高师函授讲义

高等几何

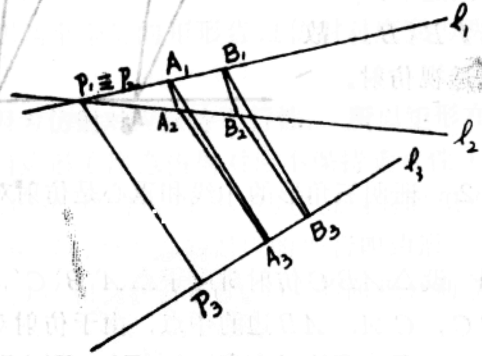
（习题解答）

高等几何编写组编

第一章　习题解答

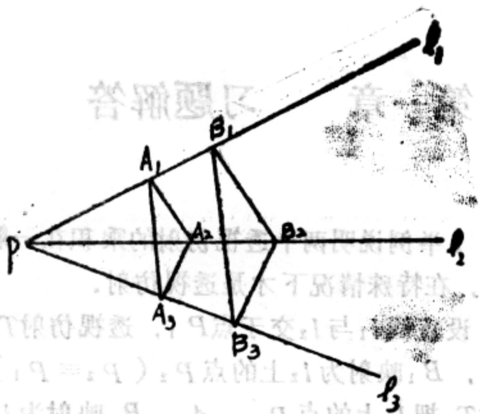
1．1举例说明两个透视仿射的乘积在一般情况下不是透视仿射，在特殊情况下才是透视仿射。

解　设直线l_1与l_2交于点P_1，透视仿射T_1把l_1上的点P_1，A_1，B_1映射为l_2上的点P_2（$P_2\equiv P_1$）、A_2，B_2透视仿射T_2把l_2上的点P_2，A_2，B_2映射为l_3上的点P_3，A_3，B_3，于是仿射对应$T_2\cdot T_1$把l_1上的点P_1，A_1，B_1映射为l_3上的点P_3，A_3，B_3，但对应点的连线A_1A_3与P_1P_3不平行。如果$A_1A_3\parallel P_1P_3$，而$A_2A_3\parallel P_2P_3$即$A_2A_3\parallel P_1P_3$这样过一点A_3有两条直线平行于P_1P_3，与平行公理矛盾。所以$T_2\cdot T_1$不是透视仿射。



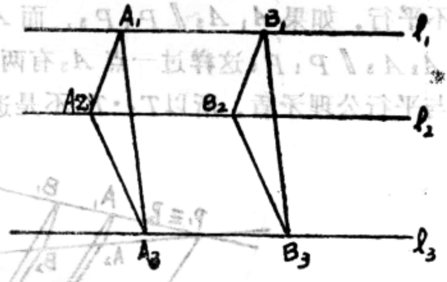
当l_1，l_2，l_3具有公共点P时，因为（PA_1B_1）=（PA_2B_2）=（PA_3B_3），由简比定义有

$$\frac{PB_1}{A_1B_1}=\frac{PB_3}{A_3B_3}$$



$\therefore A_1A_3 /\!/ B_1B^3$　　$\therefore T_2 \cdot T_1$是透视仿射。

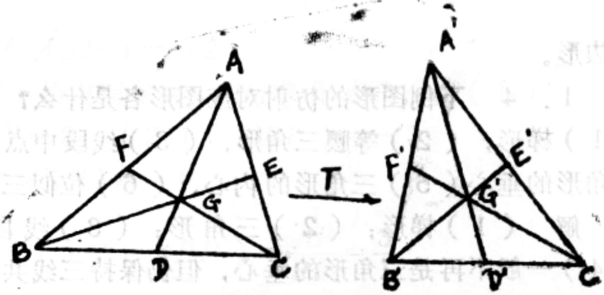
当$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$时，又T_1，T_2是透视仿射，$\therefore A_1B_1B_2A_2$和$A_2B_2B_3A_3$是平行四边形，$\therefore A_1B_1B_3A_3$也是平形四边形，$\therefore A_1A_3 /\!/ B_1B_3$，故$T_2 \cdot T_1$是透视仿射。



