[redacted]

ψ	psi	g	變數增量符號
Ψ	大寫的 psi	G	
δ	delta	d	
Δ	大寫的 delta	D	
Σ	大寫的 Sigma	S	加號
ϵ	epsilon	–	微小的正數常數
θ	theta	–	正數分數

在三角學中，$\alpha\beta\gamma$ 可以表示固定角度，而 θ ϕ ψ 等則可表示角度的變數。

著者原序

本書原是1931年以來在倫敦政治經濟學院每年的講稿，目的在爲學經濟的人開一門對他最適用的純數學功課。數學方法講到一個地方，便用來解釋經濟理論的問題。每一章都有習題，希望讀者從做習題當中慢慢習慣數學工具，習慣應用數學工具到具體的經濟問題上去。限於討論的方法，不想寫成一本有系統的數理經濟學，但是數理經濟學的要點，都已在正文中或在習題中可以找到。

我希望本書能有益於各方面的讀者。頭幾章主要是爲毫無數學訓練的學生寫的，有也可能只是多年以前在大學預科裏唸的一點。這類學生可能需要先熟練基本方法的應用，才能往下讀較深的方法。至於程度已經較高的學生，或也可以把前幾章作複習之用，很快跳到後面的部份。若是學有素養的數理經濟學者，則此書大致可作參考之用，且在某些地方發現新的觀點。

我曾得自許多位數學家和經濟學家們有益的指教和批評。我特別感激鮑蘭(A. L. Bowley)教授與馬遏克(Dr. J. Marschak)博士，他們對初稿的建議，使本書有了許多改進。我也感謝那虛（Mr. G. J. Nash）君校讀全稿，指出習題中的許多小毛病。艾倫序於倫敦經濟學院，1937年10月。

書目提要

何謂數理分析以及它幾世紀以來的變化路線必須隨時記住。不僅初學的人，就算是有了成就的數學家吧，都會讀了這些啓蒙的小書受到益處，例如

Whitehead: *An Introduction to Mathematics* (Home University Library, 1911).

Brodesky: *The Meaning of Mathematics* (Benn's Sixpenny Library, 1929).

Rice: *The Nature of Mathematics* (An Outline of Modern Knowledge, 1931).

或讀比較大的書，例如

Dantzig: *Number* (1930).

Forsyth: *Mathematics in Life and Thought* (1929).

Hogben: *Mathematics for the Million* (1936).

數學史是許多書的主題；短的佳作有

Rouse Ball: *A Short Account of the History of Mathematics* (6th ed. 1915).

Sullivan: *The History of Mathematics in Europe* (1925).

讀者想重修他大學預科程度的代數幾何，以求對微積分有一「實用」的概念，則可參閱

Durell: *Elementary Geometry* (1919).

Durell, Palmer and Wright: *Elementary Algebra* (1925)（包括初等微積分的入門）。

Thompson: *Calculus made Easy* (2nd. ed., 1919).

Irving Fisher: *A Brief Introduction to the Infinitesimal Calculus* (3rd ed., 1909).

一般討論數理分析的教科書，無論範圍或討論方法，都有很大出入。下面選出的書，內容有初等到高等，方法有應用到嚴格的理論。它們彼此互相補充，而非衝突。

Hardy: *A Course of Pure Mathematics* (3rd ed., 1921).

Griffin: *An Introduction to Mathematical Analysis* (無日期).

Osgood: *Introduction to the Calculus*(1922); *Advanced Calculus* (1925).

de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse Infinitésimale* (5th ed.), Vol. I (1923), Vol. II (1925).

Courant: *Differential and Integral Calculus* (English ed.), Vol. I (1934), Vol. II (1936).

Pavate and Bhagwat: *The Elements of Calculus* (2nd ed., 1932).

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

數理分析上希臘字母的用法

英文字母之用作數學分析的符號，尙欠不够，所以要用希臘字母來應付，可有更大的伸縮餘地。在數學上運用希臘字母的用法，本無一定的規則，但下表所列可算是相當普遍的用法。注意，以下英希兩國字母的對照，只是按其在數學上的用途而言的，不是文字上的對照。

希臘字母		英文字母	一般用途
α	alpha	a	常數
β	beta	b	
γ	gamma	c	
κ	Kappa	k	常數、參數
λ	Lambda	l	
μ	mu	m	
ν	nu	n	
ξ	xi	x	變數
η	eta	y	
ζ	zeta	z	
π	pi	p	特種常數或變數（例如 π 爲圓周長度與半徑之常數比，ρ爲利率等。）
ρ	rho	r	
σ	sigma	s	
τ	tau	t	
ϕ	phi	f	函數符號
Φ	大寫的 phi	F	

