探索未知

诗歌与数学

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

探索未知

诗歌与数学

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

图书在版编目(CIP)数据

探索未知/王卫国主编.—乌鲁木齐:新疆青少年出版社;喀什:喀什维吾尔文出版社,2007.6

ISBN 978—7—5373—1464—0

Ⅰ.探… Ⅱ.王… Ⅲ.自然科学—青少年读物 Ⅳ.N49

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第097778号

探索未知

诗歌与数学

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社 出版

(乌鲁木齐市胜利路二巷1号　邮编:830049)

廊坊市华北石油华星印务有限公司 印刷

开本:787mm×1092mm　32开

印张:300　字数:3000千

2007年7月修订版　2007年7月第1次印刷

印数:1—3000

ISBN 978—7—5373—1464—0

前　言

在半年之前，本编辑部曾推出过一套科普丛书，叫做《科学目击者》，读者反应良好。然而，区区一部丛书怎能将各种科学新知囊括其中？所未涉及者仍多。编辑部的同仁们也有余兴未尽之意，于是就有了这套《探索未知》丛书。

《科学目击者》和《探索未知》可以说是姊妹关系，也可以说是父子关系。说它们是姊妹，是因为它们在方向设定、内容选择上不分彼此，同是孕育于科学，同为中国基础科普而诞生。说它们是父子，则是从它们的出版过程考虑的。《科学目击者》的出版为我们编辑本套丛书提供了丰富的经验，让我们能够更好的把握读者们的需求与兴趣，得以将一套更为优秀的丛书呈献给读者。从这个层面上讲，《科学目击者》的出版成就了《探索未知》的诞生。

如果说《科学目击者》只是我们的第一个试验品，那么《探索未知》就是第一个正式成品了。它文字精彩，选

题科学，内容上囊括了数学、物理、化学、地理以及生物五个部分的科学知识，涵盖面广，深度适中。对于对科学新知有着浓厚兴趣的读者来说，在这里将找到最为满意的答复。

有了《科学目击者》的成功经验，让我们得以取其优、去其短，一直朝着尽善尽美的目标而努力。但如此繁杂的知识门类，让我们实感知识面的狭窄，实非少数几人所能完成。我们在编稿之时，尽可能地多汲取众多专家学者的意见。然而，百密尚有一疏，纰漏难免，如果给读者您的阅读带来不便，敬请批评指正。

编　者

目　录

将军的路径

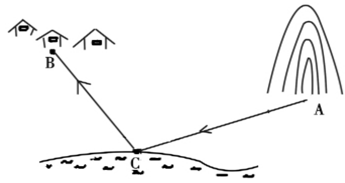
白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河。
行人刁斗风沙暗，公主琵琶幽怨多。
野营万里无城郭，雨雪纷纷连大漠。
胡雁哀鸣夜夜飞，胡儿眼泪双双落。
闻道玉门犹被遮，应将性命逐轻车。
年年战骨埋荒外，空见葡萄入汉家。

这首《古从军行》是唐朝诗人李颀所作，它借汉武帝的旧事，讽喻唐王朝的开边政策。统治者穷兵黩武，连年征战，用无数人的生命作代价，换得的只是一些葡萄之类的东西而已。

这首诗的开头几句，隐含着一个非常有趣的数学问题。在那飞沙走石，雨雪纷纷的大沙漠上，每前进一步都十分困难和艰苦。

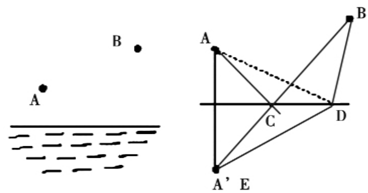
如下图，将军从瞭望烽火的山脚下的 A 点驰向交河边的 C 点，让战马喝足水之后，再驰向宿营的荒野地 B 点，只要他不是沿交河前进的，就有一个应该怎样走才能使总的路程最短的问题。

在国外流传着一个被称为“将军饮马”的数学问题，



正是这类性质的问题：

古希腊的一位将军要从营房 A 出发到河边饮马，然后再去河岸同侧的 B 地参加军事会议。问将军应该怎样走才能使总的路线最短？



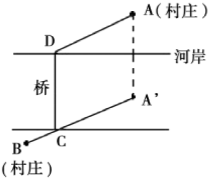
a　　b

这个问题的解法很简单。如上图，从 A 出发向河岸引垂线，在垂线上取 A 关于河岸所在直线的对称点 A'，连结 $A'B$，设直线 $A'B$ 与河岸相交于 C，则 C 点就是饮马的地方。这位将军只要从 A 出发走到 C，饮马之后，再由 C 直走到 B，所走的路程就是最短的。

