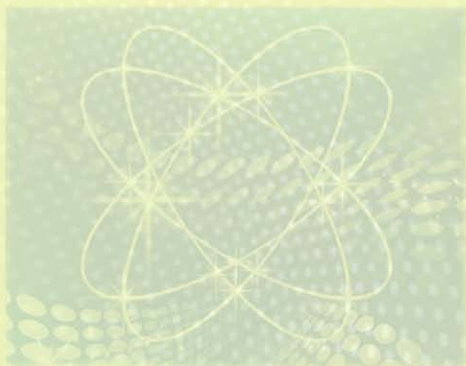


粗集理论及其应用

付海艳 著



湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

粗集理论及其应用/付海艳著

—武汉:湖北科学技术出版社,2010.4

ISBN 978-7-5352-4482-6

I. ①粗… II. ①付… III. ①粗系统—系统理论 IV. ①0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 058397 号

策 划:谢俊波

责任校对:蒋 静

责任编辑:谢俊波

封面设计:喻 杨

出版发行:湖北科学技术出版社

电话:027-87679468

地 址:武汉市雄大街 268 号

邮编:430070

(湖北出版文化城 B 座 12-13 层)

网 址:<http://www.hbstp.com.cn>

印 刷:

邮编:

850×1168 1/32

印张

131 千字

2010 年 4 月第 1 版

2010 年 4 月第 1 次印刷

定价:22.00 元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

内容简介

本书内容分为 7 章,第 1 章介绍了 Z. Pawlak 粗集,作为本书的概念、研究思路的导引。第 2 章、第 3 章分别给出了 Z. Pawlak 粗集的两个应用,第 2 章介绍了 Z. Pawlak 粗集在高校教学质量评价分析中的应用;第 3 章将模糊集理论与粗集理论相结合,提出了一种新的评价模型,并讨论了该模型在区域科技能力评价中的应用。第 4 章至第 7 章展开了对 S-粗集,函数 S-粗集的讨论,逐步给出了 S-粗集、函数 S-粗集的概念和结构,S-粗集与隐藏知识发现,函数 S-粗集与规律预测。这些内容对于粗集的理论研究与应用研究都具有启发性和可借鉴性。

本书适合计算机科学、应用数学、信息科学和管理工程等专业的大学、研究生、教师及科研工作者阅读。

前 言

粗集理论是波兰数学家 Z. Pawlak 于 1982 年提出的一种处理模糊和不确定知识的数学工具。其最大优点就是能有效地分析和处理各种不精确、不一致、不完整等不完备的信息,并从中发现隐含的知识,揭示潜在的规律,具有较强的实用性,已成功地应用于数据挖掘、知识发现、机器学习、决策分析及模式识别等领域。

然而在利用粗集理论研究系统的近似特性时,人们只是研究了系统的静态特性,对于系统的动态特性,人们的研究甚少。Z. Pawlak 粗集是具有静态特性的集合 X 的粗集,这一特性限制了 Z. Pawlak 粗集的广泛应用。为此,山东大学史开泉教授给出动态集合的描述,提出 S-粗集、函数 S-粗集,将粗集应用从静态推广到动态,从数据挖掘推广到规律挖掘。本书将围绕 Z. Pawlak 粗集、S-粗集、函数 S-粗集理论与综合评价、知识隐藏发现、动态经济系统规律预测等,给出研究与讨论。

本书的内容从 Z. Pawlak 粗集的简单介绍开始,逐步给出基于 Z. Pawlak 粗集的评价模型、S-粗集、S-粗集与隐藏知识发现、函数 S-粗集、函数 S-粗集与规律预测的研究。在应用讨论中,给出 FCM-WMRS 评价模型在高校教学质量分析、区域科技能力评价中的应用,给出隐藏知识在系统故障状态发现-识别、利润波动分析中的应用,以及双规律预测在区域经济分析-识别中的应用,这些应用例子都具有实际性和启发性。

本书在编写过程中得到海南师范大学院级重点学科“人工智能与模式识别”的支持。本书的取材是笔者近几年在国际、国内发

表的 20 余篇学术论文,引用的部分科研成果是在国家自然科学基金“基于相似度量的近似推理方法研究”(60364001)、“基于知识粒度空间理论的生态省建设专家支持系统”(70461001),海南省自然科学基金“函数 S 粗集与粗规律挖掘研究”(807054),海南师范大学博士科研启动基金“粗管理与粗管理规律研究”等项目的资助下取得的。