1、2　证明三角形的中线和重心是仿射对应下的不变性质。

证明　设$\triangle ABC$仿射对应于$\triangle A'B'C'$，D，E，F分别是BC，CA，AB边的中点，由于仿射对应保持结合性，所以D，E，F的对应点D'，E'，F'分别在边$B'C'$ $C'A'$，$A'B'$上，又仿射对应保持简比不变，

$$\therefore (B'C'D') = (BCD), \therefore \frac{B'D'}{C'D'} = \frac{BD}{CD} = -1$$



$\therefore D'$是线段$B'C'$的中点，同理E'是$C'A'$的中点，F'是$A'B'$的中点，所以中线是仿射不变性。

设$\triangle ABC$的重心为G，由于仿射对应将共线点映射为共线点，所以三中线AD，BE，CF的交点G的象点G'必是象直线$A'D'$，$B'E'$，$C'F'$（$\triangle A'B'C'$的三条中线）的交点，从而G'是$\triangle A'B'C'$的重心。故三角形的重心是仿射不变性。

1．3　证明两个全等的矩形经过仿射对应变为两个等积的平行四边形。

证明　因为仿射对应保持平行性，所以矩形在仿射对应下变为平行四边形（注意仿射对应不保持垂直性）。设两个全等的矩形$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$的面积分别为S_1和S_2，且$S_1=S_2$，两矩形所对应的平行四边形$A_1'B_1'C_1'D_1'$和$A_2'B_2'C_2'D_2'$的面积分别为S_1'和S_2'。则有

$$S_1'=KS_1,\quad S_2'=KS_2,$$

$$\therefore\ \frac{S_1'}{S_2'}=\frac{KS_1}{KS_2}=1\qquad \therefore\ S_1'=S_2'$$

故四边形$A_1'B_1'C_1'D_1'$与$A_2'B_2'C_2'D_2'$是等积的平行

四边形。

1．4　下例图形的仿射对应图形各是什么？
（1）梯形，（2）等腰三角形，（3）线段中点，（4）三角形的垂心（5）三角形的内心，（6）位似三角形。

解　（1）梯形；（2）三角形；（3）线段中点；（4）一般不再是三角形的垂心，但仍保持三线共点；（5）一般不再是三角形的内心，但仍保持三线共点；（6）位似三角形。

1．5　证明在仿射变换T下，两个不动点(自对应点)的连线上的每个点都不动。

证明　设在仿射变换T之下，$A \longrightarrow A$，$B \longrightarrow B$，在直线AB上任取一点C，若T（C）$=C'$，则由结合性，A，B，C，C'共线，且（CBA）＝（$C'BA$），

$\therefore CA=C'A$，　　$\therefore C=C'$，即直线AB上每个点都是不动点。

1．6　两点$A(-4, 1)$和$B(5, 4)$的连线被直线$3x-y-3=0$截于P点，求简比（ABP）。

解　设点P分有向线段AB成定比λ，则P点坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{-4+5\lambda}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{1+4\lambda}{1+\lambda} \end{cases}$$

又点P在直线$3x-y-3=0$上，从而定出$\lambda=2$，

$$\because (ABP)=\frac{AP}{BP}=-\frac{AP}{PB}=-\lambda$$

$\therefore (ABP)=-2$

1．7　给定两点 A，B，求作点 P，使（1）$(ABP)=3$　（2）$(ABP)=-3$　（3）$(ABP)=-1$

解　（1）$\because (ABP)=\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{3}{1}$

$$\therefore \frac{AP-BP}{BP}=\frac{2}{1} \text{即} \frac{AB}{BP}=\frac{2}{1}$$

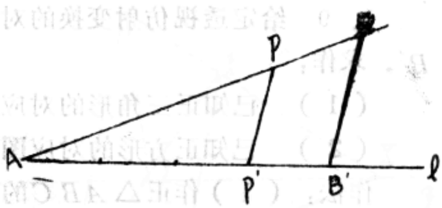
∴先作出 AB 的中点 M，再在 AB 的延长线上截

$BP=MB$，就得到 P 点。

$$(2) \because (ABP)=\frac{AP}{BP}=\frac{-3}{1}$$

$$\therefore \frac{AP-BP}{BP}=\frac{-3-1}{1}=\frac{-4}{1} \quad \text{即} \frac{AB}{BP}=\frac{4}{-1}$$

