数学基础辅导讲义

概率论与数理统计

河南云鹏育才学院
云鹏考研辅导中心

第一章　随机事件与概率

内容概述

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

自然界中的客观现象一般可分为必然现象和随机现象。必然现象是指在一定的条件下必然出现的现象，而随机现象是指在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象，概率论是研究大量随机现象的统计规律性的数学学科。概率论中将满足下列三个特点的试验称为随机试验，简称试验，通常用 E 或 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 来表示，这三个特点如下：

(1) 试验可在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但所有的结果是明确可知的；

(3) 试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能的结果所组成的集合称为 E 的样本空间，常记为 Ω，Ω 中的元素即 E 的每一个结果称为样本点，常记为 ω，于是有 $\omega \in \Omega$.

3. 随机事件

样本空间的子集，即试验的可能结果称为随机事件，简称英文字母 A、B、C 等表示，有时用 $\{\cdots\cdots\}$ 表示事件，大括号中描述事件的内容，在每次试验中，当且仅当事件中的一个样本个事件发生.

由一个样本点组成的单点集常称为基本事件；由多于·集合常称为复合事件.

显然，Ω 和空集 Φ 都是 Ω 的子集，从而也是事件，它们分——每次试验中一定发生的事件，不可能事件 —— 每次试验中一定不发生的事件.

二、事件的关系及其运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按照集合间的关系和运算来处理.

1. 事件的关系和运算

(1) 包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 为 B 的子集，则称事件 B 包含事件 A，也称 A 为 B 的子事件，记作 $A \subset B$，图 1-1(称为文氏图)表示了事件的包含关系，显然，对任何事件 A 有 $\Phi \subset A \subset \Omega$.

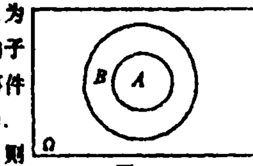

图 1-1

(2) 相等　若两个事件 A，B 满足：$A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 此时 A 与 B 包含的样本点完全相同，即表示同一个事件.

(3) 和(并)　事件 A、B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和(并)，记作 $A \cup B$(或 $A + B$)，即

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 图 1-2 表示了 A 与 B 的和事件(阴影部分).

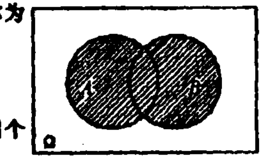

图 1-2

(4) 积(交)　事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积(交)，或 AB)，即

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$．图 1－3 表示了 A 与 B 的积事件(阴影部分)．

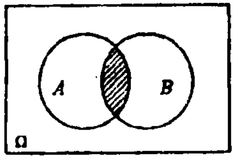

图 1-3

(5) 差　事件 A 发生但 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$，即

$$A - B = \{\omega : \omega \in A \text{ 但 } \omega \notin B\}.$$

图 1－4 表示了 A 与 B 的差事件(阴影部分)．

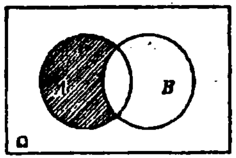

图 1-4

(6) 互不相容(互斥)　若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \Phi$，则称 A 与 B 互不相容(或互斥)，记作 $A \cap B = \Phi$ 或 $AB = \Phi$．图 1－5 表示了 A 与 B 的互斥关系．

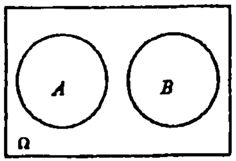

图 1-5

(7) 对立(互逆)　若事件 A, B 不能同时发生，但至少有一个发生，即 A, B 满足 $AB = \Phi$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件(或互逆事件)，记作 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$，即 A 的对立事件 $\overline{A}$ 就是 A 不发生的事件：

$$\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\} = \Omega - A.$$

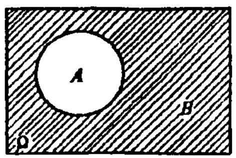

图 1-6

图 1－6 表示了 A 的对立事件为 B(阴影部分)．

(8) 完全(备)事件组　若有限个或可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 满足 $A_iA_j = \Phi (i \neq j)$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完全事件组．

2. 事件运算的性质

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$，　$AB = BA$．

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$，

$(AB)C = A(BC) = ABC$．

(3) 分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC$，

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$．

$A(B - C) = AB - AC$，

$A(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} AA_i$．

(4) 对偶律(De · Morgan 律)

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$，　$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$．

$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i$，　$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A}_i$　　$(i \geq 1)$．

(5) 吸收律　$A \cap (A \cup B) = A$，　$A \cup (A \cap B) = A$．

(6) 双重否定律　$\overline{\overline{A}} = A$．

(7) 排中律　$A \cup \overline{A} = \Omega$，　　$A\overline{A} = \Phi$．

(8) 差积转换律　$A - B = A\overline{B}$．

三、事件的概率及其性质

概率是事件发生的可能性大小的定量描述，是事件的本质特征，它客观存在，我们常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率．

1. 概率的统计定义

在相同条件下，独立重复进行 n 次试验，则事件 A 在 n 次试验中发生的次数称为 A 发生的频数，记为 μ_A，比值 $f_n(A) = \frac{\mu_A}{n}$ 称为 A 发生的频率，当试验次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性，即它在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称 p 为事件 A 发生的概率．显然，p 固然存在，但实际中无法精确确定它，于是多用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值．

2. 概率的古典定义

若试验 E 的样本空间 Ω 只含有有限个样本点，即有限个基本事件，且每个样本点出现的可能性相同，则称试验 E 为古典概型。此时，事件 $A \subset \Omega$ 的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}},$$

上式计算出的概率称为古典概率.