因为，如果将军在河边另外任何一点 D 饮马，所走的路程就是 $AD+DB$。但是 $AD+DB=A'D+DB>A'B=A'C+CB=AC+CB$。可见，在除 C 点以外的任何一点 D 饮马，所走的总路程都会比在 C 点饮马所走的总路程长。

用同样的方法，可以解决下面的“架桥问题”：

在一条河的两岸有两个村庄 A、B，现在计划在河上架一座桥把两个村庄连结起来，假定河的两岸平行且桥与河岸垂直，问桥应架在什么地方才能使从 A 到 B 的距离最短？



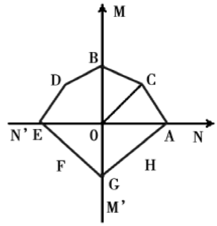
设河岸为对称轴，取 A 的对称点 A′，联结 A′B，与另一河岸相交于 C，从 C 向对岸引垂线，垂足为 D。那么 C、D 两点就是两岸架桥的地方，即桥架在线段 CD 的位置。解决这两个问题都用到了同一方法：取某直线为对称轴，作一些图形关于这条对称轴的对称图形，在几何学中这一方法称为对称变换。也称为镜面反射。通过对称变换，有时能把某些隐含的几何性质清楚地显示出来，因而能帮助我们找到解题的途径。

1978 年，北京市有一道有趣的数学竞赛题：

如下图，设有一直角 MON，试在 ON，OM 上及∠MON 内部各找一点 A，B，C，使 BC＋CA＝l 为定长，并且使四边形 ACBO 的面积最大。

这个题无论用三角法计算或建立直角坐标系用解析几何方法计算，都嫌麻烦。如果利用镜面反射的思想，却很容易得到解答。

将直角 MON 连同四边形 ACBO 一起，以 OM 为对

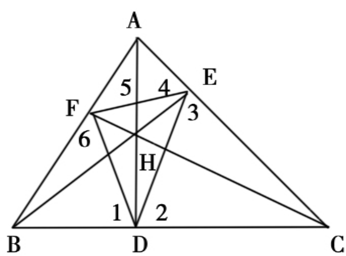


称轴反射为$\angle MON'$，再将图形以NN'为对称轴反射到下半平面。经过两次镜面反射，原图和两次反射所得的图就构成一个八边形ACBDEFGH，它的周长为定值$4l$。如果这个八边形的面积最大，则因四边形ACBO是八边形的$1/4$，面积也必为最大。

由等周定理知，在周长一定的八边形中，以正八边形的面积最大，这时它的边长为$l/2$。所以，当A、C、B为以O为中心，边长为$1/2$的正八边形在第一象限的三个顶点时，四边形ACBO的面积最大。

现在我们来看所谓许瓦兹最小三角形问题：

在锐角三角形ABC内作一个内接△DEF（即三个顶点D、E、F分别在三边BC、CA、AB上），使△DEF的周长为最小。



这个问题虽然是一个数学问题，但却可以利用物理学中的光学原理及镜面反射来研究。设想 AB、BC、CA 三条边为三面镜子，当△DEF 为光线所走的路程时（即光由 BC 上的 D 点出发到 AC 上的 E 点后，反射到 AB 上的 F 点，再反射回 BC 上的 D 点），那么光线所走的路程△DEF 是最短的。根据光的反射定律：

入射角＝反射角

立即推出，应有$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$。

这样的△DEF 称为光线三角形。

现在还需要解决三个问题：

第一，光线三角形是否存在？

第二，光线三角形如果存在，是不是唯一的？

第三，从数学上能否证明光线三角形的周长是所有内接三角形中最小的？

问题一很容易解决。因为如果 AD、BE、CF 分别是△ABC 的三条高线，H 是垂心。那么由于$\angle BDH=\angle BFH=90^\circ$，所以 B、D、H、F 四点共圆，从而$\angle 1=\angle BHF=\angle CHE$。又由于$\angle HDC=\angle HEC=90^\circ$，所以 C、E、H、D 四点共圆。从而$\angle 2=\angle CHE$，即$\angle 1=\angle 2$。类似的可以证明$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$。即△DEF 是光线三角形，所以光线三角形是存在的。

问题二则反过来，如果△DEF 是光线三角形，那么因为$\angle 4+\angle 5+\angle A=180^\circ$。所以

$$\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DEF)+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle EFD)+\angle A=180^\circ$$

