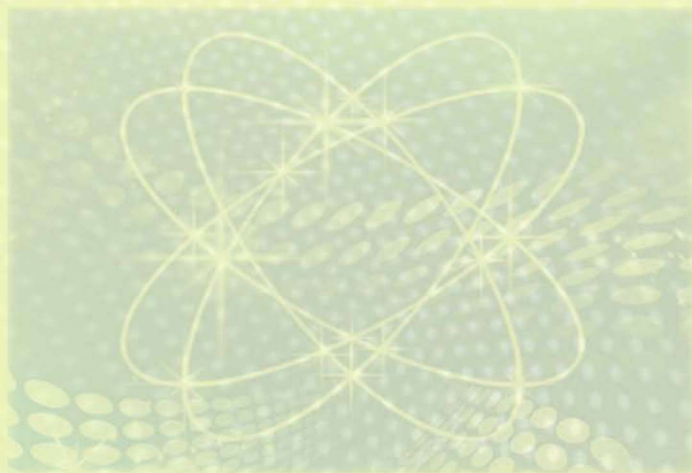


考研数学
10 年真题分析与演练
数学（二）

主编 杨超 姜超千 方浩



北京理工大学出版社

考研数学

10 年真题分析与演练

数学(二)

主编 杨 超 姜晓千 方 浩

图书在版编目(CIP)数据

考研数学 10 年真题分析与演练. 数学二 / 杨超, 姜晓千, 方浩主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2016. 7

ISBN 978-7-5682-2467-3

I. ①考… II. ①杨… ②姜… ③方… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 137330 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京盛彩捷印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 20.75

字 数 / 460 千字

版 次 / 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 38.80 元

责任编辑 / 李秀梅

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

目 录

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2007(二)—1
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2007(二)—8
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2008(二)—1
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2008(二)—8
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2009(二)—1
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2009(二)—7
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2010(二)—1
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2010(二)—7
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2011(二)—1
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2011(二)—6
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2012(二)—1
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2012(二)—7
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2013(二)—1
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2013(二)—6
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2014(二)—1
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2014(二)—7
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2015(二)—1
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2015(二)—8
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	2016(二)—1
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案	2016(二)—7

真题中的典型题

§ 1. 函数、极限、连续

1. (1995 年, 数学二)

设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$.

2. (1988 年, 数学四)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$.

3. (1991 年, 数学三)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 为给定的自然数.

4. (1991 年, 数学四)

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{x}}$.

5. (1994 年, 数学四)

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

6. (1997 年, 数学四)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] (a \neq 0)$.

7. (1998 年, 数学四)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$, n 为自然数.

8. (2000 年, 数学一)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

9. (1999 年, 数学二)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$.

10. (2002 年, 数学二)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

11. (1998 年, 数学一)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

12. (1999 年, 数学二)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数.

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

13. (1998 年, 数学二)

求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

14. (2005 年, 数学二)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

15. (2004 年, 数学二)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

16. (1994 年, 数学四)

设函数 $f(x)$ 有导数, 且 $f(0) = 0$, $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$.

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = \frac{1}{2n} f'(0)$.

§ 2. 导数与微分

17. (2004 年, 数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;

(II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导?

18. (1995 年, 数学二)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

19. (1989 年, 数学二)

已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

20. (1996 年, 数学二)

设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2) du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

21. (2003 年, 数学一, 数学二)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(I) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$

满足的微分方程;

(II) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

22. (2000 年, 数学二)

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

23. (1996 年, 数学二)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$

(I) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(II) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点? 若有, 指出这些点.

24. (2000 年, 数学二)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

§ 3. 中值定理及其应用

25. (1990 年, 数学三)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内存在且单调减少, $f(0) = 0$, 试用拉格朗日中值定理证明不等式

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b),$$

其中 a, b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$.

26. (1990 年, 数学四)

证明不等式 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$.

27. (1991 年, 数学三)

试证明函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

28. (1992 年, 数学四)

求证方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中 p, q 为常数, 且 $0 < q < 1$.

29. (1993 年, 数学三)

假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.

30. (1995 年, 数学四)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

31. (1999 年, 数学三)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

试证:

(I) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(II) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

32. (2000 年, 数学三, 数学四)

求函数 $y = (x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的单调区间和极值, 并求该函数图形的渐近线.

33. (2001 年, 数学三, 数学四)

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+C}{x-C} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)],$$

求 C 的值.

34. (2003 年, 数学三)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$, 试证必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

35. (1987 年, 数学四)

设总成本 c 关于产量 x 的函数 $c(x) = 400 + 3x + \frac{1}{2}x^2$, 需求量 x 关于价格 p 的函数 $p =$

$\frac{100}{\sqrt{x}}$, 求

(I) 边际成本;

(II) 边际收益;

(III) 边际利润;

(IV) 收益对价格的弹性.

