三导丛书

高等数学（同济·第四版）

导教·导学·导考

（上册）

符丽珍 等编

- 重要内容提要
- 重点知识结构图
- 常考题型分析
- 考研典型题精解
- 学习效果两级测试题
- 课后习题全解

西北工业大学出版社

三导丛书

高等数学

（同济·第四版）

导教·导学·导考

（上册）

符丽珍　刘克轩　肖亚兰
王雪芳　杨月茜　陆　全　编

西北工业大学出版社

幅所限，对超出教学基本要求的标 * 号的内容，仅对欧拉方程一节

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导教·导学·导考/符丽珍等编.--西安:西北工业大学出版社,2001.9

ISBN 7-5612-1377-8

Ⅰ.高… Ⅱ.符… Ⅲ.高等数学--高等学校--教学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 054220 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号　邮编:710072　电话:029-8493844

网　　址:http://www.nwpup.com

印 刷 者:西安市向阳印刷厂

开　　本:850mm×1 168mm　1/32

印　　张:19.25

字　　数:674 千字

版　　次:2001 年 11 月第 1 版　2002 年 3 月第 2 次印刷

印　　数:5 001～13 000 册

定　　价:全书:25.00 元　本册:13.00 元

前 言

高等数学课程是理工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了满足广大读者学习和考研复习的需要，更好地帮助广大读者学好高等数学课程，我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的章节顺序，分为十二章，每章均设计了五个板块。

一、重要内容提要　列出了基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

二、重点知识结构图　用框图形式列出，并指出了各知识点的有机联系。

三、常考题型及考研典型题精解　从历年本科生期末试题和历年研究生入学统考试题中精选出典型题目，并进行了解答。

四、学习效果两级测试题　（一）基础知识测试题及答案；（二）考研训练模拟题及答案。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力设计的，通过两级测试，读者可以进一步加深对所学内容的理解，增强解题能力。

五、课后习题全解　对同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的课后习题（含各章总习题）全部做了详细解答。因篇幅所限，对超出教学基本要求的标 * 号的内容，仅对欧拉方程一节的习题作了解答。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法，解题规律和解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力，理解基本概念和理论，开拓解题思路，全面增强数学素质，会

收到良好的效果。对于课后习题，希望读者在学习过程中先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答。

全书共分上、下两册，分别由符丽珍（编写第一至三章）、刘克轩（编写第四至六章）、肖亚兰（编写第七章）、王雪芳（编写第八、九章）、杨月茜（编写第十、十一章）、陆全（编写第十二章）分工执笔编写，由符丽珍负责统稿。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2001 年 3 月

于西北工业大学

目　　录

上　　册

第一章　函数与极限

一、重要内容提要

(一)函数概念

1. 函数的几种特性

(1) 有界性：$|f(x)|\leqslant M,\forall\ x\in X\subset D.$

(2) 单调性：$x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\leqq f(x_2),\forall\ x_1,x_2\in D.$

(3) 奇偶性：$f(-x)=\pm f(x),\forall\ x,-x\in D.$

(4) 周期性：$f(x+L)=f(x),\forall\ x,x\pm L\in D.$

2. 基本初等函数，初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

(二)数列极限

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon.$

2. 收敛数列的性质

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必惟一．

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界．

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子数列也收敛于 a.

3. 数列收敛性的判别定理

(1) 夹逼定理.

(2) 单调有界数列必有极限.

(三)函数极限

1. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0, \exists\ X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 左极限、右极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

3. 极限的局部保号性

(四)无穷小与无穷大

1. 无穷小

(1)定义:以零为极限的变量称作无穷小量.

(2)无穷小的阶:设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases} 0 & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小,记作 } \beta=o(\alpha) \\ \infty & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小} \\ c\neq 0 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小} \\ 1 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小,记作 } \alpha\sim\beta \end{cases}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$,称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(3)无穷小的运算性质:有限个无穷小的和仍为无穷小.有限个无穷小的乘积仍为无穷小.无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.求两个无穷小之比的极限时,分子及分母可用等价无穷小来代替.

2. 无穷大

绝对值无限增大的变量叫无穷大.无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,反之无穷大的倒数为无穷小.

(五)两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$(或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$).

(六)函数的连续性

1. 定义:若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 闭区间上连续函数的性质

①有界性;②最值定理;③介值定理;④零点存在定理.

3. 函数的间断点

(1)第一类间断点：左、右极限都存在的间断点，有可去间断点及跳跃间断点.

(2)第二类间断点：左、右极限不都存在的间断点，有无穷间断点及振荡间断点.

二、重点知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义(定义域，对应规则)
    - 性质(有界性，单调性，奇偶性，周期性)
    - 复合函数(中间变量，复合函数的分解)
    - 反函数
    - 初等函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限
        - $\varepsilon - N$ 定义
        - 收敛数列的性质
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\varepsilon - X$ 定义
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\varepsilon - \delta$ 定义
    - 极限存在准则
      - 单调有界数列必有极限
      - 夹逼准则
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 性质
      - 阶的比较
    - 连续与间断
      - 定义
      - 间断点的分类
      - 闭区间连续函数的性质

三、常考题型及考研典型题精解

例 1-1(1988 考研)　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解　因为 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$ 即 $x\leqslant 0$.

所以 $$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)} \quad x\leqslant 0$$

例 1－2(1987 考研) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

解 应选(D). 因 $f(x)=f(-x)$.

例 1－3(1987 考研) 函数 $f(x)=x\sin x$(　).

(A) 当 $x\to\infty$时为无穷大　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D) 当 $x\to\infty$时有有限极限

解 应选(C).