得

$$180°-\frac{1}{2}(\angle FED+\angle EFD)+\angle A=180°$$

$$\begin{aligned}\angle A &= \frac{1}{2}(\angle FED+\angle EFD)\\ &=\frac{1}{2}(180°-\angle EDF)\\ &=\angle 2\end{aligned}$$

从而 A、B、D、E 四点共圆。同理可证，A、C、D、F 四点共圆，B、C、E、F 四点共圆。于是有

$\angle EDA=\angle EBA=\angle FCA=\angle FDA$,

$\angle ADC=\angle EDA+\angle 2=\angle FCA+\angle 1=\angle ADB$

所以，$\angle ADC=\angle ADB=90°$

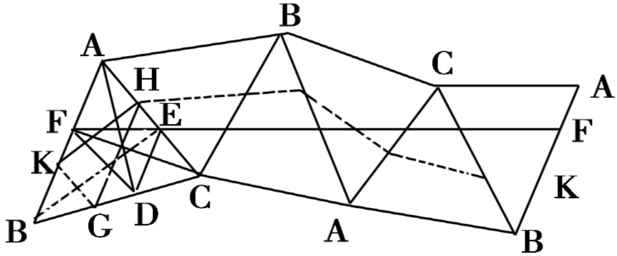
即 AD 为△ABC 的 BC 边上的高，同理 BE、CF 也是△ABC 的高。即 D、E、F 分别为△ABC 的三边上的垂足，这就证明了光线三角形是唯一的。

由于光线三角形唯一存在，而且它的三个顶点恰好是三角形 ABC 的三边上的垂足，所以又称为垂足三角形。

至于第三个问题，可以这样来考虑：设△DEF 是光线三角形，△GHK 是△ABC 的任一内接三角形。如下图，先以 AC 为镜面，将△ABC 反射到△AB′C；再以 B′C 为镜面，反射到△A′B′C；第三次以 A′B′为镜面，反射到△A′B′C′；第四次以 AC′为镜面，反射到△A′B″C′；最后以 B″C′为镜面，反射到△A″B″C′。这时，不难看出

$\angle BAB'=2\angle BAC$，$\angle A'B'A=2\angle ABC$

所以，若 BA 与 A′B′的延长线相交于 O，则有



$\angle BOA' = 180° - \angle OAB' - \angle OB'A$

$= 180° - (180° - \angle BAB') - (180° - \angle A'B'A)$

$= 180° - 180° + 2\angle BAC - 180° + 2\angle ABC$

$= 180° - 2\angle ACB$

同理可知，$B'A'$与$A''B''$的延长线相交所成的角也等于$180° - 2\angle ACB$。由于内错角相等；故$AB /\!/ A''B''$。又因$A''F' /\!/ AF$，故$FF' /\!/ AA''$，同理$KK' /\!/ AA''$。从而$FF' /\!/ KK'$。

由于$\triangle DEF$是光线三角形，所以

$FF' = 2 \times \triangle DEF$的周长

而$2 \times \triangle GHK$的周长＝折线$KH \cdots K' \geqslant KK' = FF'$所以，光线三角形的周长确实是$\triangle ABC$的内接三角形中周长最小的一个。

这个问题又称为许瓦兹（1843－1921年）最小三角形问题。它在公路设计等方面有许多应用。

百鸟图中的分拆

北宋著名的文学家苏轼，不仅诗词写得精彩，而且还是绘画的高手。有一次，他画了一幅《百鸟归巢图》，广东一位名叫伦文叙的状元，在他的画上题了一首诗：

归来一只又一只，三四五六七八只，
凤凰何少鸟何多，啄尽人间千石食。

画题既名“百鸟”，而题画诗中却不见“百”字的踪影。诗人开始好像只是在漫不经心地数数：一只、又一只，三、四、五、六、七、八只，数到第八只，诗人再也不耐烦了，突然感慨横生，笔锋一转，大发了一通议论。

诗人借题发挥，辛辣地讽刺了官场之中廉洁奉公、洁身自好的“凤凰”太少，而贪污腐化的“害鸟”则太多，他们巧取豪夺，把老百姓赖以活命的千石、万石粮食侵吞殆尽，使得民不聊生。

究竟苏轼的画中确有 100 只鸟，还是只有 8 只鸟呢？请你动动脑筋，先把题画诗中出现的数字，按次序写成一行：1，1，3，4，5，6，7，8。然后再在数与数之间加上适当的运算符号，便得到一个算式：$1+1+3\times4+5\times6+7\times8$，运算的结果恰好等于 100。