∴过 A 任作一直线 l，在其上截取段长线段（如图），过 P' 作 $P'P \parallel B'B$ 交 AB 于 P，则 P 为所求的点。



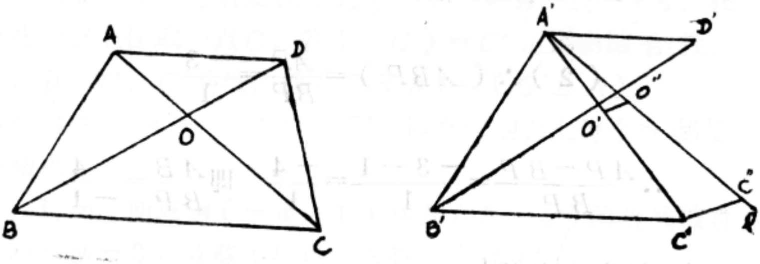
（3）$\because (ABP)=-1$，∴点 P 为线段 AB 的中点。

1．8　给定一个梯形 $ABCD$ 和 $\triangle A'B'C'$，设 A，B'，C' 分别是 A，B，C 的仿射对应点，求作点 D 的仿射对应点。

解　连接 AC，BD 交于 O，因为仿射对应保持简比不变，$\therefore (ACO)=(A'C'O')$

$\therefore \dfrac{AO}{OC}=\dfrac{A'O'}{O'C'}$ 过 A' 任作一直线 l，在 l 上截取 $A'O''=AO$

$O''C''=OC$，过 O'' 作 $C'C''$ 的平行线交 $A'C'$ 于 O'，过 A' 作 $B'C'$ 的平行线交直线 $B'O'$ 于 D'，则 D' 就是 D 的对应点。



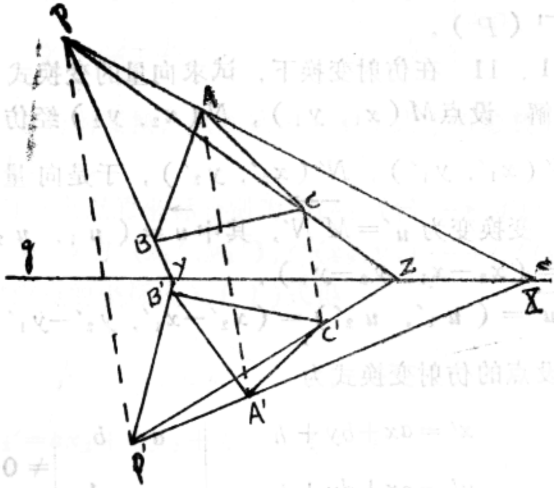
1．9　给定透视仿射变换的对应轴 g 和一对对应点 P 和 P'。求作：

（1）　已知正三角形的对应图形；

（2）　已知正方形的对应图形。

作法：（1）作正 $\triangle ABC$ 的对应图形

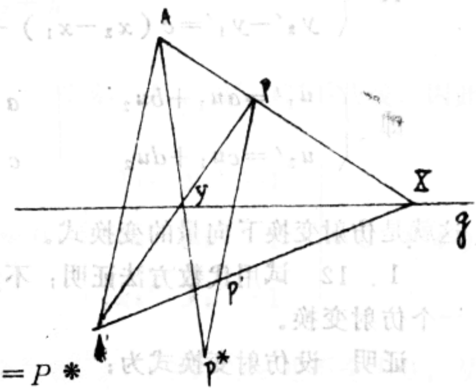
连 PA 交轴 g 于 X，过 A 作 PP' 的平行线交 $P'X$ 于 A'，则 A' 是 A 的对应点，同样可作出 B，C 的对应点 B'，C'，则 $\triangle A'B'C'$ 就是正 $\triangle ABC$ 的对应图形。



（2）同理可作出正方形$ABCD$的对应图形。

1．10　设透视仿射变换T由对应轴g和一对对应点$A\longrightarrow A'$决定，在平面上任取一点P，求作点T（P）和T^{-1}（P）。

解　首先将P视为原象点，连结AP交轴g于X，过P作AA'的平行线交$A'X$于P'，则P'就是P的象点，即T（P）$=P'$。其次将P视为象点，连结$A'P$交轴g于Y，过P作AA'的平行线交AY于P^*则P^*就是P的原象点，即T^{-1}（P）$=P^*$