例 1－4 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-2\sin\ln(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}\sin\ln(x^2+x)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}}=0$,而 $|\sin\ln(x^2+x)^{\frac{1}{2}}|\leqslant 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}=$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}(x+\sin x)=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\dfrac{a^2}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

例 1－5 设 $x_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\{1+2[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]\}=$$

$$\lim_{n\to\infty}[1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})]=2$$

例 1－6(2000 考研) 求 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]$.

解 因 $\lim\limits_{x\to0^+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim\limits_{x\to0^+}[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}]=1$

$$\lim_{x\to0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim_{x\to0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}]=2-1=1$$

故原式＝1.

例 1－7(1993 考研) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$.

解法 1 令 $x=\frac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin2t}{t}=\frac{6}{5}$$

解法 2 因为当 $x\to\infty$ 时，$\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x}=\frac{6}{5}$$

例 1－8(1993 考研) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}]=$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 1-9(1995 考研)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解　$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

因
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

由夹逼准则,从而原极限$=\frac{1}{2}$.

例 1-10(1999 考研)　设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$$

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[a^1a^2\cdots a^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$$

例 1-11(2000 考研)　设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

解　应选(D). 因$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$与$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$不一定存在.

例 1-12　设 $f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

解　应选(B). 因 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,则

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{3}$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点,且为跳跃间断点.

例 1-13(1990 考研)　已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^{x}=9$,求常数 a.

解　因为 $9=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^{x}=\frac{e^{a}}{e^{-a}}=e^{2a}$,

即 $e^{2a}=9$,从而 $a=\ln 3$.

例 1-14　设 $x_0=1,x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0},\cdots,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n},\cdots$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求出之.

证明　因 $1\leqslant x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2$,从而$\{x_n\}$有界.

$x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0}=\frac{3}{2},x_0=1,x_1>x_0$,设 $x_n>x_{n-1}$,则

$$x_{n+1}-x_n=(1+\frac{x_n}{1+x_n})-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=$$

$$\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$$

从而 $x_n>x_{n-1}$对一切 n 成立,故$\{x_n\}$单调增.

由于$\{x_n\}$单调增,且有界,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $a=1+\frac{a}{1+a},a^2-a-1=0$.

$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,因 $x_n\geqslant1$,舍去 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 1-15(1998 考研)　求 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

解　$f(x)$的间断点为 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=0$ 的点及 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$不存在的点,故 $f(x)$在$(0,2\pi)$的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$处,$f(\frac{\pi}{4}+0)=+\infty$;在 $x=\frac{5\pi}{4}$处,$f(\frac{5\pi}{4}+0)=+\infty$,

故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$为第二类间断点(无穷间断点).

在 $x=\frac{3\pi}{4}$处,$\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}f(x)=1$;在 $x=\frac{7\pi}{4}$处,$\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}f(x)=1$,

故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$为第一类间断点(可去间断点).

例 1-16　当 $x\to1$ 时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

(A) 等于 2　　　　　　(B) 等于 0

(C) 为∞　　　　　　(D) 不存在但不为∞

解　应选(D).

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

例 1－17　已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$,其中 a,b 是常数,则(　　).

(A) $a=1,b=1$　　　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　　　(D) $a=-1,b=-1$

解　应选(C).

由 $$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$$

得 $$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$$

即 $a=1,b=-1$,故(C)项正确.

例 1－18　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)>a,f(b)<b$.

证明:在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=\xi$.

证明　令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[a,b]$上连续,且 $F(a)=f(a)-a>0,F(b)=f(b)-b<0$.

由闭区间上连续函数的零点存在定理,在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

例 1－19　证明方程$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$有分别包含于$(1,2)$,$(2,3)$内的两个实根.

证明　当 $x\neq1,2,3$ 时,用$(x-1)(x-2)(x-3)$去乘方程两端,得

$$(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)=0$$

令 $$f(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$$

则 $f(x)$在$[1,2]$上连续,$f(x)$在$[2,3]$上也连续,

又 $$f(1)=2>0,\quad f(2)=-1<0,\quad f(3)=2>0$$

由闭区间上连续函数的零点存在定理,在$(1,2)$内至少存在一点 ξ_1,使 $f(\xi_1)=0$,在$(2,3)$内至少存在一点 ξ_2,使 $f(\xi_2)=0$,即原方程在$(1,2)$与$(2,3)$内至少各有一个实根.

例 1－20　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,试确定 a,b.

解

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & |x|<1 \\ \dfrac{1}{x} & |x|>1 \\ \dfrac{1+a+b}{2} & x=1 \\ \dfrac{-1+a-b}{2} & x=-1 \end{cases}$$

因 $f(x)$ 为连续函数，所以 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处连续.

而 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx)=a+b$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$

从而 $$a+b=1$$

又 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax^2+bx)=a-b$

从而 $$a-b=-1$$

由于 $a+b=1$，$a-b=-1$，故 $a=0$，$b=1$.

四、学习效果两级测试题

(一)基础知识测试题及答案

1. 选择题

(1)下列各式正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}=e$　　(答案:(A))

(2)当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 有界的，但不是无穷小量

(C) 无穷大　　(D) 无界的，但不是无穷大　　(答案:(D))

(3)设 $f(x)=x^3+4x^2-3x-1$，则方程 $f(x)=0$(　　).

(A) 在(0,1)内没有实根　　(B) 在(−1,0)内没有实根

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内有两个不同实根 (D) 在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同实根

(答案:(C))

(4)如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，无零点，但有使 $f(x)$ 取正值的点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(　　).

(A) 可正可负　　(B) 为正