思维潜能

小学版

第二册

"中环杯"中小学生思维能力训练活动核心内容解析（二）

"中环杯"思维能力训练活动编委会　编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

思 维 潜 能

（小学版第二册）

——“中环杯”中小学思维能力训练
活动核心内容解析（二）

“中环杯”思维能力训练活动编委会 编

上海交通大學出版社

内容提要

本书是小学版的第二册，按篇、章、节进行编写，内容主要包括数列、常见应用题、行程问题、方程与不定方程、数的整除、数阵问题、平面图形的面积及参考答案。每篇中部分内容包括“中环杯”中小学生思维能力训练活动举办至今的部分核心训练专题，每一专题都由专家举例并讲解，同时设计了具有针对性的训练内容，有助于学生开拓思维能力，掌握解题方法。

图书在版编目(CIP)数据

思维潜能：小学版.第2册/“中环杯”思维能力训练活动编委会编.—上海：上海交通大学出版社，2014

ISBN 978-7-313-12015-1

Ⅰ.①思… Ⅱ.①中… Ⅲ.①小学数学课—课外读物 Ⅳ.①G524.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第225671号

思维潜能：小学版第二册

——“中环杯”中小学思维能力训练活动核心内容解析(二)

编　　者：“中环杯”思维能力训练活动编委会

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

出 版 人：韩建民

印　　制：上海景条印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：10.5　　插　　页：1

字　　数：250千字

版　　次：2014年10月第1版　　印　　次：2014年10月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-12015-1/G

定　　价：35.00元

前　言

“中环杯”中小学生思维能力训练活动由上海青少年思维能力训练活动组委会主办，从2001年举办至今。活动将思维训练和动手动脑紧密联系起来，让学生将课本知识和实践能力融会贯通，为提高中小学生的综合素质起到了十分重要的作用。活动举办至今，每年都受到学校、学生、家长及社会各界的普遍欢迎，在学生中引发了思维训练活动热潮。“中环杯”思维能力训练活动正在成为华东地区乃至全国青少年中有重要影响力的品牌活动。

为了能让更多的中小学生参与到此项活动中来，为他们提供参加活动和提高能力的参考，应广大中小学生、教师及家长的要求，我们邀请部分数学专家编写了《思维潜能》丛书。丛书分小学版和中学版，本书是小学版第二册。本书按篇、章、节进行编写，共有3篇。每篇中部分内容由专家对历届“中环杯”中学生思维能力训练活动的部分核心训练专题进行举例并作深入浅出的讲解，且很多例题中，一题多解，列举了多种形式的思维方式，有助于学生开拓思维能力，掌握新的解题方法。

本书还在每一章节最后精心设计了训练内容，相信通过这些核心知识的学习和训练，能引导学生作规律性的探讨，从中得到启迪，熟悉思维训练的方法。

本书中难免会有不足之处，欢迎大家批评指正。

编　者

目　录

第一章　数　　列

数列的概念:按一定规律排列起来的一列数叫做数列。数列的几个重要名词:

数列的项:数列中的每一个数都叫做这个数列的项。

首项:排在第一位的数称为这个数列的第 1 项,即首项。

排在第二位的数称为这个数列的第 2 项

……

排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项。

末项:在有限项的数列中,最后一个数称为末项。

从第 2 项起,每一项都大于它的前一项的数列叫做**递增**数列;

如:1,2,3,4,5,6,7。

从第 2 项起,每一项都小于它的前一项的数列叫做**递减**数列;

如:8,7,6,5,4,3,2,1。

从第 2 项起,有些项大于它的前一项,有些项小于它的前一项的数列叫做**摆动**数列;

如:1,3,2,4,3,5。

第一节　几个重要的数列

(本部分适合所有年级的学生)

首先要认识一些重要的并且简单的数列,还要学习找出数列的排列规律,利用这些规律把数列中缺少的数写出来,最后还要学习解答一些涉及数列知识的实际问题。

几个重要的数列:等差数列、等比数列、斐波那契数列、卢卡斯数列、双重数列。

1. 等差数列

一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数,这个数列就叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用字母d表示,前n项的和用S_n表示。

