微積溯源

微積溯源卷二

英國華里司輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

疊求微係數

第二十七款　凡將變數之任何函數求其微分則其所得之微係數必為一新函數　此新函數亦可求其微分則其所得之微係數必又為第二新函數　此第二新函數又可求其微分則其所得之微係數必又為第三新函數　如是累求至微係數為〇而止　其每次所得之新函數均與原函數之形相類

如從原函數$戊=天^{卯}$可得$\frac{彳戊}{彳天}=卯天^{卯丅一}$若令$巳=卯天^{卯丅一}$又可得$\frac{彳巳}{彳天}=卯(卯丅一)天^{卯丅二}$再令$午=卯(卯丅一)天^{卯丅二}$

又可得$\frac{彳午}{彳天}=卯(卯丅一)(卯丅二)天^{卯丅三}$如是遞求之至其微係數為常數則止惟亦有任求至多次而不止者

凡累次所得之新函數巳午未等類與原函數戊如何相關可用一記號以顯之

假如$巳=\frac{彳天}{彳戊}$，$午=\frac{彳巳}{彳戊}$，則$午=\frac{彳天}{彳\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)}$，此式中之$彳\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)$，可作$\frac{彳天}{彳戊}$是也。

如此，則$巳=\frac{彳天}{彳戊}$，$午=\frac{彳巳}{彳戊}=\frac{\overset{二}{彳天}}{彳戊}$，所以凡用$午=\frac{\overset{二}{彳天}}{彳戊}$之式，其意謂函數戊

巳求微係數兩次，而午為其第二新函數也。

凡疊求微係數之時，必視其彳天如常數，則可由新函數

午而得$未=\frac{彳午}{彳戊}=\frac{\overset{三}{彳天}}{彳戊}$，如是類推之累求至多次，無不一例。

惟其彳戊與$彳天^{卯}$必用心別之切不可混視如彳戊之意謂函數戊已求微分三次而$彳天^{三}$之意乃言彳天之三方也$\frac{彳戊}{彳天^{三}}$者言其新函數為第三次微係數也因其每次求微分時皆視前次之彳天如常數故以彳天之各方約之也

一式　設函數為$戊=甲天^{卯}$若其指數卯為正整之數如$戊=甲天^{五}$則疊求其微係數得

$\frac{彳戊}{彳天}=五甲天^{四}$

$\frac{彳戊}{彳天^{二}}=四·五甲天^{三}$

$\frac{彳戊}{彳天^{三}}=三·四五甲天^{二}$

$\frac{彳戊}{彳天^{四}}=二·三·四五甲天$

$\frac{彳戊}{彳天^{五}}=一·二·三·四·五甲$

已求至

微係為常數，故其級數必至此而盡。惟卯若為負數或分數者，則其級數不能盡。

凡每次之微係數，各以求其微分之次數名之。

如 $\dfrac{彳天}{彳戌}$ 為第一次微係數，$\dfrac{彳^{二}天}{彳^{二}戌}$ 為第二次微係數，$\dfrac{彳^{三}天}{彳^{三}戌}$ 為第三次微係數。其餘仿此類推。

如函數為 $戌=天^{五}$，則名其 $彳戌=五天^{四}彳天$ 為函數之第一次微分，$彳^{二}戌=二〇天^{三}彳天^{二}$ 為第二次微分，$彳^{三}戌=六〇天^{二}彳天^{三}$ 為第三次微分。其餘亦仿此類推。

茲又設各種函數之式以明疊求微係數之法、

二式　設函數為$戊=甲^{天}$、欲求其各次微係數、

則如法疊求之得

$$\frac{彳戊}{彳天}=訥甲\,甲^{天}$$

$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=(訥甲)^{二}甲^{天}$$

$$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=(訥甲)^{三}甲^{天}$$

$$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}=(訥甲)^{四}甲^{天}$$

$$\cdots\cdots$$

三式　設函數為$戊=對天$、欲求其各次微係數、

則如法疊求之得

$$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{嗔}{天}$$

$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=丅\frac{嗔}{天^{二}}$$

$$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=丄\frac{一\cdot二嗔}{天^{三}}$$

$$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}=丅\frac{一\cdot二\cdot三嗔}{天^{四}}$$

$$\cdots\cdots$$

四式　設函數爲戌＝正弦天。欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$ ＝餘弦天。

$\frac{\text{彳天}^{\text{二}}}{\text{彳}^{\text{二}}\text{戌}}$ ＝丅正弦天。

$\frac{\text{彳天}^{\text{三}}}{\text{彳}^{\text{三}}\text{戌}}$ ＝丅餘弦天。

$\frac{\text{彳天}^{\text{四}}}{\text{彳}^{\text{四}}\text{戌}}$ ＝正弦天。

……

五式　設函數爲戌＝餘弦天。欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$ ＝丅正弦天。

$\frac{\text{彳天}^{\text{二}}}{\text{彳}^{\text{二}}\text{戌}}$ ＝丅餘弦天

$\frac{\text{彳天}^{\text{三}}}{\text{彳}^{\text{三}}\text{戌}}$ ＝正弦天。

$\frac{\text{彳天}^{\text{四}}}{\text{彳}^{\text{四}}\text{戌}}$ ＝餘弦天。

……

六式　設函數爲

$$戊=\frac{甲^{二}\perp天^{二}}{甲^{二}}.$$

欲求其各次微係數.