值本书出版之际,衷心感谢我的导师,山东大学史开泉教授对我在粗集领域深入研究的指导;感谢我的导师,海南师范大学张诚一教授将我引入粗集研究领域;感谢郝秀梅博士、胡海清博士、黄顺亮博士和杜英玲硕士,在与他们的讨论与交流中,我受益匪浅;最后感谢湖北科学技术出版社为本书出版给予的支持。

由于笔者学识浅陋,书中难免存在缺点和错误,敬请同行专家指正。我的电子邮箱:yanzi78@163.com,欢迎来信交流。

付海艳

2010 年 3 月于海口

目 录

第 1 章 Z. Pawlak 粗集	1
§ 1.1 等价关系与等价类	1
§ 1.2 Z. Pawlak 粗集与它的结构	3
§ 1.3 集合 X 的下近似与上近似的关系	7
§ 1.4 知识分辨与分辨特性	11
§ 1.5 知识粒度与属性的依赖	20
§ 1.6 重要度与最小约简	31
第 2 章 Z. Pawlak 粗集在高校教学质量评价分析中 的应用	33
§ 2.1 引言	33
§ 2.2 教学质量评价分析模型	34
§ 2.3 实验与分析	37
§ 2.4 结论	40
第 3 章 基于 FCM 和 Z. Pawlak 粗集属性重要度的 评价模型与应用	41
§ 3.1 引言	41
§ 3.2 FCM 算法	42
§ 3.3 基于 Z. Pawlak 粗集理论的属性权重 挖掘方法	48
§ 3.4 FCM-WMRS 评价方法	50
§ 3.5 FCM-WMRS 评价模型在区域科技能力评价中 的应用	50
§ 3.6 实证分析	54
第 4 章 S-粗集	56

§ 4.1	元素迁移 f 与元素迁移 $\bar{f}$	57
§ 4.2	单向 S-粗集	59
§ 4.3	双向 S-粗集	61
§ 4.4	单向 S-粗集对偶	66
第 5 章	S-粗集与隐藏知识发现	68
§ 5.1	F-隐藏知识与它的隐藏依赖	69
§ 5.2	F-隐藏与 F-隐藏依赖在系统故障状态 发现-识别中的应用	77
§ 5.3	$\bar{F}$ -隐藏知识与它的隐藏依赖	80
§ 5.4	$\bar{F}$ -隐藏与 $\bar{F}$ -隐藏依赖在系统状态识别中 的应用	89
§ 5.5	F-隐藏知识与它的隐藏依赖	92
§ 5.6	F-隐藏与 F-隐藏依赖在利润波动分析中 的应用	100
第 6 章	函数 S-粗集	103
§ 6.1	函数单向 S-粗集	105
§ 6.2	函数双向 S-粗集	106
§ 6.3	函数单向 S-粗集对偶	108
§ 6.4	函数 S-粗集与 S-粗集的关系	110
§ 6.5	函数迁移与它的特征	113
§ 6.6	函数粗集与 Z. Pawlak 粗集的关系	114
第 7 章	函数 S-粗集与规律隐藏-预测	121
§ 7.1	引言	121
§ 7.2	隐藏规律与它的隐藏特性	121
§ 7.3	双规律生成与双规律预测模型	126
§ 7.4	动态经济系统的双规律关系模型	129
§ 7.5	动态经济系统的双规律预测算法与误差估计	131
§ 7.6	双规律预测在区域经济分析-识别中的应用	133
参考文献		142

第 1 章 Z. Pawlak 粗集

§ 1.1 等价关系与等价类

定义 1.1.1 设 A, B 为集合, 用 A 中元素为第一元素, B 中元素为第二元素, 构成有序对. 所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡尔积, 记作 $A \times B$, 符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}. \quad (1.1.1)$$

定义 1.1.2 设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系, 特别当 $A = B$ 时, 则称作 A 上的二元关系.

定义 1.1.3 设 U 是元素论域, $R \subseteq U \times U$, 则称 R 为 U 上的二元关系. 对于二元关系 R , 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 则记作 xRy ; 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \not R y$.

定义 1.1.4 设 R 是 U 上的二元关系, 如果对 $\forall x \in U$, 有 $\langle x, x \rangle \in R$, 则称 R 是 U 上的自反关系.