例如:2,5,8,11,14,17,20。

从第2项开始,每一项与它的前一项的差等于3,则这个数列就是等差数列,3就是这个等差数列的公差,即$d=3$。

2. 等比数列

一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的比(商)等于同一个常数,这个数列就叫做等比数列。这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母q表示。

例如:1,2,4,8,16,32。

从第2项开始,每一项与它的前一项的比(商)是2,这个数列就叫做等比数列。这个常数3叫做这个等比数列的公比,即$q=2$。

3. 双重数列

双重数列是指两个数列交替排在一起而形成的一种数列。位于奇数项的数字构成一种规律,位于偶数项的数字构成另一种规律。

例如:1，2，4，4，16，6，64，……

4. 斐波那契数列

它的发明者,是意大利数学家列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci)。他在一本题为《算盘书》的数学著作中提出下面一个有趣的问题:兔子出生以后两个月就能生小兔,若一对兔子(一雌一雄),每个月不多不少恰好能生一对小兔子,假如养了初生的小兔一对,试问一年后共有多少对兔子(如果生下的小兔都不死)?

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子数(对)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

这样每个月兔子的数量(对)形成了一个数列:1，1，2，3，5，8，13，21，34，……就是斐波那契数列。

从第 3 项开始,每一项是它的前两项的和。

我们还发现,偶数项的平方 = 前一项 × 后一项的积 − 1;

奇数项(大于第 2 项)的平方 = 前一项 × 后一项的积 + 1。

5. 卢卡斯数列

卢卡斯数列就是以 1，3 为前两项的斐波那契数列,前十项为 1，3，4，7，11，18，29，47，76，123。

6. 杨辉三角(见图 1 - 1)

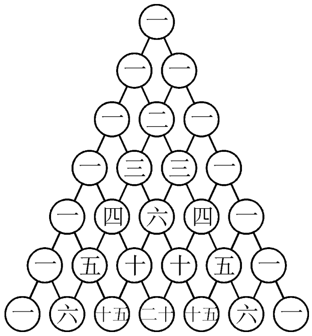


图 1 - 1

中国古代数学家在数学的许多重要领域中处于遥遥领先的地位。中国古代

数学史曾经有自己光辉灿烂的篇章,而杨辉三角的发现就是十分精彩的一页。

从中我们可以发现3个明显的规律:

(1) 每行数字左右对称,由1开始逐渐变大,然后变小,回到1。

(2) 第n行的数字个数为n个。

(3) 每个数字等于上一行的左右两个数字之和。

(实际上还有很多规律,有兴趣的同学可以继续进行探索。)

找寻数列的规律,通常找寻各项与项数间的关系,或者考虑相邻项之间的关系。然后归纳总结出一般规律。

例1 观察下面数列,找出其中的规律,并根据规律在括号中填上合适的数。

(1) 1, 3, 5, 7, (　　), 11, 13。

(2) 19, 17, 15, 13, (　　), 9, 7。

解析 (1) 不难看出,从第2项开始,每一项减去它前面一项所得的差都等于2。因此,括号中应填的数是9,即:$7+2=9$。

(2) 同(1)考虑,后一项比前一项小2,所以括号中应填$13-2=11$。

答案 (1) 9; (2) 11。

说明 我们把(1)和(2)联系起来继续观察,容易看出:数列(1)中,随项数的增大,每一项的数值也相应增大,即数列(1)是递增的;数列(2)中,随项数的增大,每一项的数值却依次减少,即数列(2)是递减的。除了这个不同点之外,这两个数列有个共同的性质:即相邻两数的差都是一个定值,我们把类似这样的数列称为等差数列。

例2 观察下面数列,找出其中的规律,并根据规律在括号中填上合适的数。

1, 3, 9, 27, (　　), 243。

解析 这个数列中,从相邻两项的差是看不出明显的规律的,但是从第2项开始,每一项都是其前面一项的3倍。即:$3=1\times3$, $9=3\times3$, $27=9\times3$。因此,

