5年级

丛书主编：蒋忠勇
本册主编：张峰

小学奥数
讲练1+1

讲解版

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

5年级

◎ 丛书主编：蒋忠勇

小学奥数
讲练1+1

讲解版

本册主编：张峰
本册编委：蒋忠勇 张峰 龚宇 方自建 张瑜

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

小学奥数讲练1+1(5年级)(讲解版)/蒋忠勇丛书主编,张峰本册主编.
—上海:华东理工大学出版社,2017.4
ISBN 978-7-5628-4913-1

Ⅰ.①小… Ⅱ.①蒋… ②张… Ⅲ.①小学数学课-习题集 Ⅳ.①G624.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第021000号

策划编辑 / 郭 艳
责任编辑 / 陈月姣
装帧设计 / 徐 蓉
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址:上海市梅陇路130号,200237
电话:021-64250306
网址:www.ecustpress.cn
邮箱:zongbianban@ecustpress.cn
印 刷 / 南通印刷总厂有限公司
开 本 / 787mm×1092mm 1/16
印 张 / 9.75
字 数 / 252千字
版 次 / 2017年4月第1版
印 次 / 2017年4月第1次
定 价 / 29.80元

版权所有 侵权必究

前言

给我最大快乐的，
不是已懂的知识，而是不断地学习；
不是已有的东西，而是不断地获取；
不是已达到的高度，而是继续不断地攀登。

——高斯

近年来，奥数一直是争议的焦点，甚至被“神话”或“妖魔化”，作为一种锻炼孩子逻辑思维能力的手段，奥数的“功劳”应该被肯定，它可以像绘画、音乐、体育一样，成为一种兴趣特长。

这套书包括 3 年级到 5 年级，每个年级包括讲解版和练习版，共 6 本，建议配合使用。

主要适合以下读者使用：

- 对奥数比较感兴趣的家长和学生
- 想通过各个杯赛的初赛但缺少对奥数体系认识的学生
- 通过了初赛，希望在决赛中更进一步的学生

那么，与市面上众多的奥数书相比，本套书有什么特别之处呢？

1. 讲解版全书的结构设置体现了“由点到线再到面”的理念，共五大模块，每个模块根据内容的多少设置不同的讲次，每讲又细化了若干问题，每个问题都由 3～4 个例题和 2 个巩固练习题构成，再配合专门的练习版作为练习题的补充，非常适合 40～60 分钟的教学需要，训练起来更加灵活和自主。

2. 书中所有的习题基本涵盖了当前各大杯赛中频繁出现的考点与知识点，并且“讲解版”中对每类问题的解题方法及技巧都有深入的讲解和总结。 值得一提的是，书中所有的题目都已经用培训班上课讲义的形式进行了几轮的磨合试验和调整。

3. 题目的难度契合当下的竞赛。 编委会将本书的题目与几大热门杯赛真题进行了回归、方差等因素分析，发现其“匹配性”较高。 在专题的设置上，除了尽量靠近杯赛的考纲设置，按照计算、数论、几何、应用题等竞赛中常见热点和考点进行编排，还根据实际，增加了“口奥”和小升初的专题训练。

另外，本书在代数部分注重解题技巧的传授，在几何部分注重方法的总结。 在讲解清楚每个问题后，还有针对性地配套了一定的训练和巩固练习（详见“练习版”），旨在提高学生举一反三的能力，使学生在杯赛中能灵活处理所给题目，抓住关键分，提升自己的竞争力。

希望学生能通过本书的讲练有所收获，在竞赛及“小升初”的考试中取得佳绩，更希望学生能从本书中掌握其中蕴含的数学思想方法，拓展数学思维，喜欢上奥数，并学会合理、有逻辑地阐述自己的想法和观点。

当然，书中一定有疏漏错谬之处，敬请联系编者批评指正。

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

模块一 计 算

第一讲 常见公式和方法

（目标问题：常见公式、常见方法）

问题一 常见公式

例 1 计算：$36+49+64+81+\cdots+400$.

【分析】

$$\begin{aligned}原式&=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\&=\frac{1}{6}\times20\times(20+1)\times(2\times20+1)-\frac{1}{6}\times5\times(5+1)\times(2\times5+1)\\&=2870-55=2815.\end{aligned}$$

例 2 计算：$1\times2+2\times3+\cdots+19\times20$.

【分析】

$$\begin{aligned}原式&=(1^2+2^2+\cdots+19^2)+(1+2+\cdots+19)\\&=\frac{1}{6}\times19\times(19+1)\times(2\times19+1)+\frac{(1+19)\times19}{2}=2470+190=2660.\end{aligned}$$

【备注】本题还可以使用整数裂项的公式.