定义 1.1.5 设 R 是 U 上的二元关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $\langle y, x \rangle \in R$, 则称 R 是 U 上的对称关系.

定义 1.1.6 设 R 是 U 上的二元关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 有 $\langle x, z \rangle \in R$, 则称 R 是 U 上的传递关系.

定义 1.1.7 设 R 是 U 上的二元关系, 如果它是自反的、对称

的和传递的,则称 R 为 U 上的等价关系.

例 1.1 若 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3}\}$, 则 R 就是 A 上的等价关系.

定义 1.1.8 设 R 是 U 上的等价关系, 对 $\forall x \in U$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in U \wedge xRy\}, \quad (1.1.2)$$

则称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$.

在例 1.1 中有

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\},$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

定理 1.1.1 设 R 是 U 上的等价关系, 对 $\forall x, y \in U$, 下面的结论成立.

- (1) $[x] \neq \emptyset$, 且 $[x] \subset U$.
- (2) 若 xRy , 则 $[x] = [y]$.
- (3) 若 xRy , 则 $[x] \cap [y] = \emptyset$.
- (4) $\bigcup_{x \in U} [x] = U$.

这里, (1) 表明任何等价类都是集合 U 的非空子集, 比如例 1.1 中 3 个等价类都是 A 的子集. (2) 和 (3) 说明在 A 中任取两个元素, 它们的等价类或是相等, 或是不交. 比如, 在例 1.1 中, 1、4、7 的等价类彼此相等, 都是 $\{1, 4, 7\}$, 但 1 和 2 的等价类彼此不交. (4) 表示所有等价类的并集就是 A , 在例 1.1 中就是

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 5, 8\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, \dots, 8\}.$$

定义 1.1.9 若 $\pi_i (i \leq k)$ 为 U 的子集, 且 $\pi_i \neq \emptyset (i \leq k)$, $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset (i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^k \pi_i = U$, 则称 $\{\pi_i \mid i \leq k\}$ 为 U 的划分.

定理 1.1.2 U 上的等价关系 R 必然产生 U 上的一个划分, U 上的一个划分由 U 上的一个等价关系 R 产生. U 上的等价关系与 U 上的划分一一对应.

证明 设 R 是 U 上的等价关系, 记

$$[x]_R = \{y \mid y \in U \wedge \langle x, y \rangle \in R\}.$$

则有 $\langle x, x \rangle \in R, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$. 当 $y \in [x]_R$ 时, 对于 $\forall z \in [y]_R, \langle z, y \rangle \in R$, 从而 $\langle z, x \rangle \in R$, 即 $z \in [x]_R$, 于是 $[y]_R \subseteq [x]_R$. 类似地可证 $[x]_R \subseteq [y]_R$, 从而 $[x]_R = [y]_R$. 当 $y \notin [x]_R$ 时, $\langle x, y \rangle \notin R$, 从而 $x \notin [y]_R$, 于是 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. 显然有 $\bigcup_{x \in U} [x]_R = U$. 于是产生了 U 上的一个划分, 一般记作

$$U/R = \{[x]_R \mid x \in U\}.$$

反之, 若

$$\pi = \{\pi_i \mid i \leq k\}$$

是 U 的划分, 记

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid \text{存在 } i \leq k, \text{ 使 } x, y \in \pi_i\}.$$

易证 R 是 U 上的等价关系, 且当 $x \in \pi_i$ 时, $[x]_R = \pi_i$.

例 1.1 中的等价关系对应于划分: $\pi_1 = \{1, 4, 7\}, \pi_2 = \{2, 5, 8\}, \pi_3 = \{3, 6\}$.

§ 1.2 Z. Pawlak 粗集与它的结构

1982 年, 波兰数学家 Z. Pawlak 提出粗集, 给出粗集的结构: 设 U 是有限元素论域, R 是 U 上的元素等价关系, $[x]$ 是 R -元素等价类, 任取 U 上的元素集 $X, X \subseteq U, X \neq \emptyset$.