括号中应填 81，即$81=27\times3$，验证后面 243 也符合规律，即 $243=81\times3$。

明显看出是一个等比数列。

答案 81。

例 3 观察下面数列，找出其中的规律，并根据规律在括号中填上合适的数。

(1) 1，4，9，16，(　　)，36，49，64，81。

(2) 0，3，8，15，24，(　　)，48，63，80。

(3) 2，3，5，8，12，17，(　　)，30，38。

解析 (1) 这是一个特殊的数列，每项都等于自身项数的平方，即项数乘项数的积。

$1=1\times1$，$4=2\times2$，$9=3\times3$，$16=4\times4$，$49=7\times7$，$64=8\times8$，$81=9\times9$。

因此括号中应填 25，即 $25=5\times5$。

(2) 仔细观察，发现本数列的规律是 每一项 = 项数 × 项数 − 1。所以，第 6 项括号即为$6\times6-1=35$，括号里填 35。

(3) 仔细观察和比较，可以发现，第 1 项与第 2 项的差是 1，第 2 项与第 3 项的差是 2，第 3 项与第 4 项的差是 3，……即第 n 项加上 n 就等于它后面的一项，于是第 6 项 17 加上 6 就等于第 7 项，括号里应填 23。

答案 (1) 25； (2) 35； (3) 23。

例 4 观察下面数列，找出其中的规律，并根据规律在括号中填上合适的数。

2，1，4，3，6，9，8，27，10，(　　)。

解析 前面的方法均不适用于这个数列。在观察的过程中，可以发现，本数列中的某些数是很有规律的，如 2，4，6，8，10，而它们恰好是在第 1 项，第 3 项，第 5 项，第 7 项和第 9 项，所以不妨把这个数列分为奇数项(第 1，3，5，7，9 项)和偶数项(第 2，4，6，8，10 项)来考虑，分别得到：

奇数项:2,4,6,8,10,奇数项为等差数列,$d=2$;

偶数项:1,3,9,27,(　　),偶数项为等比数列,$q=3$。因此括号里应填81(即 $27\times3=81$)。

答案　81。

例 5　下面每个括号里两个数按一定规律组合,在□里填上适当的数。

(9,13),(17,5),(14,8),(□,16)。

解析　仔细观察,每组数(以括号里的两个数为一组)之间的规律是:每组中两个数的和都是 22。所以空格中应填的数为 $22-16=6$。

答案　6。

例 6　下面数列的每一项都是由 3 个数组成的数组,它们依次是(1,3,5),(2,6,10),(3,9,15),……问:第 2 015 个数组内 3 个数的和是多少?

解析 1　通过观察发现,把每个数组看成一项,每个数组内第一个数等于项数,第二个数等于项数的 3 倍,第三个数等于项数的 5 倍。那么第 2 015 个数组应该是(2 015,6 045,10 125),求和得解。

解析 2　尝试求每个数组的和,第一个数组的和是 9,第二个数组的和是 18,第三个数组的和是 27,……仔细观察,发现每个数组的和等于该数组的项数乘 9。那么,2 015 个数组的和就等于 2 015 乘 9。

答案　18 135。

例 7　在下面各题的五个数中,选出与其他四个数规律不同的数,并把它划掉,再从括号中选一个合适的数替换。

(1) 42,20,18,48,24(21,54,45,10)。

(2) 15,75,60,45,27(54,70,30,18)。

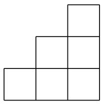
解析　(1)中 42,18,48,24 都是 6 的倍数,只有 20 不是,所以,划掉 20,用 54 代替。