例 3 计算：$\dfrac{(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)}{1+2+3+\cdots+9+10+9+8+\cdots+3+2+1}$.

【分析】

$$\begin{aligned}原式&=\frac{(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(100^2-99^2)}{10^2}\\&=\frac{(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)+(6+5)(6-5)+\cdots+(100+99)(100-99)}{100}\\&=\frac{3+7+11+\cdots+199}{100}\\&=\frac{\frac{1}{2}\times(3+199)\times50}{100}=\frac{202}{4}=50\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 4 计算：$1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+9\frac{1}{32}+11\frac{1}{64}+13\frac{1}{128}+15\frac{1}{256}+17\frac{1}{512}+19\frac{1}{1024}$.

【分析】

原式$=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$

$+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}=\frac{(1+19)\times 10}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=100+\frac{1023}{1024}$

$=100\frac{1023}{1024}$.

【巩固与提高1】 对自然数 a 和 n，规定 $a\triangledown n=a^n+a^{n-1}$，例如 $3\triangledown 2=3^2+3=12$，那么：

（1）$1\triangledown 2+2\triangledown 2+\cdots+99\triangledown 2=$________；

（2）$2\triangledown 1+2\triangledown 2+\cdots+2\triangledown 99=$________.

【巩固与提高2】 计算：（1）$(31415926)^2-31415925\times 31415927$；

（2）$1234^2+8766^2+2468\times 8766$.

问题二 常见方法

例 1 计算：$1-3+5-7+9-11+\cdots-1999+2001$.

【分析】

根据题意，一共有 1001 个数，1 后面的每两项进行结合得到（5－3）＝2，（9－7）＝2，…，（2001－1999）＝2，共有 500 个 2，然后再进一步计算即可；

$1-3+5-7+9-11+\cdots-1999+2001$

$=1+(5-3)+(9-7)+\cdots+(2001-1999)$

$=1+2\times 500$

$=1+1000$

$=1001$.

例 2 计算：$\frac{2000+20002000+\cdots+\overbrace{20002000\cdots2000}^{2000个2000}}{2001+20012001+\cdots+\underbrace{20012001\cdots2001}_{2001个2001}}$.

【分析】

原式$=\dfrac{2000\times(1+10001+100010001+\cdots+100010001\cdots0001)}{2001\times(1+10001+100010001+\cdots+100010001\cdots0001)}=\dfrac{2000}{2001}$.

例 3 计算：$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}\right)-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}\right)$.

【分析】

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{175}{144}.\end{aligned}$$

例 4 计算：$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{9}{10}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{9}{10}\right)\times\dfrac{1}{2}-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{9}{10}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{9}{10}\right)$.

【分析】

设 $t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{9}{10}$，则有 $t^2+t\times\dfrac{1}{2}-(1+t)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=t^2+\dfrac{1}{2}t-\left(t^2+t-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

例 5 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\cdots+\dfrac{1}{19}}$的整数部分是多少？

【分析】

由于$\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{11}>\dfrac{1}{12}>\cdots>\dfrac{1}{18}>\dfrac{1}{19}$，$\dfrac{1}{19}\times10<\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}<\dfrac{1}{10}\times10=1$，所以 $1<\dfrac{1}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}}<\dfrac{19}{10}$.所以$\dfrac{1}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\cdots+\dfrac{1}{19}}$的整数部分为1.

【备注】本题选择设 $A=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}$简化运算过程，即 $1<\dfrac{1}{A}<\dfrac{19}{10}$，可求得整数部分.用放缩法比较实数的大小的基本思想方法是：把要比较的两个数进行适当的放大

计算

数论

应用题

三大原理与组合

几何

综合训练

参考答案与解析

或缩小，使复杂的问题得以简化，来达到比较两个实数的大小的目的.

【巩固与提高1】 计算：$4.83\times0.59+0.41\times1.59-0.324\times5.9$.

【巩固与提高2】 有一个带小数，将它的小数点移动若干位后，得到另一个带小数.这两个带小数的和是637.512.求这两个带小数.

本讲小结

一、计算中常见的公式和结论

1. 几个从“1”开始的公式和结论

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$；

(4) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$；

(5) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$（奇数求和公式）.

2. 两个重要公式

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$（完全平方公式）；

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$（平方差公式）.