定义 1.2.1 称 $R_-(X)$ 是 X 的下近似, 而且

$$\begin{aligned} R_-(X) &= \bigcup [x] \\ &= \{x \mid x \in U, [x] \subseteq X\}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

定义 1.2.2 称 $R^-(X)$ 是 X 的上近似, 而且

$$\begin{aligned} R^-(X) &= \bigcup [x] \\ &= \{x \mid x \in U, [x] \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

定义 1.2.3 由 $R_-(X), R^-(X)$ 构成的集合对

$$(R_-(X), R^-(X)) \quad (1.2.3)$$

称作 X 的 R -粗集, 简称 X 的粗集.

定义 1.2.4 称 $\text{bn}_R(X)$ 是 X 的 R -边界, 而且

$$\text{bn}_R(X) = R^-(X) - R_-(X). \quad (1.2.4)$$

定义 1.2.5 称 $\text{pos}_R(X)$ 是 X 的 R -正域, 而且

$$\text{pos}_R(X) = R_-(X). \quad (1.2.5)$$

定义 1.2.6 称 $\text{neg}_R(X)$ 是 X 的 R -负域, 而且

$$\text{neg}_R(X) = U - R^-(X). \quad (1.2.6)$$

$R_-(X)$ 或 $\text{pos}_R(X)$ 是由那些根据知识 R 判断肯定属于 X 的 U 中元素组成的集合; $R^-(X)$ 是那些根据知识 R 判断可能属于 X 的 U 中元素组成的集合; $\text{bn}_R(X)$ 是那些根据知识 R 既不能判断肯定属于 X 又不能判断肯定属于 $\sim X$ (即 $U - X$) 的 U 中元素组成的集合; $\text{neg}_R(X)$ 是那些根据知识 R 判断肯定不属于 X 的 U 中元

素组成的集合.

Z. Pawlak 粗集的直观表示,如图 1.1,阴影内的白色方块是 X 的下近似 $R_-(X)$;阴影部分是 X 的 R -边界, $\text{bn}_R(X) = R^-(X) - R_-(X)$.

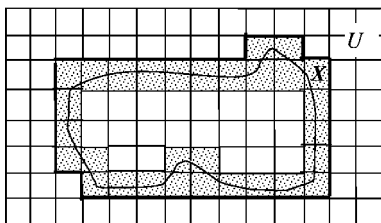


图 1.1 集合 X 的下近似 $R_-(X)$, 上近似 $R^-(X)$ 的直观表示

例 1.2 给定论域 $U = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, R 是元素等价关系, 元素等价类 E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 , 而且

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x_0, x_1\}, \\ E_2 &= \{x_2, x_6, x_9\}, \\ E_3 &= \{x_3, x_5\}, \\ E_4 &= \{x_4, x_8\}, \\ E_5 &= \{x_7, x_{10}\}. \end{aligned}$$

取 U 上的集合 $X = \{x_0, x_3, x_4, x_5, x_8, x_{10}\} \subseteq U$, 则有 X 的下近似 $R_-(X)$, X 的上近似 $R^-(X)$, 而且

$$\begin{aligned} R_-(X) &= \bigcup [x] \\ &= \{x \mid x \in U, [x] \subseteq X\} \\ &= E_3 \cup E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x_3, x_4, x_5, x_8\}, \\
R^-(X) &= \bigcup [x] \\
&= \{x \mid x \in U, [x] \cap X \neq \emptyset\} \\
&= E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \\
&= \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}.
\end{aligned}$$

那么, X 的粗集

$$(R_-(X), R^-(X)) = (\{x_3, x_4, x_5, x_8\}, \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\});$$

X 的 R - 边界

$$\text{bn}_R(X) = R^-(X) - R_-(X) = \{x_0, x_1, x_7, x_{10}\};$$

X 的 R - 正域

$$\text{pos}_R(X) = R_-(X) = \{x_3, x_4, x_5, x_8\};$$

X 的 R - 负域

$$\text{neg}_R(X) = U - R^-(X) = \{x_2, x_6, x_9\}.$$

Z. Pawlak 粗集中蕴含着下面的事实:

(1) 元素等价类 $[x]$ 上的元素不可分辨, 或者

$$\text{IND}([x] = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}).$$

(2) $X \subseteq U$ 的下近似 $R_-(X)$, 上近似 $R^-(X)$ 都是普通集(经典集), 不具有模糊性; 换句话说, 近似性不等于模糊性. $R_-(X)$, $R^-(X)$ 具有普通集的特征函数. 图 1.2 给出 $X \subseteq U$ 的下近似 $R_-(X)$ 的特征函数图像.

