况的重要性，使得求解干扰剖面特性及其气流扰动的問題变得非常复

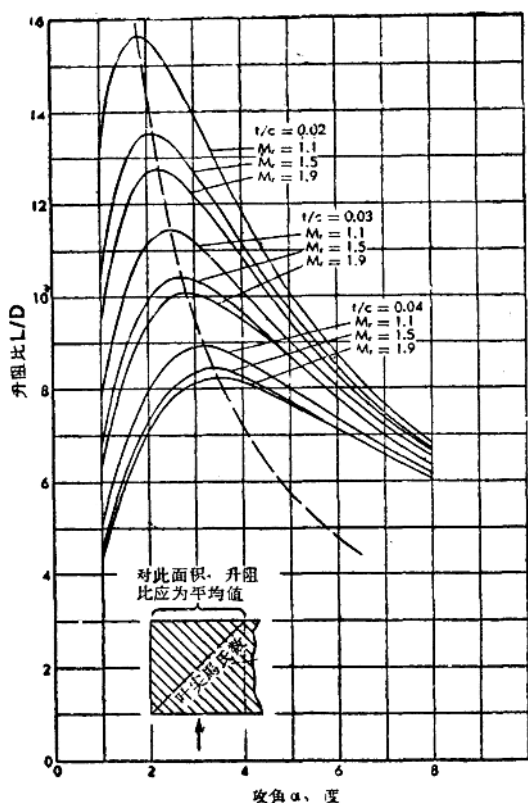


图 D, 3c. 长方形桨叶叶尖的升阻比。弦长 6 吋； $h = 20,000$ 呎。

杂，以至直到现在还未能予以解决。但当飞行马氏数大于 1 比较多或小于 1 时，这种困难就不存在了，因为我们可以采用限制螺旋桨实度 (solidity) 的方法来避免干扰现象。

总而言之，这里所采用的小扰动理论只限于在无激波干扰情况下的大展弦比桨叶。

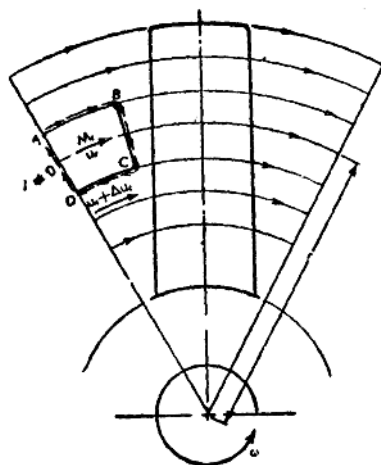


图 D, 3d. 因为沿着桨叶存在着速度梯的缘故, 所以相对于桨叶的气流实际上并不是无旋的。

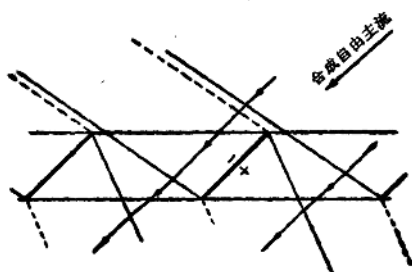


图 D, 3e. 在沒有干扰效应情况下工作着的螺旋桨叶栅。

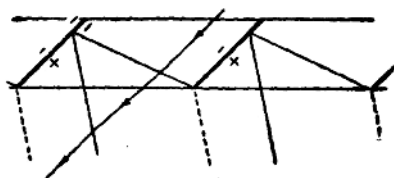


图 D, 3f. 在桨叶間存在着直接激波干扰的螺旋桨叶栅。

D, 4 整个螺旋桨的拉力、扭矩及效率

在翼型式螺旋桨上，我們將 (2-3) 及 (2-4) 式的剖面作用力积分，即得总的拉力、扭矩及效率：

$$\text{拉力} = T = B \int_H^R dT = B \int_H^R \frac{L}{\cos \varepsilon} \cos(\phi + \varepsilon) dr; \quad (4-1)$$

$$\text{扭矩} = Q = B \int_H^R r dQ = B \int_H^R \frac{rL}{\cos \varepsilon} \sin(\phi + \varepsilon) dr; \quad (4-2)$$

$$\text{效率} = \eta = \frac{\text{拉力} \times V}{\text{扭矩} \times \omega}, \quad (4-3)$$

式中 B = 桨叶数目。根据 (3-1)，得出

$$L = qC_L c = \frac{1}{2} \rho_{\infty} (U^2 + \omega^2 r^2) \frac{4\alpha}{\beta} c, \quad (4-4)$$

当代入 (4-1) 及 (4-2) 式后，得到

$$T = \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \frac{4\alpha}{\beta(r)} \frac{\cos(\phi + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} c dr; \quad (4-5)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \frac{4\alpha}{\beta(r)} \frac{\sin(\phi + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} c r dr, \quad (4-6)$$

式中 $\beta(r)$ 是在半径 r 上由 (3-1) 式所规定的 β 值， c 为对应剖面的弦长。现在不计入流，由图 D, 2a 得

$$\phi = \tan^{-1} \frac{U}{\omega r}, \quad (4-7)$$

再由 (2-2) 及 (3-3) 式得出

$$\varepsilon = \cot^{-1} \frac{L}{D} = \cot^{-1} \left[\frac{4\alpha}{4\alpha^2 + K(t/c)^2 + \beta C_{D_i}} \right]. \quad (4-8)$$