則如法疊求之得

$$\frac{彳天}{彳戊}=\frac{(甲^{二}\perp天^{二})^{二}}{\top二甲^{二}天}.$$

$$\frac{彳^{二}天}{彳戊^{二}}=\frac{(甲^{二}\perp天^{二})^{三}}{\top二甲^{四}\perp六甲^{二}天^{二}}.$$

$$\frac{彳^{三}天}{彳戊^{三}}=\frac{(甲^{二}\perp天^{二})^{四}}{二四甲^{四}天\top二四甲^{二}天^{三}}.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

論戴勞所設之例

第二十八款　戴氏之術.其源亦從尤拉之紀函數法而生.故茲款先論尤拉之法.

如令函(天)為變數天之任何函數以天丄辛代其天而令其新函數為函(天丄辛)則此式可詳之為級數

函(天)丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……

其巳午未各數為天之他新函數由原函數而生皆與辛無涉

第二十九款　上款之例為尤拉所設後有拉果闌諸著書論函數曾證此例不誤茲節錄其證法如下

凡詳天丄辛所成之新函數為級數因其天為不定之數故諸項中辛之各方不能有分數之指數

因辛之根指數、必從原函數之根指數而出、故易知以天丄辛代天之時、仍爲不定之數、則與不加辛無異、故其形不能與原式不類　若反言之、則可云依各次方程式之例、其式之根有若干同數、必等于原式根指數之數、由此可見凡虛函數內、有若干不同之根、其數必等于所有之各根和數、

所以若將函(天丄辛)詳之爲級數、而初項中有寅辛$^{\frac{卯}{戌}}$之形者、其函(天)必爲虛式、且必有若干箇不同之根　若他項中之辛有分指數者亦然、

若詳得之級數，其形如$函(天)丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots丄卯辛^{\frac{寅}{卯}}$者，則其函(天)之各同數，可與根式$\frac{天^{寅}}{卯}$所有之卯箇各同數相合，所以函(天丄辛)之級數，其同數不能比此此更多。

依此證法，則知凡以天與辛爲不定之數，則此例絕無誤處。若其天有任何一定之同數者，則此例有時不可通，因其中之定同數，每能滅去函(天)內之數箇同數，而

其函(天丄辛)中之同數、不能與之同滅、所以不可通、

第三十款　前款已證明凡詳變數天之任何新函數爲級數者、其各項中之辛不能有分指數、故可知各項中辛之方數、亦不能爲負數、

若級數之各項中、有一項爲$\frac{未}{辛^{寅}}$、其寅爲正整之數者、則令辛＝〇之時、此項必變爲無窮大、而其函(天丄辛)與函(天)亦必變爲無窮大、惟依天爲變數之意、其天既可大可小、無一定之同數、何以此項能恆爲無窮、所以知級數各項中

之辛必不能有負數及分數爲其指數，

第三十一款

以上已證明函(天⊥辛)之級數，其公式必爲

$$函(天\perp辛)=函(天)\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$$

今本款欲攷明原函數函(天)與他函數巳午未各數相關之理

西歷紀歲一千七百〇五年間，有英國算學之士，名戴勞者，始攷明此理，立一求級數之公法，其立術之源，詳

見戴氏所著之書中。茲述其法如下。

法以天之任何函數為

$$函(天)＝戊$$

令天變為 $天\perp辛$，則得

$$函(天\perp辛)＝戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp申辛^{四}\perp\cdots\cdots$$ ㈠。

設以矣。代其 $天\perp辛$ 再變為 $天\perp子$，則子辛二數皆與天無相關。所以

$天丄辛$變為$天丄辛丄子$.而$函(天丄辛)$變為$函(天丄辛丄子)$.若欲求其$(天丄辛)=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots$㊀.所變之新式則有兩法.一可令$辛丄子$代㊀式中之辛.而詳其各項為級數則得

$$函(天丄辛丄子)=$$
$$戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄申辛^{四}丄\cdots\cdots$$
$$丄巳子丄二午辛子丄三未辛^{二}子丄四申辛^{三}子丄\cdots\cdots$$
$$丄午子^{二}丄三未辛子^{二}丄六申辛^{二}子^{二}丄\cdots\cdots$$
$$丄未子^{三}丄四申辛子^{三}丄\cdots\cdots$$
$$丄申子^{四}丄\cdots\cdots$$

又一法，可令天丄子代其天，而詳其㊀式之巳午未各函數爲級數，其詳法如左，

惟因 函(天)＝戌，若天變爲天丄子，則戌變爲 戌丄巳子丄午子^{2}丄未子^{3}丄申子^{4}丄……，此式中之子，宛如㊀式 函(天丄辛)＝戌丄巳辛丄午辛^{2}丄未辛^{3}丄…… 中之辛，設 函(天丄辛) 式中之天，變爲天丄子，則其各項中之乘