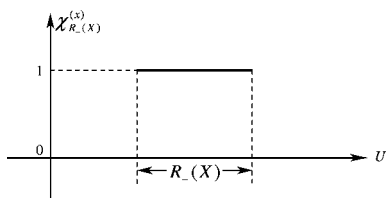


图 1.2 集合 $X \subseteq U$ 的下近似 $R_-(X)$ 的特征函数 $\chi_{R_-(X)}^{(x)}$

$$x \in R_-(X), \chi_{R_-(X)}^{(x)} = 1; x \notin R_-(X), \chi_{R_-(X)}^{(x)} = 0$$

(3) 给定元素论域 U , 一定存在属性论域 V ; 或者, 元素论域 U 与属性论域 V 共存. 元素论域 U 上的元素集合 $X \subseteq U$, 一定对应着属性论域 V 上的属性集 α ; 或者元素集合 X 与属性集合 α 共存.

Z. Pawlak 粗集已被应用到数据挖掘, 知识发现, 决策简化, 系统分析, 系统状态识别等领域, 并取得了许多令人兴奋的成果. Z. Pawlak 的这一杰出学术成就已被人们接受与认可.

§ 1.3 集合 X 的下近似与上近似的关系

给定集合 $X, Y \subseteq U$, $R^+(X), R_-(X)$ 分别是 X 的上近似, 下近似; $R^+(Y), R_-(Y)$ 分别是 Y 的上近似, 下近似. 则有

$$(1) R_-(X) \subseteq X \subseteq R^+(X). \quad (1.3.1)$$

$$(2) R_-(\emptyset) = R^-(\emptyset) = \emptyset, R_-(U) = R^-(U) = U. \quad (1.3.2)$$

$$(3) R^-(X \cup Y) = R^-(X) \cup R^-(Y). \quad (1.3.3)$$

$$(4) R_-(X \cap Y) = R_-(X) \cap R_-(Y). \quad (1.3.4)$$

$$(5) X \subseteq Y \Rightarrow R_-(X) \subseteq R_-(Y). \quad (1.3.5)$$

$$(6) X \subseteq Y \Rightarrow R^-(X) \subseteq R^-(Y). \quad (1.3.6)$$

$$(7) R_-(X \cup Y) \supseteq R_-(X) \cup R_-(Y). \quad (1.3.7)$$

$$(8) R^-(X \cap Y) \subseteq R^-(X) \cap R^-(Y). \quad (1.3.8)$$

$$(9) R_-(\sim X) = \sim R^-(X). \quad (1.3.9)$$

$$(10) R^-(\sim X) = \sim R_-(X). \quad (1.3.10)$$

$$(11) R_-(R_-(X)) = R^-(R_-(X)) = R_-(X). \quad (1.3.11)$$

$$(12) R^-(R^-(X)) = R_-(R^-(X)) = R^-(X). \quad (1.3.12)$$

证明 (1) 若 $x \in R_-(X)$, 则 $[x] \subseteq X$; 而 $x \in [x]$, 因此

$$x \in X \text{ 且 } R_-(X) \subseteq X.$$

若 $x \in X$, 因为 $x \in [x] \cap X$, 则 $[x] \cap X \neq \emptyset$, 因此

$$x \in R^-(X) \text{ 且 } X \subseteq R^-(X).$$

(2) 因为空集包含在每一个集合中, $\emptyset \subseteq R_-(\emptyset)$ 而且 $R_-(\emptyset) \subseteq \emptyset$, 所以

$$R_-(\emptyset) = \emptyset.$$

假设 $R^-(\emptyset) \neq \emptyset$, 则存在 x , 而且 $x \in R^-(\emptyset)$, 则有

$$[x] \cap \emptyset \neq \emptyset.$$

因为 $[x] \cap \emptyset = \emptyset$, 与假设矛盾, 所以

$$R^-(\emptyset) = \emptyset.$$

由(1)知, $R_-(U) \subseteq U$, 对于 $x \in U$, 因 $[x] \subseteq U$, 则 $x \in R_-(U)$, 故 $U \subseteq R_-(U)$. 所以

$$R_-(U) = U.$$

由(1)知, $R^-(U) \supseteq U$, 而且 $R^-(U) \subseteq U$, 所以

$$R^-(U) = U.$$

(3) 若 $x \in R^-(X \cup Y)$, 则有

$$\begin{aligned} & [x] \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow & ([x] \cap X) \cup ([x] \cap Y) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow & ([x] \cap X) \neq \emptyset \vee ([x] \cap Y) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow & x \in R^-(X) \vee x \in R^-(Y) \\ \Leftrightarrow & x \in R^-(X) \cup R^-(Y). \end{aligned}$$

因此, $R^-(X \cup Y) = R^-(X) \cup R^-(Y)$.