【备注】两数和（或差）的平方，等于这两个数的平方和，加上（或者减去）这两个数的积的2倍.可以合写在一起，为 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.为便于记忆，可形象地叙述为：“首平方、尾平方，2倍乘积在中央”.

3. 特殊多位数的实用结论

(1) $\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1001=\overline{abc}\times7\times11\times13$；

(2) $\overline{ababab}=\overline{ab}\times10101$；

(3) $\overline{aaa}=a\times111=\overline{a}\times3\times37$.

4. 等差数列求和公式：$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，其中 n 代表项数，a_1 和 a_n 分别代表首项和末项.

5. 等比数列求和公式：$s_n=a_1q^0+a_1q^1+\cdots+a_1q^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq1,\\ na_1, & q=1.\end{cases}$ 其中 a_1 代表首项，q 代表公比.

6. 其他常用结论

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$；

（2）$\underbrace{111\cdots1}_{n个1}\times\underbrace{111\cdots1}_{n个1}=123\cdots n\cdots321$（$n\leqslant9$）；

（3）$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$，$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$，…

二、常用的一些计算技巧列举

1. 凑整法

凑整法：加减法的速算与巧算中主要是“凑整”，就是将算式中的数分成若干组，使每组的运算结果都是整十、整百、整千……的数，再将各组的结果求和（差）.

（1）分组凑整法

几个数连乘时，先把 5 的倍数和 2 的倍数，以及其他能速算的数分别结合相乘，再把它们的积相乘.

例：求 $25\times125\times64$ 的值.

解：原式 $=25\times4\times125\times8\times2$

$=100\times1000\times2$

$=200000.$

（2）加补凑整法

当加数或减数接近某数时，根据交换律、结合律把可以凑成整十、整百、整千……的数放在一起运算或把运算中一个加数或减数看作整十、整百、整千等，再减去（或加上）多加（或少减）的部分，从而提高运算速度.

例：求 $45+13.7+55+6.3$ 的值为多少？

解：原式 $=(45+55)+(13.7+6.3)$

$=100+20$

$=120.$

（3）基准数法

许多数相加，如果这些数都接近某一个数，可以把这个数确定为一个基准数，将其他的数与这个数比较，在基准数的倍数上加上多余的部分，减去不足的，这样可以使计算简便.

例：求 $83+86+95-85+86-94+95+94+86+92+87+80+93+100-89+83+96+98$ 的值.

解：原式 $=(90-7)+(90-4)+(90+5)-(90-5)+(90-4)-(90+4)+(90+5)+(90+4)+(90-4)+(90+2)+(90-3)+(90-10)+(90+3)+(90+10)-(90-1)+(90-7)+(90+6)+(90+8)$

$=(15-3)\times90+6$

$=1086.$

（4）位值原理法

同一个数字，由于它在所写的数里的位置不同，所表示的数值也不同.也就是说，每一个数字除了有自身的一个值外，还有一个“位置值”. 例如“2”，写在个位上，就表示 2 个一；写在百位上，就表示 2 个百.这种数字和数位结合起来表示数的原则，称为数的位值原理.

例：$123+234+345+456+567+678+789$

解：原式 $=(100+20+3)+(200+30+4)+(300+40+5)+\cdots+(700+80+9)$

$=(100+200+300+\cdots+700)+(20+30+40+\cdots+70+80)+(3+4+5+\cdots8+9)$

$=2800+350+42$

$=3192.$

2. 提取公因数法.

3. 公式法：比如裂项公式、完全平方公式、平方差公式等.

4. 换元法.

5. 整体法.

6. 放缩法，等.

计算
数论
应用题
三大原理与组合
几何
综合训练
参考答案与解析

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二讲 估算和裂项

（目标问题：估算问题、裂项问题）

问题一 估算问题

例 1 $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22$ 的整数部分是多少？

【分析】 根据题意，将算式中的 8.01，8.02，8.03 利用四舍五入法取整数 8，然后再利用乘法分配律进行计算即可得到答案.
原式$\approx 8\times(1.24+1.23+1.22)=8\times3.69=29.52$.所以 $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22$ 的整数部分是 29.

例 2 除式 $12345678910111213\div31211101987654321$ 计算结果的小数点后的前三位数字是多少？

【分析】 $1234\div3121<$商$<1234\div3120$，$1234\div3121\approx0.3954$，$1234\div3120\approx0.3955$，所以计算结果的小数点后的前三位数字分别是 3、9、5.