若 $AP \parallel g$ 或 $A'P \parallel g$，用教材中的方法可求出丅（P）或丅$^{-1}$（P）。

1．11 在仿射变换下，试求向量的变换式。

解 设点 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$ 经仿射变换变为点 $M'(x_1', y_1')$，$N'(x_2', y_2')$，于是向量 $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ 经过仿 变换变为 $\vec{u}'=\overrightarrow{M'N'}$，其中 $\vec{u}=(u_1, u_2)$

$=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，

$\vec{u}'=(u_1', u_2')=(x_2'-x_1', y_2'-y_1')$

设点的仿射变换式为

$$\begin{cases} x'=ax+by+h \\ y'=cx+dy+k \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

则有
$$\begin{cases} x_i'=ax_i+by_i+h \\ y_i'=cx_i+by_i+k \end{cases} \quad (i=1, 2)，$$

$$\therefore \begin{cases} x_2'-x_1'=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1) \\ y_2'-y_1'=c(x_2-x_1)+d(y_2-y_1) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} u_1'=au_1+bu_2 \\ u_2'=cu_1+du_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

这就是仿射变换下向量的变换式。

1．12 试用代数方法证明：不共线的三对对应点决定一个仿射变换。

证明 设仿射变换式为：

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & b \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

要决定仿射变换，只须确定（1）式中的参数 a，b，c，d，h，k。

设三对对应点的坐标分别为 $A(x_1, y_1) \longrightarrow A'(x_1', y_1')$ $B(x_2, y_2) \longrightarrow B'(x_2', y_2')$，$C(x_3, y_3) \longrightarrow C'(x_3', y_3')$ 将每对对应点的坐标代入（1）式得

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + by_1 + h \\ x_2' = ax_2 + by_2 + h \\ x_3' = ax_3 + by_3 + h \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} y_1' = cx_1 + dy_1 + k \\ y_2' = cx_2 + dy_2 + k \\ y_3' = cx_3 + dy_3 + k \end{cases} \qquad (3)$$

已知 A、B、C、不共线，A'、B'，C'不共线，因此

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

所以x_1'，x_2'，x_3'不全为0，y_1'，y_2'，y_3'也不全为0，从

而方程组（2）可决定唯一一组不全为零的解，a、b、h 同样方程组（3）可决定唯一一组非零解c、d，k，所以不共线的三对对应点唯一决定一个仿射变换。还须证明这样决定的仿射变换式（1）的系数行列式不为零。

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1+by_1+h & cx_1+dy_1+k & 1 \\ ax_2+by_2+h & cx_2+dy_2+k & 1 \\ ax_3+by_3+h & cx_3+dy_3+k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ h & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

标据（4）式得 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

1．13　试用仿射变换式探求：园经过仿射变换变成什么图形？

解　设欧氏几何中园的方程为

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (r>0)$$

将仿射变换式

$$\begin{cases} x = ax' + by' + h' \\ y = cx' + dy' + k \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

代入园方程得

$$(ax' + by' + h)^2 + (cx' + dy' + k)^2 = r^2$$

即 $(a^2 + c^2)x'^2 + 2(ab + cd)x'y' + (b^2 + d^2)y'^2$

$+ 2(ah + ck)x' + 2(bh + dk)y' + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

这就是园经过仿射变换变成的图形的方程。

$I_1 = (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) > 0$

$I_2 = (ad - bc)^2 > 0$

$I_3 = -r^2(ad - bc)^2 < 0$

$\therefore I_1 \cdot I_3 < 0$，因此园经仿射变换变为常态 椭园。

1.14 已知仿射变换 $x' = 2x - 3y + 5$，

$y' = x + 3y - 7$，求

（1）点 $A(3, 2)$，$B(1, -4)$ 的象点；

（2）点 $O(0, 0)$，$B(1, -4)$ 的原象点；

（3）直线 $3x - y + 4 = 0$ 的象直线；

（4）直线 $3x - y + 4 = 0$ 的原象直线。

解 （1）将 $x = 3$，$y = 2$ 代入变换式得 $x' = 5$，$y' = 2$，$\therefore A$ 的象点为 $A'(5, 2)$，同样可求得 B 的象点为 $B'(19, -18)$。