因此，最后得到

$$\begin{aligned} \text{拉力} \cong \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \frac{4\alpha}{\beta} \cos \left\{ \tan^{-1} \frac{U}{\omega r} \right. \\ \left. + \cot^{-1} \left[\frac{4\alpha}{4\alpha^2 + K(t/c)^2 + \beta C_{D_i}} \right] \right\} c dr; \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\text{扭矩} \cong \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \left[\frac{4\alpha}{\beta} \sin \left\{ \tan^{-1} \frac{U}{\omega r} \right. \right. \\ \left. \left. + \cot^{-1} \left[\frac{4\alpha}{4\alpha^2 + K(t/c)^2 + \beta C_{D_i}} \right] \right\} \right] c r dr. \quad (4-10)$$

在公式 (4-9) 及 (4-10) 中略去了入流, 并且假定可以应用小扰动理论的二元结果。在超音速的速度下, 螺旋桨上没有入流, 并且对于这种合成马氏数, 小扰动理论也属有效。因此, 公式 (4-9) 及 (4-10) 显然能够应用于这种情况。但是在亚音速的飞行速度下, 螺旋桨上存在着入流, 并且至少有一些剖面是以跨音速的速度工作着的。对于这种情况, (4-1) 及 (4-2) 式可以写成

$$\text{拉力} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right) \alpha \cos \left(\phi + \cot^{-1} \frac{L}{D} \right) c dr; \quad (4-11)$$

$$\text{扭矩} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} B \int_H^R (U^2 + \omega^2 r^2) \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right) \alpha \sin \left(\phi + \cot^{-1} \frac{L}{D} \right) c r dr, \quad (4-12)$$

然后利用实验数据决定 $dC_L/d\alpha$ 及 L/D 值, 再进行图解积分。

很明显, 在亚音速的飞行速度下, ϕ 也应该包括着入流, 但这入流的大小如何, 现在还搞不清楚。在普通的低速螺旋桨上, 沿着桨叶的附着涡以及自叶尖及其他剖面伸出的尾涡, 在螺旋桨后面产生旋转及轴向的滑流速度; 在螺旋桨前面只产生轴向的入流[●], 因为这些旋涡的旋转分量互相抵消了。高尔德斯坦[1]及西奥图生[2]利用电模拟对大量实际情况计算出了这种诱导速度的实际大小。对于大多数剖面都在超音速速度下工作的高速螺旋桨, 叶尖旋涡的影响只限于沿螺旋线的叶尖马氏锥内, 而二元叶素的影响只限于图 D, 3e 所示的缝状区域。在超音速飞行速度下, 这两个区域都不会伸展到螺旋桨前面, 所以这里不存在诱起入流的机构。但在亚音速的飞行速度下, 叶尖马氏锥及二元扰动区域都伸展到螺旋桨平面的前面。在前面很远的地方, 这

● 严格地说来, 在螺旋桨前后方还有径向速度——译者。

些区域完全混杂起来了，我們可以认为这种情况与具有相同涡量分布的亚音速螺旋桨相似（在处理超音速机翼后面的下洗场时，我們也是这样认为的）。但在螺旋桨的紧前面，这种情况就不相似于亚音速螺旋桨了。在这些区域中，我們应按第3节中的激波干扰条件来决定入流。一般說来，当馬氏数接近1.0时，激波干扰对入流的效应也就愈来愈大。

当不存在直接的激波干扰时：在接近最高效率的功率值上，入流是很小的，并且在螺旋桨性能的初步計算中，可把入流略去不計。

在下面的内容中，我們只考虑沒有入流的超音速飞行情况，虽然在实用上，这些結果也适用于高亚音速情况。

D, 5 拉力及扭矩的无因次形式

为了解拉力及扭矩，我們应将(4-5)及(4-6)式中的积分化为无因次形式，并将它們变换得更紧凑些。这样，我們引入

$$r = \frac{r}{R} = 2 - \frac{r}{D} \quad (5-1)$$

以及

$$J = \frac{U}{\omega D} = \pi \frac{U}{\omega R} = \pi \tan \phi_{叶尖} \quad (5-2)$$

因而，式中主要項化为：

$$U^2 + \omega^2 r^2 = U^2 + \pi^2 n^2 \tau^2 D^2 = U^2 + \pi^2 \tau^2 \frac{U^2}{J^2} = \frac{\pi^2 U^2}{J^2} \left[\frac{J^2}{\pi^2} + \tau^2 \right]; \quad (5-3)$$

$$\beta(r) = \sqrt{M_\tau^2 - 1} = \sqrt{\frac{U^2 + \omega^2 r^2}{a_\infty^2} - 1} = \sqrt{M_\infty^2 - 1 + \frac{\omega^2 r^2}{a_\infty^2}},$$

$$\begin{aligned} \beta(r) &= \sqrt{M_\infty^2 - 1 + \frac{\pi^2 n^2 \tau^2 D^2}{U^2}} = \sqrt{M_\infty^2 - 1 + \frac{\pi^2 M_\infty^2}{J^2} \tau^2} \\ &= \frac{\pi M_\infty}{J} \sqrt{\frac{M_\infty^2 - 1}{M_\infty^2} \frac{J^2}{\pi^2} + \tau^2}; \end{aligned} \quad (5-4)$$