例 3 把一张长 136 厘米、宽 80 厘米的长方形纸，裁成同样大小，面积尽可能大的正方形纸，纸无剩余，至少能裁多少张？

【分析】 由于长方形纸的长为 136 厘米，宽为 80 厘米，取 136 和 8 的最大公约数 8 作为正方形纸的边长.因此可裁剪成：$(136\times80)\div(8\times8)=170$（张）.

【巩固与提高1】 在 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{99},\frac{1}{100}$ 中选出若干个数使它们的和大于 3，最少要选多少个数？

【巩固与提高2】 计算下式的值，其中小数部分四舍五入，答案仅保留整数.

$33.333^2-3.1415926\div 0.618$

问题二 裂项问题

例 1 计算：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2007}\right)=$________.

【分析】

原式$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\cdots\times\frac{2008}{2007}=1004$.

【备注】整数和分数相加再连乘，可以尝试通分，例如本题，通分后可以约分简化计算.另外,本题是作为例2的引入,例1也是例2的一部分.

例 2 计算：$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(1-\frac{1}{16}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

【分析】

$$\begin{aligned}原式&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{9}{10}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{10}\right)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{20}.\end{aligned}$$

例 3 计算：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+49\times50$.

【分析】

设 $s=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+49\times50$

$1\times2\times3=1\times2\times3$

$2\times3\times3=2\times3\times(4-1)=2\times3\times4-1\times2\times3$

$3\times4\times3=3\times4\times(5-2)=3\times4\times5-2\times3\times4$

……

$49\times50\times3=49\times50\times(51-48)=49\times50\times51-48\times49\times50$

$3s=1\times2\times3+2\times3\times3+3\times4\times3+\cdots+49\times50\times3=49\times50\times51$

$s=49\times50\times51\div3=41650$.

【备注】这是整数的裂项.裂项思想是：瞻前顾后，相互抵消.

【巩固与提高1】 计算：$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}$.

【巩固与提高2】 计算：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\times\left(1-\frac{1}{99}\right)$.

本讲小结

一、估算问题

我们通过一个简单的生活例子来分析估算问题.

师：明明家到学校大约是 100 米，“大约 100 米”是什么意思？

生：接近 100 米，可以超过一点儿，也可以不到 100 米.

师：可能是多少米呢？

生：98、99、100、101、102、103 等.

师：可能是 120 米吗？

生：不能是 120 米，相差太多了.

估算中常用到放缩法、取整法等技巧.求近似值或整数部分等，常常需要进行估算，估算的关键在于确定已知数据具有恰当精度的近似值.

二、分数通分化简法则

（1）求出原来几个分数的分母的最简公分母；

（2）根据分数的基本性质，把原来分数化成以这个最简公分母为分母.

三、裂项运算

1.“裂差”型运算

（1）对于分母可以写作两个因数乘积的分数，即$\frac{1}{a\times b}$形式的，这里我们把较小的数写在前面，即 $a<b$，那么有$\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$；

（2）对于分母中有 3 个或 4 个连续自然数乘积形式的分数，如：

$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$，$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$，我们可以进行如下裂项运算：

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}\right].$$

【备注】将算式中的项进行拆分，使拆分后的项前后可抵消，这种拆项计算称为裂项法.裂项分为分数裂项和整数裂项，常见的裂项方法是将数字分拆成两个或多个数字单位的和或差的形式.遇到裂项的计算题时，要仔细观察每项的分子和分母，发现各项分子与分母之间具有的相同关系，找出其共有部分.裂项的题目无须复杂的计算，一般都是将中间部分消去.因此，找到相邻两项的相似部分将它们消去，才是最根本的方法.

"裂差"型裂项有以下三大关键特征：

(1) 分子全部相同，最简单的形式为分子都是 1，一般复杂的形式可为都是 x（x 为任意自然数）的式子，但是只要将 x 提取出来即可转化为分子都是 1 的运算.

(2) 分母上均为几个自然数的乘积形式，并且满足相邻 2 个分母上的因数"首尾相接".

(3) 分母上几个因数间的差是一个定值.

2. "裂和"型运算

常见的"裂和"型运算主要有以下两种形式：

(1) $\frac{a+b}{a\times b}=\frac{a}{a\times b}+\frac{b}{a\times b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$；

(2) $\frac{a^2+b^2}{a\times b}=\frac{a^2}{a\times b}+\frac{b^2}{a\times b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

【备注】"裂和"型运算与"裂差"型运算的对比：

(1) 裂差型运算的核心环节是"两两抵消"达到简化的目的；

(2) 裂和型运算的核心环节是"两两抵消"或转化为"分数凑整"来达到简化的目的.