（2） 解方程 $\begin{cases} 0 = 2x - 3y + 5 \\ 0 = x + 3y - 7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{19}{9} \end{cases}$

∴点O的原象点为$(\frac{2}{3}、\frac{16}{9})$

求出逆变换式

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}(x'+y'+2) \\ y=\frac{1}{9}(-x'+2y'+19) \end{cases}$$

将$x'=1$，$y'=4$　代入计算得$x=-\frac{1}{3}$．$y=\frac{10}{9}$

∴点B的原象点为$(-\frac{1}{3},\frac{10}{9})$

（3）　将逆变换式代入$3x-y+4=0$整理得象直线$10x'+7y'+35=0$

（4）　$3x'-y'+4=3(2x-3y+5)$

$-(x+3y-7)+4=5x-12y+26$

∴原象直线为$5x-12y+26=0$

1．15　求仿射变换式，它使直线$x-2y+1=0$上每个点都不动，且使点（0，1）变为点（－1，2）

解　在直线$x-2y+1=0$上取两点（－1，0）和（1，1），设所求仿射变换式为

$$T:\begin{cases} x'=ax+by+h \\ y'=cx+dy+k \end{cases}$$

它使得　$(-1,0)\longrightarrow(-1,0)$，

$(1,1)\longrightarrow(1,1)$，$(0,1)\longrightarrow(-1,2)$

将这三双对应点的坐标代入T得

$$\begin{cases} -1=-a+h \\ 0=-c+k \end{cases} \quad \begin{cases} 1=a+b+h \\ 1=c+d+k \end{cases} \quad \begin{cases} -1=b+h \\ 2=d+k \end{cases}$$

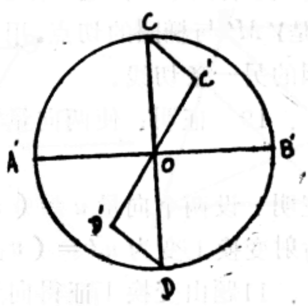
解 $\begin{cases} -1=-a+h \\ 1=a+b+h \\ -1=b+h \end{cases}$ 得 $a=2$，$b=-2$，$h=1$

解 $\begin{cases} 0=-c+k \\ 1=c+d+k \\ 2=d+k \end{cases}$ 得 $c=-1$，$d=3$，$k=-1$，

∴所求仿射变换式为 $\begin{cases} x'=2x-2y+1 \\ y'=-x+3y-1 \end{cases}$

1．18 试证：任取两个互相平分的线段可作为它们所确定的椭园共轭直径。

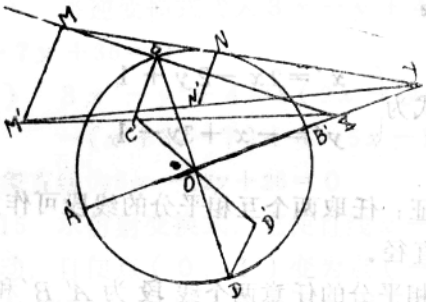
证明 设互相平分的任意两个线段为 $A'B'$ 和 $C'D'$，交点为 O。以 $A'B'$ 为直径作一个⊙O，作直径 $CD \perp A'B'$，在以 $A'B'$ 为对应轴，CC' 为透视仿射方向的透视仿射变换下，⊙O上的点 A'、B'、C、D 变为椭园上的点 A'、B'



C'、D'，即⊙O 的一对共轭直径$A'B'$，CD变为椭园的一对共轭直径$A'B'$、$C'D'$。

1．17 已知椭园的一对共轭直径，试从已知点作椭园的切线。

解 设椭园的一对共轭直径为$A'B'$、$C'D'$，已知点为M'。以$A'B'$为直径作一园，与以$A'B'$为直径的椭园仿射对应。连$C'M'$交$A'B'$于X，过M'点作CC'的平行线与直线XC交于M，则M是M'的对应点。过M作园的切线交$A'B'$于Y，连YM'，则YM'就是所求的切线。