原来诗人是把 100 巧妙地分成了两个 1，三个 4，五个 6 和七个 8 之和，含而不露地落实了“百鸟图”中的“百”字，可谓匠心独运。

歌剧《刘三姐》中有一段精彩的情节，描写刘三姐与三位秀才对歌。双方用唱山歌的方式互相问难。三位秀才自恃有“学问”，在对歌中给刘三姐出了一道难道：

罗秀才：小小麻雀莫逞能，三百条狗四下分。
　　　　一少三多要单数，看你怎样分得清。
刘三姐：九十九条打猎去，九十九条看羊来。
　　　　九十九条守门口，还剩三条狗奴才。

刘三姐毫不费力地把 300 分成了 4 个奇数之和：

$$300=99+99+99+3$$

“三条狗奴才”暗指陶、李、罗三位助纣为虐的秀才。对歌中显出了刘三姐的机智与幽默，唱出了她对秀才们的鄙视和嘲弄。

在伦文叙的题画诗和刘三姐的歌词中，都把一个正整数分成了若干个正整数之和。像这样把一个正整数分成若干个正整数之和的方法，在数论中称为整数的分拆。整数分拆是一个非常活跃的数学分支，它涉及很多艰深的数学理论。

即以把 300 分成 4 个奇数之和为例，刘三姐只给出了一种答案($300=99+99+99+3$)，现在要问：

把 300 分成 4 个奇数之和，有多少种不同的方式？

在回答这个问题之前，先要作一些必要的说明。当 4 个加数完全相同而仅仅次序不同时，例如：

$300=99+99+99+3$ 与 $300=99+99+3+99$

是算两种分拆方式，还是只算一种分拆方式。如果算两种，称为“计及次序的分拆”；如果只算一种，则称为“不计次序的分拆”。

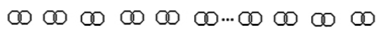
按照刘三姐歌词中的唱法，300＝99＋99＋99＋3 与 300＝99＋99＋3＋99 应该是有区别的。前者是有“3 条狗奴才”，后者则应该是有“99 条狗奴才”。所以，这是一个计及次序的分拆。

现在，我们把它抽象为一个数学问题：

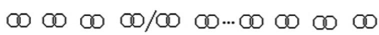
把 300 分成有次序的 4 个奇数之和，有多少种不同的方式？

下面我们介绍这个问题的两种解法。

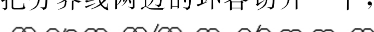
首先，我们可以这样来考虑：把 300 个小圆圈排成一行，并且两个两个连成一个环，共得 150 个环：



在环与环之间的任一个空隙处画一条分界线，就把 300 分成了两个偶数之和。如图所示，分界线画在第 4 环与第 5 环的空隙处，就把 300 分成了 8 与 292 之和：



现在再把分界线两边的环各切开一个，如图所示：



这样就把 300 分成了 4 个有次序的奇数之和：

300＝3＋5＋285＋7

当分界线画在第 4 个空隙的时候，左边有 4 节环，可

以有 4 种不同方式切开其中的一个环；分界线的右边有 150－4＝146 个环，有 146 种不同方式切开其中的某一环。因此，根据乘法原理，共有 4×146 种不同的方式把 300 分成 4 个奇数之和。

可画分界线的空隙共有 149 个，同理可知：

分界线画在第 1 个空隙时，有 1×149 种方式把 300 分成 4 个奇数之和；

分界线画在第 2 个空隙时，有 2×148 种方式把 300 分成 4 个奇数之和；

……

分界线画在第 149 个空隙时，有 149×1 种方式把 300 分成 4 个奇数之和。

所以，把 300 分成 4 个有次序的奇数之和的方式总数有：

$$\begin{aligned}&1\times149+2\times148+3\times147+\cdots+148\times2+149\times1\\=&(150-1)\times1+(150-2)\times2+\\&(150-3)\times3+\cdots+(150-149)\times149\\=&(150\times1-1^2)+(150\times2-2^2)+\\&(150\times3-3^2)+\cdots+(150\times149-149^2\\=&150(1+2+\cdots+149)-(1^2+2^2+\cdots+149^2)\\=&150\times\frac{149\times150}{2}-\frac{149\times150\times299}{6}\\=&1676250-1113775\\=&562475。\end{aligned}$$

这个问题也可以这样来计算：

在两条短线之间画 151 个小圆圈，按次序排成一线：