3. 整数裂项

常见的运算有以下两种形式：

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(n-1)\times n=\frac{1}{3}(n-1)\times n\times(n+1)$；

(2) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+(n-2)\times(n-1)\times n=\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$.

第三讲 分数的综合运算

（目标问题：分数的复杂运算、分数的混合运算）

问题一 分数的复杂运算

例 1 计算：$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6+4\times8\times12+7\times14\times21}{1\times3\times5+2\times6\times10+4\times12\times20+7\times21\times35}$.

【分析】

$$原式=\frac{1^3\times1\times2\times3+2^3\times1\times2\times3+4^3\times1\times2\times3+7^3\times1\times2\times3}{1^3\times1\times3\times5+2^3\times1\times3\times5+4^3\times1\times3\times5+7^3\times1\times3\times5}$$
$$=\frac{1\times2\times3\times(1^3+2^3+4^3+7^3)}{1\times3\times5\times(1^3+2^3+4^3+7^3)}=\frac{1\times2\times3}{1\times3\times5}=\frac{2}{5}.$$

例 2 计算：$\dfrac{\frac{7}{18}\times4\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\div\frac{5}{16}}\div2\frac{7}{8}$.

【分析】

$$\frac{\frac{7}{18}\times4\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\div\frac{5}{16}}\div2\frac{7}{8}=\frac{\frac{7}{4}+\frac{1}{6}}{\frac{40}{3}-12}\times\frac{8}{23}=\frac{23}{16}\times\frac{8}{23}=\frac{1}{2}.$$

例 3 计算：$\frac{341}{275}+2\times\frac{3441}{2775}+3\times\frac{34441}{27775}+\cdots+9\times\frac{3444444441}{27777777771}$.

【分析】

$\frac{341}{275}=\frac{31\times11}{25\times11}=\frac{31}{25}$，$\frac{3441}{2775}=\frac{31\times111}{25\times111}=\frac{31}{25}$，…，$\frac{3444444441}{27777777771}=\frac{31\times111111111}{25\times111111111}$ $=\frac{31}{25}$，即这 9 个数都等于$\frac{31}{25}$，因此，原式$=\frac{31}{25}\times(1+2+3+\cdots+9)=\frac{279}{5}$.

例 4 计算：$\dfrac{3\frac{1}{3}+5\frac{2}{4}+7\frac{3}{5}+\cdots+57\frac{28}{30}}{1\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}+3\frac{4}{5}+\cdots+28\frac{29}{30}}-1$.

【分析】

$$原式=\frac{\frac{10}{3}+\frac{22}{4}+\frac{38}{5}+\cdots+\frac{1738}{30}}{\frac{5}{3}+\frac{11}{4}+\frac{19}{5}+\cdots+\frac{869}{30}}-1=2-1=1.$$

【巩固与提高1】 计算：$\dfrac{\frac{8+9+10}{7}-\frac{9+10+11}{8}+\frac{10+11+12}{9}-\frac{11+12+13}{10}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$.

【巩固与提高2】 计算：$41\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+51\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+61\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+71\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}+81\frac{1}{7}\times\frac{7}{8}+91\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}$.

问题二 分数的混合运算

例 1 计算：$4.6\times\frac{11}{8}+8.4\div\frac{8}{11}-\frac{11}{8}\times5$.

【分析】

$$\begin{aligned}&4.6\times\frac{11}{8}+8.4\div\frac{8}{11}-\frac{11}{8}\times5\\=&4.6\times\frac{11}{8}+8.4\times\frac{11}{8}-\frac{11}{8}\times5\\=&\frac{11}{8}(4.6+8.4-5)\\=&\frac{11}{8}\times8\\=&11.\end{aligned}$$

例 2 计算：$\dfrac{\left(4\frac{2}{3}+0.75\right)\times3\frac{9}{13}}{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right)\div5\frac{8}{15}}\div34\frac{2}{7}$.

【分析】

$$原式=\frac{\frac{65}{12}\times\frac{48}{13}}{\frac{83}{90}\times\frac{15}{83}}\times\frac{7}{240}=\frac{20}{\frac{1}{6}}\times\frac{7}{240}=3\frac{1}{2}.$$

例 3 A 比 B 多$\frac{1}{4}$，而 $B:C=0.5:0.6$，则 $A:B:C=$________.

【分析】

$A:B=\left(1+\frac{1}{4}\right):1=5:4=25:20$；$B:C=5:6=20:24$；$A:B:C=25:20:24$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com