36. (1993 年, 数学三)

设某产品的成本函数为 $C = aq^2 + bq + c$, 需求函数为 $q = \frac{1}{e}(d - p)$, 其中 c 为成本, q 为需求量(即产量), p 为价格, a, b, c, d, e 都是正的常数, 且 $d > b$, 求:

(I) 利润最大时的产量及最大利润;

(II) 需求对价格的弹性;

(III) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

37. (1995 年, 数学三, 数学四)

设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 收益函数为 $R = PQ$, 其中 P 为产品价格, Q 为需求量(产品的产量). $Q(P)$ 为单调减函数, 如果当价格 P_0 对应产量为 Q_0 时, 边际收益 $\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} =$

$a > 0$, 收益对价格的边际效益 $\left. \frac{dR}{dP} \right|_{P=P_0} = C < 0$, 需求对价格的弹性 $E_p = b > 1$.

求 P_0, Q_0 .

38. (1997 年, 数学三)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元 / 吨), x 为销售量 (单位: 吨), 商品的成本函数是 $c = 3x + 1$ (万元).

(I) 若每销售一吨商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获得最大利润时的销售量;

(II) t 为何值时, 政府税收总额最大?

39. (1998 年, 数学三, 数学四)

设某酒厂有一批新酿的好酒, 如果现在 (假定 $t = 0$) 就售出, 总收入为 R_0 (元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售, t 年末总收入为 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}t}$.

假定银行的年利率为 r , 并以连续复利计算, 试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大? 并求 $r = 0.006$ 时的 t 值.

40. (2004 年, 数学三, 数学四)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 Ed ($Ed > 0$);

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - Ed)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 Ed 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

41. (1996 年, 数学二)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

42. (1993 年, 数学二)

设 $x > 0$, 常数 $a > e$, 证明: $(a + x)^a < a^{a+x}$.

43. (1998 年, 数学二)

设 $x \in (0, 1)$, 证明:

(I) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;

(II) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

44. (1999 年, 数学一)

试证: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

45. (1993 年, 数学一)

设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x) \geq k > 0$, $f(0) < 0$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

46. (1997 年, 数学二)

就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$ 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

47. (1995 年, 数学一)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$,

$$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0.$$

试证:

(I) 在开区间 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

(II) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

48. (1998 年, 数学一, 数学二)

设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(I) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边梯形的面积;

(II) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明 (I) 中的 x_0 是唯一的.

49. (2000 年, 数学一, 数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1 和 ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

50. (2001 年, 数学一)

设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续函数, 且 $f''(x) \neq 0$.

试证:

(I) 对于 $(-1, 1)$ 内的任一 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(II) $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

51. (1999 年, 数学二)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且

$$f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0.$$

证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

52. (2001 年, 数学二)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$.

(I) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(II) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η , 使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

§ 4. 积分学及其应用

53. (1987 年, 数学四)

求 $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$.

54. (1990 年, 数学四)

求不定积分 $\int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$.

55. (1993 年, 数学三, 数学四)

已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$, 求常数 a 的值.

56. (1994 年, 数学四)

已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

57. (1987 年, 数学二, 长沙铁道学院 1979 年)

求 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ (a, b 是不全为 0 的非负常数).

58. (1996 年, 数学二)

计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$.

59. (1997 年, 数学二)

计算 $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$.

60. (2003 年, 数学二, 同济大学 1983 年)

计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

61. (1999 年, 数学四)

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时,

$$f(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}.$$

已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$, 试求 $f(x)$.

62. (2000 年, 数学四)

计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$.

63. (1994 年, 数学三)

设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0, F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$.

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$.

64. (2001 年, 数学四)

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有 $x, t \in (0, +\infty)$, 满足条件:

$$\int_1^{xt} f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_1^t f(u) du.$$

求 $f(x)$.

65. (2005 年, 数学一, 数学二)

如图 1 所示, 曲线 c 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 c 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$

66. (1995 年, 数学三)

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a] (a > 0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件

$$f(x) + f(-x) = A (A \text{ 为常数}).$$

(I) 证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$;

(II) 利用 (I) 的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

67. (2001 年, 数学三)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx (k > 1).$$

证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

68. (2002 年, 数学三, 数学四)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质, 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

69. (2004 年, 数学二)

$$\text{设 } f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt.$$

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(II) 求 $f(x)$ 的值域.

70. (2004 年, 数学三)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt, x \in [a, b],$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt.$$

$$\text{证明: } \int_a^b x f(x)dx \leq \int_a^b x g(x)dx.$$

71. (2005 年, 数学三, 数学四)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$.

证明: 对任何 $a \in [0, 1]$, 有

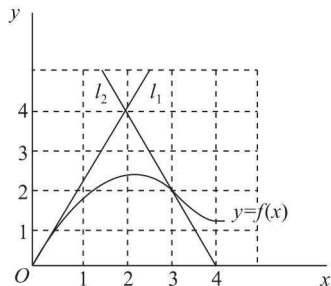


图 1

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1).$$

72. (1992 年, 数学三)

设曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$.

(I) 把曲线 $y = e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x = \xi (\xi > 0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周, 得一旋转体, 求此旋转体体积 $V(\xi)$; 求满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi)$ 的 a .

(II) 求在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积.