(2)中 15,75,90,45 都是 15 的倍数,只有 27 不是,所以,划掉 27,用 30 代替。

答案 （1）划掉20,选54。 （2）划掉27,选30。

例8 按规律在横线上画图。

解析 通过观察和比较,可以看出已知三个图中的规律:第一幅图,是1个方块;第二幅图,是分两层,1＋2个方块;第四幅图,是分四层,1＋2＋3＋4个方块。根据规律第三幅图应该是分三层,1＋2＋3个方块。而且三幅图的方块在叠放时都是右侧对齐。

答案 

【实战练习1－1】

1. 按一定规律在括号中填上适当的数。

（1）1，2，3，4，5，（ ），7，……

（2）100，95，90，85，80，（ ），70，……

（3）1，2，4，8，16，（ ），64，……

（4）2，1，3，4，7，（ ），18，29，47。

（5）1，2，5，10，17，（ ），37，50。

（6）1，8，27，64，125，（ ），343。

（7）1，9，2，8，3，（ ），4，6，5，5。

（8）$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{16}$，$\frac{3}{22}$，$\frac{4}{28}$，…，$\frac{(\quad)}{58}$。

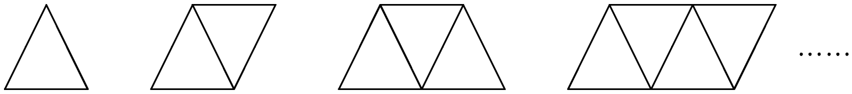
2. 下面括号里的两个数是按一定规律组合的,根据规律在□里填上适当的数。

（1）（8，7），（6，9），（10，5），（□，13）。

（2）（1，3），（5，9），（7，13），（9，□）。

3. 下面的4个图形都是由相同的小棒拼成。根据前4个图形的排列规律,第5

个图形由(　　)根小棒拼成。



4. 找规律,在□里填上适当的数。

1

2　4

3　6　9

4　8　12　16

5　□　□　□　□

6　12　□　□　□　□

5. 找规律,在下数列括号内填上适当的数。

9,16,29,48,(　　),104,141。

第二节　等差数列(一)

(本部分适合四五年级)

前面介绍了什么是等差数列,以及等差数列中的几个重要名词:首项 a_1、末项 a_n、公差 d、项数 n。

本节就要深入研究等差数列的各种问题。

1. 等差数列的通项式

等差数列中各项用一个含有它的项数的算式表示,这个算式称为等差数列的通项式。

等差数列的一般通项式:

