

大學叢書

高等統計學

上 冊

陳超塵 編著

臺灣商務印書館 發行

大學叢書
高等統計學

上冊

陳超塵編著

臺灣商務印書館發行

08
7440

序

著者過去曾經編寫過一本高等統計學的教本，名為《統計學原理》，多年來頗受讀者歡迎，廣為流傳。然而該書出版迄今已逾二十七年，無論在內涵及編寫方式上均稍嫌陳舊，不足以應付當前的需要。於是乃於年前摒擋一切，多方參考，重新編寫一本同一水準的教科書，以取代舊作。由於此書在編寫方式上與過去有很大的不同，可說是一本新書，為與舊作有所區別，乃更名為《高等統計學》，以嶄新的面孔問世。

新作中除去對有關理論加以更新及充實外，最大的特點是將著者過去四十年的教書經驗全部納入此新作之中，以協助讀者融會貫通。書中每一個論點除去以數學論證外，復用文字推理說明其所以然，其目的在使讀者對每一個論點皆有深入的瞭解。此外，在每章之末均有一個表列式的摘要，其目的在使各該章的內涵簡單化及系統化；不寧唯是，在有關章節中尚不斷有系統表及系統圖的插入，作進一步的系統化。最後，在全書之末還有一個總論，對統計學的全部內涵加以綜合歸納，得出若干控制整個體系的原則。整理知識的方法有兩個方向，其一是微觀的，即對每一個論點都要澈底的瞭解；另一是宏觀的，即設法將整個內涵的理論架構建立起來；有了微觀與宏觀的基礎以後，即能更進一步將控制整個體系的原則找出來；如此即能執簡馭繁、觸類旁通，蔚為大用。著者過去四十年即是以這種方式進行教學的，對每個論點不但說明其所以然，同時把這個論點的前因後果交代清楚，為系統

化預作準備。現在將這套方法用在本書之中，其目的在使讀者於學習統計學之餘，亦能同時掌握融會貫通的方法，一舉兩得，何樂不為。

雖然上面把本書的優點廣為介紹，但學海無涯，仍不敢有所自信，深盼海內高明不吝指正，以匡不逮是幸，謹序。

陳超塵

民國八十五年四月四日
於國立臺灣大學

高等統計學

總目次

上 冊

第一章 緒論	1
第壹篇 機率與機率分配	
第二章 機率論	17
第三章 間斷隨機變數	57
第四章 連續隨機變數的數學性質	93
第五章 期望數與動差	117
第六章 隨機變數的變換	161
第七章 主要一元連續分配	185
第八章 多元常態分配	215
第貳篇 抽樣與抽樣分配	
第九章 抽樣的一般性質	255
第十章 抽樣分配(一)	275
第十一章 抽樣分配(二)	315

下 冊

第叁篇 統計推論的基本原理與方法

第十二章	點推定	361
第十三章	區間推定	429
第十四章	統計假設的檢定(一)	483
第十五章	統計假設的檢定(二)	541

第肆篇 線性模型及其分析方法

第十六章	迴歸分析	589
第十七章	變異數分析	641

第伍篇 統計推論方法的擴展

第十八章	逐次分析法	695
第十九章	無參數統計方法	735

第陸篇 總 論

第二十章	總 論	785
機率分配數值表		827
索 引		839

高等統計學 (上冊)

目 次

第一章 緒論	1
一、科學研究與統計學	1
二、推論過程中所含的不確定性	2
三、測量不確定性的方法	3
四、控制不確定性的方法	4
五、決策與統計決策	7
六、統計學的意義與範圍	9
摘 要	12
問 題	14

第壹篇 機率與機率分配

第二章 機率論	17
一、機率的導出	17
二、事象的種類與運算	19
三、機率的問題與理論	22
四、機率的運算定理	27
五、樣本空間的分割與貝氏定律	36

六、隨機變數與機率分配	41
七、機率論的架構與功能	45
摘要	49
問題	52
第三章 間斷隨機變數	57
I. 間斷隨機變數的數學性質	57
一、一個間斷隨機變數的數學性質	57
二、兩個間斷隨機變數的數學性質	63
II. 主要間斷分配	71
一、二項分配	72
二、超幾何分配	74
三、波氏分配	76
四、多項分配	78
五、均等分配	81
六、負二項分配	82
七、主要間斷分配間的關係	83
摘要	85
問題	87
第四章 連續隨機變數的數學性質	93
一、一個連續隨機變數的數學性質	93
二、兩個連續隨機變數的數學性質	98
摘要	110
問題	111
第五章 期望數與動差	117
I. 期望數	117