73. (1992 年, 数学四)

设生产某产品的固定成本为 10, 而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC = -40 - 20x + 3x^2$, 边际收入函数为 $MR = 32 + 10x$.

试求:

(I) 总利润函数;

(II) 使总利润最大的产量.

74. (1998 年, 数学三)

设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$, 记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n .

(I) 求两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n ;

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和.

75. (2002 年, 数学三)

设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

(I) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(II) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

76. (2005 年, 数学二)

如图 2 所示, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像, 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y , 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$, 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.

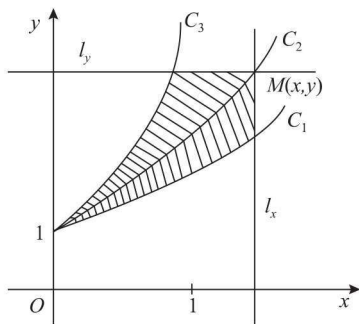


图 2

77. (2003 年, 数学二)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9}$.

78. (2002 年, 数学二)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

79. (同济大学等八院校 1985 年)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

80. (2001 年, 数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$ 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$.

81. (2002 年, 数学一)

已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)$.

82. (1998 年, 数学二)

$$\text{计算积分 } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x - x^2|}}.$$

83. (1993 年, 数学二)

设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

84. (1996 年, 数学一)

求心形线 $\gamma = a(1 + \cos \theta)$ 的全长, 其中 $a > 0$ 是常数.

85. (2001 年, 数学二)

设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $S = S(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算:

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 \text{ 的值. (在直角坐标系下曲率公式为 } k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}})$$

86. (2002 年, 数学二)

某闸门的形状与大小如图 3 所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成, 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承

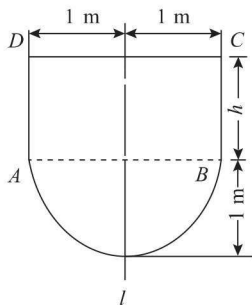


图 3

受的水压力之比为 5 : 4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少米?

§ 5. 微分方程

87. (1999 年, 数学三)

设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ 试求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续

函数 $y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程, 且满足条件 $y(0) = 0$.

88. (2003 年, 数学三)

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件:

$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$ 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$.

(I) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(II) 求出 $F(x)$ 的表达式.

89. (2005 年, 数学二)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足

$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

90. (1997 年, 数学三)

设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy.$$

求 $f(t)$.

91. (1994 年, 数学三)

设函数 $y = y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -4. \end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$.

92. (1988 年, 数学三)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数:

$$D = D(p) = \frac{a}{p^2}, S = S(p) = bp,$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$ 为常数, 价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] (k \text{ 为正的常数}).$$

假设当 $t = 0$ 时价格为 1, 试求:

(I) 需求量等于供给量时的均衡价格 p_e ;

(II) 价格函数 $p(t)$;

(III) 极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$.

93. (2001 年, 数学三)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ (n 为正整数), 且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

94. (2002 年, 数学三)

(I) 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$;

(II) 利用(I)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

95. (1993 年, 数学二)

求微分方程 $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

96. (1995 年, 数学二)

设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

97. (1997 年, 数学二)

求微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解.

98. (1996 年, 数学二)

(I) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 为正的常数;

(II) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

99. (1997 年, 数学二)

已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

100. (2001 年, 数学二)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 2$.

求 $\int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx$.

101. (1987 年, 数学一)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解(一般解), 其中常数 $a > 0$.

102. (2000 年, 数学二, 大连理工大学 1980 年, 武汉水利电力学院 1985 年)

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

(I) 求导数 $f'(x)$;

(II) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

103. (1999 年, 数学二)

设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点

$P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

104. (1997 年, 数学一, 北京大学丁同仁《常微分方程教程》)

在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的, 设该人群的总人数为 N , 在 $t = 0$ 时已掌握新技术的人数为 x_0 , 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$ 视为连续可微变量), 其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比, 比例常数 $k > 0$, 求 $x(t)$.

105. (2001 年, 数学二)

一个半球体状的雪堆, 其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比, 比例常数 $k > 0$, 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状, 已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少小时?

106. (2004 年, 数学一, 数学二)

某种飞机在机场降落时, 为了减小滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h, 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$).

问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

(注: kg 表示千克, km/h 表示千米 / 小时.)

107. (2003 年, 数学二)

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)$ ($y \geq 0$) 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (见图 4), 容器底面圆的半径为 2 m, 根据设计要求, 当以 $3 \text{ m}^3/\text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi \text{ m}^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器内无液体).

(I) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(II) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)

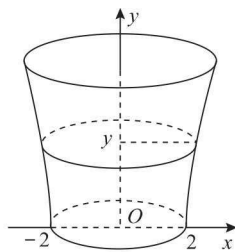


图 4

§ 6. 空间解析几何

108. (1994 年, 数学一)

已知 A 点和 B 点的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 直线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及平面 $z = 0, z = 1$ 所围成立体的体积.

§ 7. 多元函数微分学

109. (1996 年, 数学四)

设 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$, 求 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.