(4) 若 $x \in R_-(X \cap Y)$, 则有

$$\begin{aligned} & [x] \subseteq (X \cap Y) \\ \Leftrightarrow & ([x] \subseteq X) \wedge ([x] \subseteq Y) \\ \Leftrightarrow & x \in R_-(X) \cap R_-(Y). \end{aligned}$$

因此, $R_-(X \cap Y) = R_-(X) \cap R_-(Y)$.

(5) 若 $X \subseteq Y$, 则 $X \cap Y = X$, 所以 $R_-(X \cap Y) = R_-(X)$.

由(4) 知

$$R_-(X) \cap R_-(Y) = R_-(X).$$

因此, $R_-(X) \subseteq R_-(Y)$.

(6) 若 $X \subseteq Y$, 则 $X \cup Y = Y$, 所以 $R^-(X \cup Y) = R^-(Y)$.

由(3) 知

$$R^-(X) \cup R^-(Y) = R^-(Y).$$

因此, $R^-(X) \subseteq R^-(Y)$.

(7) 因为 $X \subseteq X \cup Y, Y \subseteq X \cup Y$, 所以 $R_-(X) \subseteq R_-(X \cup Y)$,
 $R_-(Y) \subseteq R_-(X \cup Y)$, 故 $R_-(X) \cup R_-(Y) \subseteq R_-(X \cup Y)$.

(8) 因为 $X \cap Y \subseteq X, X \cap Y \subseteq Y$, 所以 $R^-(X \cap Y) \subseteq R^-(X)$,
 $R^-(X \cap Y) \subseteq R^-(Y)$, 故 $R^-(X \cup Y) \subseteq R^-(X) \cap R^-(Y)$.

(9) 因为

$$\begin{aligned} x &\in R_-(X) \\ \Leftrightarrow [x] &\subseteq X \\ \Leftrightarrow [x] \cap \sim X &= \emptyset \\ \Leftrightarrow x &\notin R^-(\sim X) \\ \Leftrightarrow x &\in \sim R^-(\sim X), \end{aligned}$$

所以 $R_-(\sim X) = \sim R^-(X)$.

(10) 在(9)中, 利用 $\sim X$ 代替 X , 则有 $R^-(\sim X) = \sim R_-(X)$.

(11) 由(1)知, $R_-(R_-(X)) \subseteq R_-(X)$, 若 $x \in R_-(X)$, 则有 $[x] \subseteq X$. 因此 $R_-([x]) \subseteq R_-(X)$. 但 $R_-([x]) = [x]$, 于是 $[x] \subseteq R_-(X)$, 所以 $x \in R_-(R_-(X))$, 即 $R_-(X) \subseteq R_-(R_-(X))$. 故 $R_-(R_-(X)) = R_-(X)$.

由(1)知, $R_-(X) \subseteq R^-(R_-(X))$, 若 $x \in R^-(R_-(X))$, 则有 $[x] \cap R_-(X) \neq \emptyset$, 即存在 $y \in [x]$ 使得 $y \in R_-(X)$, 所以 $[y] \subseteq R_-(X)$, 但 $[x] = [y]$, 这样就有 $[x] \subseteq R_-(X)$, 即 $x \in R_-(X)$, 因此 $R_-(X) \supseteq R^-(R_-(X))$. 故 $R^-(R_-(X)) = R_-(X)$.

(12) 由(1)知, $R^-(X) \subseteq R^-(R^-(X))$, 若 $x \in R^-(R^-(X))$, 则有 $[x] \cap R^-(X) \neq \emptyset$. 因此存在 $y \in [x]$ 且 $y \in R^-(X)$, 所以 $[y] \cap X \neq \emptyset$. 但 $[x] = [y]$, 所以 $[x] \cap X \neq \emptyset$, 即 $x \in R^-(X)$,