若YM切园于N，过N作CC'的平行线交YM'于N'，则N'是YM'与椭园的切点。用上面的方法可自行作出过M'的椭园的另一条切线。

1．19 证明：使两向量数性积不变的仿射变换是正交变换。

证明 设两个向量$u=(u_1, u_2)$，$v=(v_1, v_2)$经过仿射变换L变为$u'=(u_1', u_2')$，$v'=(v_1', v_2')$前面1．11题由变换T证得向量的变换式为

$$\begin{cases} u_1'=au_1+bu_2 \\ u_2'=cu_1+du_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore 有 \begin{cases} v_1'=av_1+bv_2 \\ v_2'=cv_1+dv_2 \end{cases}$$

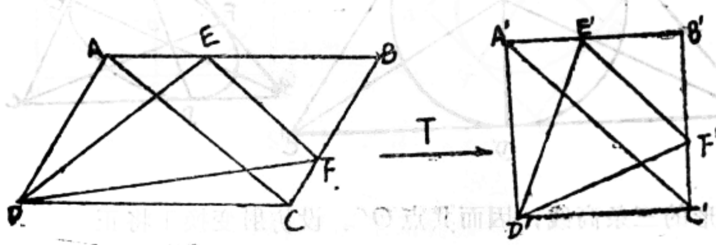
$\vec{u'}\cdot\vec{v'}=u_1'\cdot v_1'+u_2'\cdot v_2'=(au_1+bu_2)(av_1+bv_2)+(cu_1+du_2)(cv_1+dv_2)=(a^2+c^2)u_1v_1+(b^2+d^2)u_2v_2+(ab+cd)(u_1v_2+u_2v_1)$

由题设 $\vec{u'}\cdot\vec{v'}=u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2$

$$\therefore \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

这表明变换T满足正交条件，故仿射变换T是正交变换。

1．20 在平行四边形$ABCD$中，设对角线AC的平行线交AB于E，交BC于F，试证$\triangle AED$与$\triangle CFD$的面积相等。



证明 可作一个正方形$A'B'C'D'$与平行四边形$ABCD$成仿射对应（$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$确定仿射对应T，由于T保平行性、结合性知T使$D\longrightarrow D'$），设T使$E\longrightarrow E'$ $F\longrightarrow F'$，$\because EF\parallel AC$ $\therefore E'F'\parallel A'C'$，

$\therefore A'E'=C'F'$， $\therefore \triangle A'E'D'\cong\triangle C'F'D'$

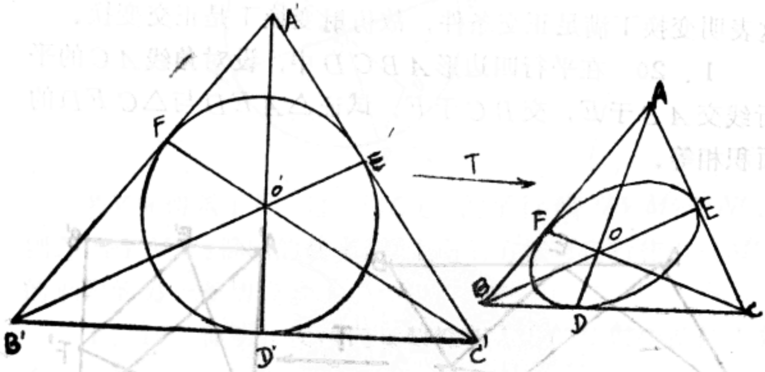
由§1．2定理4， $S_{\triangle A'E'D'}=KS_{\triangle AED}$，

$S_{\triangle C'F'D'}=KS_{\triangle CFD}$

$$\therefore \quad S_{\triangle AED}=S_{\triangle CFD}$$

1．21 试证：椭圆的外切三角形ABC的顶点与对边上切点的连线交于一点。

证明 设正$\triangle A'B'C'$的内切圆与三边切于点D'、E' F'，顶点与对边切点的连线$A'D'$、$B'E'$、$C'F'$是正三



角形的三条高线，因而共点O'。设仿射变换T将正$\triangle A'B'C'$变为$\triangle ABC$，由于T保结合，所以T将正$\triangle A'B'C'$与其内切圆的切点D'、E'、F'变为$\triangle ABC$