一、期望數的意義與功能	117
二、一個隨機變數的期望數	118
三、兩個隨機變數的聯合期望數	121
II. 動差	125
一、一個隨機變數的動差	125
二、兩個隨機變數的聯合動差	130
III. 動差母函數	133
一、一個隨機變數的動差母函數	133
二、兩個隨機變數的聯合動差母函數	136
三、變數函數的動差母函數	139
四、特性函數	144
五、階乘動差母函數	148
IV. 條件期望數	149
一、條件期望數的意義與功能	149
二、兩個隨機變數的條件期望數	151
摘要	154
問題	157
第六章 隨機變數的變換	161
一、隨機變數變換的意義與方法	161
二、間斷隨機變數的變換	162
三、連續隨機變數的變換（一個變數）	164
四、連續隨機變數的變換（兩個變數）	171
摘要	181
問題	184
第七章 主要一元連續分配	185
一、均等分配	185

二、常態分配	189
三、甘馬分配	196
四、貝他分配	200
五、其他一元連續分配	204
六、完全性密度函數族	206
摘要	208
問題	212
第八章 多元常態分配	215
一、兩元常態分配	215
二、多元常態分配的一般式	226
三、例題	240
摘要	248
問題	249

第貳篇 抽樣與抽樣分配

第九章 抽樣的一般性質	255
一、基本概念	255
二、樣本均數的期望數	259
三、樣本均數的變異數	260
四、大數法則	262
五、中央極限定理	266
摘要	271
問題	272

第十章 抽樣分配(一)	275
I. 抽樣分配的意義與誘導方法.....	275
一、抽樣分配的意義與功能.....	275
二、抽樣分配的誘導方法.....	277
II. 常態母體小樣本的抽樣分配.....	280
一、常態變量線性組合的抽樣分配.....	280
二、卡方分配.....	284
三、 F 分配.....	296
四、 t 分配.....	303
五、四種主要抽樣分配間的關係.....	309
第十一章 抽樣分配(二)	315
III. 間斷母體小樣本的抽樣分配.....	315
一、點二項母體的抽樣分配.....	315
二、點多項母體的抽樣分配.....	320
三、波氏母體的抽樣分配.....	322
四、各種間斷母體抽樣分配間的關係.....	327
IV. 最概推定量的大樣本分配.....	329
一、最概推定量的意義.....	330
二、一個參數最概推定量的大樣本分配.....	330
三、多個參數最概推定量的大樣本分配.....	332
V. 常態母體順序統計量的抽樣分配.....	334
一、順序統計量的意義與分配.....	334
二、樣本全距的抽樣分配.....	335
三、 t 化全距的抽樣分配.....	339
VI. 抽樣分配的應用系統.....	341

摘 要.....	349
問 題.....	353

第一章 緒 論

一、科學研究與統計學

1. 科學研究的目的 科學研究最基本的目的是建立科學定律 (scientific law)，科學定律是一種現象有關因素之間的因果關係。科學定律的功能有二：其一是解釋現在，解釋現在的目的在認識環境以滿足人類的好奇心；另一是預測未來，預測未來的目的在控制環境以增進人類的福祉。尤其是預測未來是科學積極性的功能，欲使科學定律有此功能，則科學定律必須是全稱的 (universal)，亦即科學定律必須建立在事象的全體 (universe or population) 上，而非樣本 (sample) 上。

2. 科學定律建立的過程 其過程如下：

(1) 在科學體系 (scientific system) 上設定一個假設 (hypothesis)。

(2) 搜集資料以檢驗該假設是否成立。

(3) 若成立，即暫時接受而成為一個科學定律；否則即修改假設再經同樣過程檢驗之。

(4) 已成立的科學定律仍有被另一部分經驗事實推翻的可能，因賴以建立定律的資料常為全體中的一部分樣本也。

在此過程中，與統計學有關的是第二個步驟，即搜集資料以檢驗該假設是否成立，如此即產生下列三個問題：

(1) 如何由樣本推論全體以獲得一般性的結論。

(2) 什麼樣的樣本才能用以推論全體。

(3) 如何提高推論結果的可靠度 (reliability)。

近代統計學的任務主要就是解決這三個問題，茲分別說明如下。

二、推論過程中所含的不確定性

1. **不確定性的意義與由來** 所謂不確定情況(uncertainty)，即是人所不能控制的情況。不確定情況將使研究工作產生誤差，從而降低推論結果的可靠度。統計推論過程中所含的不確定性其來源有二：其一為抽樣的隨機性，另一為對研究對象的知識不足。茲分別說明如下：