經濟數學 目錄

著者原序……（3）

書目提要……（15）

數理分析上希臘字母的用法……（17）

第一章　數與變數……（1）

1.1 導　論……（1）
1.2 數之類別……（3）
1.3 實數系……（5）
1.4 連續變數和不連續變數……（7）
1.5 數量和數量的計算……（8）
1.6 度量衡的單位……（12）
1.7 導來數量……（13）
1.8 空間中點的定位……（15）
1.9 點的變動和坐標……（19）
範例一——數量的測量計算；圖解方法……（21）

第二章　函數和函數的圖形……（27）

2.1 函數的定義和範例……（27）
2.2 函數的圖形……（31）
2.3 函數和曲線……（36）
2.4 函數的分類……（38）
2.5 函數類型……（41）
2.6 任何形式函數的符號表現……（45）
2.7 圖案方法……（48）

2.8 只含一個變數的方程式的解法……（50）
2.9 含兩個變數的聯立方程式……（54）
範例二——函數與圖形；方程式的求解……（57）

第三章 初等解析幾何……（63）

3.1 導 論……（63）
3.2 直線的斜度……（65）
3.3 直線的方程式……（69）
3.4 拋物線……（71）
3.5 直角雙曲線……（75）
3.6 圓……（78）
3.7 曲線類和曲線系……（79）
3.8 一個解析幾何的經濟問題……（84）
範例三——直線；曲線和曲線系……（85）

第四章 函數的極限和連續性……（89）

4.1 極限的基本觀念……（89）
4.2 函數極限的例子……（91）
4.3 單值函數的極限的定義……（96）
4.4 極限值和近似值……（101）
4.5 極限的特性……（102）
4.6 函數的連續性……（104）
4.7 函數連續與不連續的圖解……（106）
4.8 多值函數……（108）
範例四——函數的極限；函數的連續……（109）

第五章 濟理經論上的函數和圖案……（115）

5.1 導　論……（115）
5.2 需求函數和需求曲線……（116）
5.3 特殊的需求函數和曲線……（119）
5.4 總收益函數和曲線……（124）
5.5 成本函數和曲線……（125）
5.6 經濟理論中的其他函數和曲線……（129）
5.7 消費品的無差異曲線……（132）
5.8 所得流量時間分配的無差異曲線……（135）
範例五——經濟學上的函數和曲線……（137）

第六章　導函數和導函數的意義……（143）

6.1 導　論……（143）
6.2 導函數的定義……（146）
6.3 計算導函數的例子……（149）
6.4 導函數和近似值……（151）
6.5 導函數和曲線的切線……（153）
6.6 二次導函數和高次導函數……（157）
6.7 導函數在自然科學上的用途……（158）
6.8 導函數在經濟學中的用途……（160）
範例六——導函數的計算和意義……（165）

第七章　求導函數的方法……（171）

7.1 導　言……（171）
7.2 冪函數和其導函數……（172）
7.3 求導函數的法則……（175）
7.4 求導函數的例題……（178）
7.5 函數的函數法則……（182）
7.6 逆函數法則……（186）

7.7 二次導函數和高次導函數的計算……（187）
範例七——求導函數練習……（191）

第八章 導函數之應用……（197）

8.1 導函數之正負號與大小……（197）
8.2 極大值和極小值……（199）
8.3 二次導函數的用途……（202）
8.4 找極大值和極小值的實際方法……（204）
8.5 平均值和邊際值的一般問題……（208）
8.6 轉折點……（210）
8.7 經濟學上的獨占問題……（214）
8.8 兩頭獨占的問題……（219）
8.9 附論必要及充分條件……（223）
範例八——導函數的一般用途；導函數的經濟用途……（224）

第九章 指數函數與對數函數……（231）

9.1 指數函數……（231）
9.2 對數與對數的特性……（233）
9.3 對數函數……（237）
9.4 對數坐標尺和對數圖……（239）
9.5 對數圖的例子……（243）
9.6 複利問題……（249）
9.7 現值與資本值……（252）
9.8 自然指數函數與自然對數函數……（255）
範例九——指數函數及對數函數；複利問題……（259）

第十章 對數導函數……（265）

10.1 指數函數與對數函數的導函數 …… (265)
10.2 對數的導函數求法 …… (271)
10.3 資本和利息的問題 …… (274)
10.4 函數的彈性 …… (277)
10.5 彈性的計算 …… (279)
10.6 需求彈性 …… (281)
10.7 正常的需求情形 …… (284)
10.8 成本彈性和常態的成本情形 …… (288)
範例十——指數與對數導函數；彈性及其用途…… (292)

第十一章　兩個變數或多個變數的函數 …… (297)