$$a_n = a_1 + d \times (n-1)$$

例 1　请写出 1,3,5,7,9,……的通项式。

解析　我们可以看出,首项 $a_1 = 1$,公差 $d = 2$,因此这个等差数列的通项式就是

$$a_n = 1 + 2 \times (n - 1)。$$

例 2　求等差数列 1，6，11，16，……的第 20 项。

解析　首项 $a_1 = 1$，公差 $d = 6 - 1 = 5$，可写出通项式：

$$a_n = 1 + 5 \times (n - 1),$$

利用通项式可以得到第 20 项 $a_{20} = 1 + 5 \times (20 - 1) = 96$。

一般情况下，如果知道了通项式中的两个量就可以求另外一个量。

由通项公式，我们可以得到项数公式：

$$\text{项数 } n = (a_n - a_1) \div d + 1$$

（这个公式和植树问题有一些相关，同学可以思考一下）

例 3　已知等差数列 2，5，8，11，14，……问 47 是其中第几项？

解析　首项 $a_1 = 2$，公差 $d = 5 - 2 = 3$，则利用项数公式可得：

$$n = (47 - 2) \div 3 + 1 = 16。$$

答案　第 16 项。

同样利用通项式，我们还可以求公差。

例 4　如果一个等差数列的第 4 项为 21，第 6 项为 33，求它的第 8 项。

解析　解此类题有点类似于植树问题。要求第 8 项，必须先知道公差。

因为，第 4 项与第 6 项之间相差了 2 个公差，所以公差

$$d = (33 - 21) \div (6 - 4) = 6。$$

由于从第 6 项到第 8 项加了 2 个公差，因此只需要从第 6 项开始计算，即

$$a_8 = a_6 + 2 \times d = 33 + 2 \times 6 = 45。$$

答案　45。

2. 等差数列求和的方法

许多同学都知道这样一个故事：大数学家高斯在很小的时候，就利用巧妙的

算法迅速计算出从 1 到 100 这 100 个自然数的总和。大家在佩服和赞叹之余，有没有仔细想过，高斯为什么算得这么快呢？除了高斯的聪明和善于观察外，更重要的是，这些数字是非常有规则的排列在一起，每个数都比前一个数大 1，这就形成了一个基本的等差数列。高斯利用基本的数学思想就解决了这个问题。

接着就来研究一下这个问题。

例 5 $1+2+3+\cdots+98+99+100=?$

解析 首先应该想到的是，很多个加数的计算，我们应该想办法把它变成乘法，乘法是加法的一种简便算法。但乘法是若干个相同加数的和，这里如何把这些加数变为相同的数，这就是解这道题的巧妙所在。

方法 1：通过观察，发现数列中的数有这样的关系：

$1+100=101$，

$2+99=101$，

$3+98=101$，

……

有多少个 101 呢？因为一共有 100 个数，一头一尾开始两个数组成一组，所以一共有 $100\div 2=50$(组)。即 $101\times 50=5\,050$。

方法 2：我们将等差数列写两次，“正”的写一次，“反”的写一次，构造出一个新的算式，新算式的结果是原来算式的结果的 2 倍。然后按下面的方式进行计算，

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & 98 & 99 & 100 \\ + & 100 & 99 & 98 & 97 & 96 & \cdots\cdots & 3 & 2 & 1 \\ \hline & \multicolumn{9}{c}{\underbrace{101\quad 101\quad 101\quad 101\quad 101\quad \cdots\cdots\quad 101\quad 101\quad 101}_{100\text{ 个 }101}} \end{array}$$

$(1+100)\times 100\div 2=5\,050$。

由此可以得出等差数列求和公式：等差数列的和＝(首项＋末项)×项数÷2，即

$$S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$$

例 6　计算 $1+5+9+13+\cdots+2\,001$。

解析　因为 1，5，9，13，…，2 001 是一个等差数列，

因为首项 $a_1=1$，末项 $a_n=2\,001$，公差 $d=5-1=4$，

所以项数
$$n=(2\,001-1)\div4+1=501。$$

即
$$原式=(1+2\,001)\times501\div2=501\,501。$$

例 7　从 1 到 2 000 的自然数中，求所有偶数之和与所有奇数之和的差。

解析　根据题意可以列出算式：

$$(2+4+6+\cdots+2\,000)-(1+3+5+\cdots+1\,999)。$$

方法 1：因为算式中前后两个括号内都是等差数列的求和，所以利用等差数列求和方法分别计算出两个括号的结果，然后再相减。

$$原式=(2+2\,000)\times1\,000\div2-(1+1\,999)\times1\,000\div2=1\,000。$$

方法 2：我们注意到这两个等差数列的项数相等，公差相等，如果把第一个括号和第二个括号中的数，依次对应相减，差都得 1，所以 1 000 次对应相减的差就是 1 000 个 1，

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots\cdots & 1\,998 & 2\,000\\
- & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots\cdots & 1\,997 & 1\,999\\
\hline
 & \multicolumn{8}{c}{\underbrace{1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad \cdots\cdots\quad 1\quad 1}_{1\,000个1}}
\end{array}$$

即
$$原式=1\,000\times1=1\,000。$$

例 8　求 100 以内所有被 5 除余 1 的自然数的和。

解析　100 以内被 5 除余 1 的自然数中，最小的是 1，最大的是 96，把这些数写出来是：1，6，11，16，21，…，96。这是一个首项是 1，末项是 96，公差是 5 的等差数列。

因为项数
$$n=(96-1)\div5+1=20(项)，$$

根据题意列式：
$$S_n=1+6+11+16+\cdots+96=(1+96)\times20\div2=970。$$