2. **由抽樣隨機性而來的不確定性** 由於人力、物力及時間的限制，研究者不可能觀遍研究對象的全體，而只能就全體中抽取一部分樣本以為代表進行研究。然而前述科學定律必須建立在全體上，否則即失去一般性而不能預測未來，如此即產生一個問題即如何由樣本推論全體以獲得一般性結論的問題。為解決此問題，除去推論本身所使用的方法以外，最根本的問題即是樣本對全體是否具有代表性。如果樣本對全體不具代表性，則其後無論使用何種優良的推論方法也不能獲得正確的結果。對全體具有代表性的樣本是隨機樣本(random sample)，所謂隨機樣本，簡言之即是以隨機方式所抽得的樣本；所謂隨機抽樣，即是全體中每個個體皆有同等被抽可能的抽樣方式。正由於全體中每個個體皆有同等被抽可能，所以隨機抽樣的結果亦即隨機樣本才能用以代表全體以進行推論。君不見統計學中每個定理其第一句話都是「讓我們抽取一組範圍為 n 的隨機樣本」，絕無例外，因為如果不是隨機樣本，則下面的一切即無法進行。

要能代表全體，勢必須抽取隨機樣本，隨機樣本的好處是能代表全體，壞處是因而產生不確定性。所謂隨機，即是不摻入任何人為意志，不摻入人為意志則抽樣的結果將因人而異、因時而異，如此即產生一種不確定性，是由抽樣的隨機性而來的。前述由於人力、物力及時間的限制，研究者不可能觀遍研究對象的全體，而只能由其中抽取一部分樣本以為代表，如此由抽樣隨機性而來的不確定性即不能避免。

3. **由知識不足而來的不確定性** 二十世紀雖然號稱為知識爆發的時

代，然而宇宙現象浩如瀚海，人類所知畢竟有限。研究者亦不例外，不可能對其研究工作事事都清楚，考慮不周到的結果即產生偏差，這種偏差也就是不確定性是由知識不足而來的。例如進行稻作品種的試驗研究，假定有甲、乙兩種品種，在產量方面先天上甲品種優於乙品種，但是在試驗的時候不巧甲品種栽在瘦的土地上，乙品種栽在肥的土地上，其結果乙品種的產量反較甲品種為高，因而獲致錯誤的結論，這種錯誤是來自對土壤的肥沃度不清楚，亦即知識不足所產生的不確定性。由於人類所知有限，因此由知識不足而來的不確定性亦不能避免。

4. 處理不確定性的方法 綜合以上所述，可知由樣本推論全體的過程中含有不確定性，同時無論是由抽樣隨機性而來的不確定性或是由知識不足而來的不確定性均不能避免。因此欲進行推論必須先對不確定性加以處理，否則消極的不能獲知不確定性的大小，從而判斷推論結果的可靠度；積極的不能想辦法去控制不確定性，從而增加推論結果的可靠度。由此可知，處理不確定性的方法有兩種，基本的是測量不確定性程度的方法，進一步的是控制不確定性程度的方法。茲分別說明如下。

三、測量不確定性的方法

1. 不確定性的性質 前述推論過程中不確定性的來源有二，即抽樣的隨機性與知識的不足。抽樣隨機性所產生的不確定性其發生與大小具有隨機性。知識不足所產生的不確定性其情形即較為複雜，然而不論其情況是如何的複雜，但是有一點是可以肯定的即是這種不確定性不是人為造成的，一種情況如果沒有人為的意志介入，則其發生與大小基本上是屬隨機性的。由此可知，不論是由抽樣隨機性所產生的不確定性或是由知識不足所產生的不確定性，均可視其為一種隨機現象 (random phenomena) 加以處理。