11.1 兩個變數的函數 …… (297)
11.2 兩變數函數的圖形表現 …… (299)
11.3 曲面的剖面圖 …… (301)
11.4 兩個以上變數的函數 …… (304)
11.5 無法計算的變數 …… (305)
11.6 方程式系 …… (308)
11.7 經濟理論中幾個變數的函數 …… (310)
11.8 生產函數與常數產量曲線 …… (314)
11.9 效用函數與無差異曲線 …… (319)
範例十一——兩變數或多變數的函數；經濟學上的函數和曲面…… (322)

第十二章　部分導函數及其用途 …… (327)

12.1 兩個變數函數的部份導函數 …… (327)
12.2 二次和高次部份導函數 …… (332)
12.3 部份導函數的正負號 …… (335)
12.4 曲面的切面 …… (338)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

12.5 兩個變數以上的函數的部份導函數 …… (341)
12.6 部份導函數的經濟學用途 …… (343)
12.7 齊次函數 …… (348)
12.8 歐勒氏定理及齊次函數的其他特性 …… (350)
12.9 線型齊次生產函數 …… (354)
範例十二——部份導函數；齊次函數；部份導函數與齊次函數的經濟學用途…… (356)

第十三章 微分式及微分 …… (363)

13.1 兩個變數的函數變化 …… (363)
13.2 兩個變數的函數微分式 …… (365)
13.3 微分方法 …… (367)
13.4 微分函數的函數 …… (370)
13.5 隱函數的微分 …… (372)
13.6 兩個變數以上的函數微分式 …… (378)
13.7 生產中要素的替代 …… (379)
13.8 其他經濟問題上的替代 …… (383)
13.9 兩元獨占問題的進一步考慮 …… (385)
範例十三——微分；微分式的經濟學用途…… (387)

第十四章 極大與極小問題 …… (393)

14.1 部份靜止值 …… (393)
14.2 兩個變數或多個變數的函數極大值與極小值 … (394)
14.3 極大值和極小值的例子 …… (399)
14.4 獨占與聯合生產 …… (403)
14.5 生產、資本和利息 …… (407)
14.6 相對的極大極小值 …… (410)
14.7 相對極大值與相對極小值的例題 …… (413)

14.8 生產要素的需求 …… (416)
14.9 對消費品和對貸款的需求 …… (422)
範例十四——求極大極小的一般問題；極大極小的經濟問題 …… (427)

第十五章　一個變數的函數積分式 …… (435)

15.1 定積分的意義 …… (435)
15.2 定積分當做面積 …… (438)
15.3 不定積分與反微分 …… (441)
15.4 積分的技巧 …… (444)
15.5 定積分與近似積分 …… (448)
15.6 平均概念和邊際概念的關係 …… (452)
15.7 資本值 …… (453)
15.8 耐用資本財的問題 …… (456)
15.9 次數分配的平均數與分散情形 …… (458)
範例十五——積分；經濟問題中的積分式 …… (461)

第十六章　微分方程式 …… (467)

16.1 問題的性質 …… (467)
16.2 線型微分方程式和它們的積分 …… (472)
16.3 線型微分方程式的一般積分式 …… (479)
16.4 聯立線型微分方程式 …… (482)
16.5 正交曲線和曲面系 …… (487)
16.6 其他微分方程式 …… (489)
16.7 供求函數的動態式 …… (494)
16.8 消費者選擇的一般理論 …… (498)
範例十六——微分方程式；微分方程式的經濟學用途 (503)

第十七章 展開式、泰勒級數及高次微分式……（509）

17.1 極限與無窮級數 ……（509）
17.2 一變數函數的展開式（泰勒級數）……（513）
17.3 函數展開式的例題 ……（519）
17.4 兩變數函數或多變數函數的展開式 ……（522）
17.5 極大和極小值的完全標準 ……（526）
17.6 二次及高次微分式 ……（529）
17.7 兩個獨立變數的函數微分式 ……（530）
17.8 兩個他變數函數的微分式 ……（533）
範例十七——無窮級數；展開式；高次微分式……（539）

第十八章 行列式、線型方程式與二次式 …（545）

18.1 行列式的一般觀念 ……（545）
18.2 各級行列式的定義 ……（546）
18.3 行列式的性質 ……（550）
18.4 行列式的子行列式及餘因式 ……（552）
18.5 幾個變數的線型齊次函數 ……（555）
18.6 線型方程式之解 ……（557）
18.7 兩變數及三變數的二次形式 ……（561）
18.8 二次形式的例子 ……（566）
18.9 二次形式的兩個一般結果 ……（568）
範例十八——行列式；線型方程式；二次形式……（570）