2. 測量不確定性程度的工具 由上面的說明可知，推論過程中的不確定性基本上是一種隨機現象，研究隨機現象的數學是機率論 (theory of probability)，由此可知近代統計學是建立在機率論的基礎上。至於如何建立將在下一章即機率論中說明之。機率論由最基本的抽樣實驗開始，最後導出機率分配。統計學則更進一步由機率分配開始，根據抽樣結果導出抽樣分配，此抽樣分配即是上述推論過程中所含不確定性的機率分配，根據此分配即可測量推論過程中所含不確定性的程度，從而說明推論結果的可靠度，其詳細情形將在以後有關章節中說明之。

四、控制不確定性的方法

1. 控制方法的原則與分野 前述處理不確定性的進一步方法即是設法控制不確定性的程度，如此即能提高推論結果的可靠度。一個人通常有這樣的經驗，就是對一件事情如果知道愈多，同時所用方法亦愈佳，則對該事情的判斷即愈為可靠。統計方法也是如此，如果在事前能引用較多的有關資訊，事後又能對既有的資料妥加利用，則推論結果的可靠度即能提高。推論工作是在獲得樣本資料以後才開始的，因此所謂事前事後是以獲得樣本資料為分界點。事前是指獲得樣本資料以前，事後是指獲得樣本資料以後。事前必須多方參考，如此即能對不確定性作外在的控制；事後必須善用已有的資料，如此即能對不確定性作內在的控制；如果內在與外在都能控制得很好，即能對不確定性作有效的控制，而能大幅提升推論結果的可靠度。

2. 不確定性的外在控制方法 為控制不確定性的程度，在抽樣以前所能做的工作只有兩種，其一為抽樣設計，另一為實驗設計。所謂抽樣設計 (sampling design)，是指對樣本的出處作適當的安排，其目的在取得代表性較大的樣本，如此即能控制不確定性，從而提高推論結果的可靠度。進行抽樣設計必須對全體加以分類，如果類間差異大、類內差異小，即採用分層抽樣設計；如果類間差異小、類內差異大，

即採用集團抽樣設計；如果類間、類內差異皆大，即採用兩段抽樣設計；如此即可抽得代表性大的樣本。樣本代表性能夠加大是因為對母體加以分類的緣故，分類標準及所分類別是一種資訊，此資訊通過抽樣設計加以利用，指示何處差異大、何處比例上多抽，何處差異小，何處比例上少抽。差異大是指不確定程度較大，多抽的目的在控制此較大的不確定性。由此可知，抽樣設計的目的是在利用使研究對象發生差異，亦即不確定性的有關資訊，以比例上多抽的方式加以控制。處理事情也是一樣，為使事情能處理得很好，則必須找出重點全力以赴，重點所在即是一種資訊，全力以赴即是利用這種資訊以收事半功倍之效。

所謂實驗設計 (experimental design)，是指對試驗客體按其試驗因子及試驗環境作適當的安排。按照試驗因子作適當的安排，其目的在控制已知因素的影響，而能測定每個因子對試驗結果的淨影響是否顯著。按照試驗環境作適當的安排，其目的在控制未知因素的影響。無論是已知因素的影響或是未知因素的影響，最後均產生不確定性，影響推論結果的可靠度。實驗設計的目的即在同時控制這兩種因素的不確定性，較抽樣設計更進一步，抽樣設計僅在控制抽樣隨機性及一般知識不足所產生的不確定性，而實驗設計則能進一步控制已知因素及其交互影響所產生的不確定性。綜合以上所述，可知抽樣設計的最終目的在取得代表性大的樣本，實驗設計的最終目的則不但在取得代表性大的樣本，同時亦在取得影響因素的資料作事後分析。

3. 不確定性的內在控制方法 樣本資料已經取得以後，即可進行推論以獲得一般性的結論。統計推論的對象是母全體上的參數 (parameter)，統計推論工作可分為兩個階段，第一個階段是如何根據樣本資料去求取母體參數的估計值，此一過程在統計學中稱之為點推定 (point estimation)；第二個階段是先給母體未知參數一個假定的數值，此稱之為假設，然後根據樣本資料所求得未知參數的估計值去檢驗該假設是否成立，此一過程在統計學中稱之為檢定 (testing statistical hypothesis)。這