第十九章 極大值和極小值的其他問題 ……（575）

19.1 幾個變數的函數極大值和極小值 ……（575）
19.2 相對的極大極小值 ……（578）

19.3 極大極小值的例題 …… (581)
19.4 生產要素需求的安定性 …… (584)
19.5 部份替代彈性 …… (586)
19.6 生產要素需求量的變化 …… (588)
19.7 消費品的需求（可積分場合） …… (593)
19.8 對三種消費品的需求（一般情形） …… (598)
範例十九——極大值與極小值的普通問題；極大極小的經濟問題 …… (604)

第二十章 變分學上的一些問題 …… (609)

20.1 汎函數的一般理論 …… (609)
20.2 變分計算 …… (611)
20.3 計算變分的方法 …… (612)
20.4 解最簡單的問題 …… (614)
20.5 歐勒氏方程等式的特殊式 …… (618)
20.6 利用歐勒氏方程式求解的例題 …… (620)
20.7 獨占的動態問題 …… (624)
20.8 其他變分計算的問題 …… (628)
範例二十——變分計算的問題 …… (632)

跋 …… (637)

第一章

數 (Numbers) 與變數 (Variables)

1.1 導　論

是習慣把數學劃成二門獨立的學問：幾何學 (geometry) 和解析學 (analysis)。幾何學是研究空間和空間關係的學問，在幾何學中，我們研究曲線、面、和其他由空間中點所構成的圖形，研究它們的性質和特徵。數學解析則包括算術和代數，專門討論數，數和數之間的關係，以及這些關係之間的演算。這兩門學問之間的差別，就在它們基本「材料」的不同，幾何學上是空間的點，而解析上是數。

然而隨着數理方法的演進，我們發現幾何學和解析學兩者間的差別愈來愈模糊，愈來愈不重要。雖說它們預定的用途仍舊很有差別，但它們的方法似乎都是抽象的，而且性質上根本相仿。數學之中總有各式各樣符號的定義，進而說明這些符號之間的演算法則。至於幾何符號與數學符號之間的差別，則多少總是人爲的。更有進者，我們知道，設計一個方法，把空間的點和數連結起來，亦即把幾何學和分析學連結起來，原是一件很簡單的事。看到代數之中用到圖解方法，以及初等三角學 (trigonometry) 簡直就是應用代數方法去研究空間圖形，就知道這種連結眞是可能的。

數理方法是抽象的，因而發展時必定不曾兼顧到實用。而且基本性質上它是邏輯的。例如說，初等幾何學的大部份，原是一種形式邏輯的訓練，從周全的假設中推出它們的結論來。只是數理方法的發展，使它不久便感需要採用一個非形式邏輯所有的概念，這就是「無窮 (infinity)」的概念，無窮大，無窮連續等等。大體說來，數學方法可說是形式邏輯的一個分枝，向着某個方向伸出去，

把有限和無限都包括了進去。除了邏輯推理的那些條件外，數學的獨有條件都與用到無窮有關。

所以一般人相信邏輯方法會與數學方法相衝突，那是無稽之談。數學，既是一種符號邏輯，而且是範圍擴大了的邏輯，只能說是邏輯的另一個替身。有些問題，可以用比較簡單的邏輯推理便能解決的，則採用數學符號容或徒增紛擾。但是鑒於形式邏輯的範圍受到限制，顯然不足說明許許多多問題，這就有了理由讓數學發展起來，應用起來。

儘管數學的發展是抽象的，但決不是一種虛幻的象棋遊戲，拿着設計古怪的棋子，根據一些隨便規定的走法，在 n 度空間的太虛幻境內搬弄。數學的方法，原是設計來實際用於，或預備用於科學上，以解釋經過觀察、抽象、和分類後的現象。不過不必因此誇大了它的功用。科學現象的型態，它的定律，它的規則，都不是來自數學。它們早已廁身此世界，數學只不過能表現它們，解釋它們，幫我們推論其結果，或者預測它們如果不變的話，將會發生什麼狀況，並且告訴我們到那裏去找證據來證實我們的假設，或者推翻我們的假設。

只要我們的現象跟空間的特性或數的特性發生連繫，只要研究的對象可以用空間的點來定位，只要研究的事件可以用數來量，或用數來表現其性質，那麼數學方法便立刻派上了用場。下面文章的主要目的，便是敍述一些數學方法。不過在許多地方，都會提到並討論到各種方法的應用性質和應用場合，數學方法之用於經濟理論則受到特別的討論。

在結束這些導論性質的話題前，我們可以提一提，便是數學方法的這種根本基礎，近年來已受到極大的注意。因爲沒有更好的名稱，姑說它是數學哲學吧，裏面正提到一系列這類有趣的問題。其中某些問題的性質，可以從下面討論的各塊地方看到，但決不想對它們追根究底。我們愈進一步追究數學的根本，愈感到常用的那套

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com