3. 概率的几何定义

若试验 E 的样本空间 Ω 为几何空间中的一个区域（这个区域可以是一维、二维、三维，甚至 n 维的），且 Ω 中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同，则称试验 E 为几何概型，此时，事件 $A \subset \Omega$ 的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{A\text{ 的度量（长度、面积或体积）}}{\Omega\text{ 的度量（长度、面积或体积）}},$$

上式计算出的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性： 对任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性： $P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性： 对任意两两互不相容的事件列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率

5. 概率的基本性质

(1) 对于不可能事件 Φ， $P(\Phi) = 0$； 对于必然事件 Ω， $P(\Omega) = 1$

(2) 有限可加性： 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 求逆公式： $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 加法公式： $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(5) 广义加法公式（多除少补原理）：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n),$$

特别有 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

(6) 减法公式： $P(A - B) = P(A) - P(AB)$,

特别当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$，从而 $P(B) \leqslant P(A)$.

四、条件概率与乘法公式

1. 条件概率

对于任意两事件 A 和 B，其中 $P(A) > 0$，事件 B 在“事件 A 发生”的条件下的条件概率，简称为“事件 B 关于 A 的条件概率”，定义为

$$P(B \mid A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对于固定的事件 A，条件概率 $P(B \mid A)$ 具有（无条件）概率的一切性质

2. 乘法公式

设 A，B 为两个事件，若 $P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A);$$

若 $P(B) > 0$，则有

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

一般地，若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

五、全概率公式和 Bayes 公式

1. 全概率公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 为一个完全事件组，且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2 \cdots n, \cdots$ 则对于任意事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

2. 贝叶斯（Bayes）公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为一个完全事件组，且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 则对任意概率不为零的事件 B，有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad j = 1,2,\cdots$$

六、事件的独立性与伯努利(Bernoulli)概型

1. 事件的独立性

(1) 对于两个事件 A, B，如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

(2) 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果其中任意两个相互独立，即对 $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$，均有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立.

(3) 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果其中任意 k 个事件 $(2 \leqslant k \leqslant n)$：$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik}$ 均有

$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}), \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

(4) 对于事件序列 $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$，如果对任意正整数 $n (n \geqslant 2)$，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则称事件序列 $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ 相互独立

2. 独立事件的性质

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 相互独立，则其中任意 $m (2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

3. 试验的独立性

(1) 如果试验 E_1 和 E_2 分别产生的任何两个事件 A_1 与 A_2 都相互独立，则称试验 E_1 和 E_2 相互独立. 其直观含义是一个试验结果的发生不影响另一个试验结果发生的概率.

(2) 对于 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，如果它们分别产生的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则称 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 相互独立.

4. 伯努利(Bernoulli)概型

(1) 伯努利概型：只考虑两个对立的结果：A(成功) 和 $\overline{A}$(失败) 的试验称为伯努利概型，或伯努利试验，将这样一个伯努利试验独立重复进行 n 次就称为 n 重(次)伯努利试验，或 n 重伯努利概型，有时也简称为伯努利概型. 这里，"独立"是指试验之间相互独立，"重复"是指每次试验中 A 发生的概率保持不变.

(2) 伯努利概型概率计算公式：在 n 重 Bernoulli 概型中，设 $P(A) = p$，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

七、附录 —— 排列组合初步

1. 加法原理

假设完成一件事情有 n 种不同的方式，而第 i 种方式又有 r_i 种不同方法，$i = 1, 2, \cdots n$，则完成这件事情共有 $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ 种不同的方法.

2. 乘法原理

假设完成一件事情必须经过 n 个不同的步骤，而第 i 个步骤又有 r_i 种不同的方法，$i = 1, 2, \cdots, n$，则完成这件事情共有 $r = r_1r_2\cdots r_n$ 种不同的方法

3. 排列

(1) 不允许重复的排列：从 N 个不同元素中任取 $m (m \leqslant N)$ 个按一定的顺序排成一列，称为选排列，这样的排列共有

$$P_N^m = N(N-1)\cdots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

种不同排法，当 $m = N$ 时，$P_N^N = N!$，称为 N 个元素的全排列数.

(2) 允许重复的排列：从 N 个不同元素中有放回地任取 m 个元素按照一定的顺序排列一列，称为允许重复的排列，这样的排列共有 N^m 种不同排法.

(3) 具有相同元素的全排列：设 N 个元素由 $k (k \leqslant N)$ 种不同的元素组成，同种元素是不可区分的，第 i 种元素共有 m_i 个，$i = 1, 2, \cdots, k$，且 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = N$，则这 N 个元素的全排列共有

$$\frac{N!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$$

种不同的排法.

(4) 环状排列:从 N 个不同元素中,不放回地,即不重复地选取($m \leqslant N$)个,依次排成一个圆圈,称为环状排列,这样的排列共有

$$\frac{P_N^m}{m} = \frac{N!}{m(N-m)!}$$

种不同的排法.

4. 组合

(1) 不允许重复的组合:从 N 个不同元素中任取 m($m \leqslant N$)个元素,不管其顺序并成一组,称为从 N 个不同元素中任取 m 个的一个组合,这样的组合共有

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} \text{ 种}.$$

(2) 允许重复的组合:从 N 个不同元素中任取 m 个元素(允许重复选取,即有放回选取),不管其顺序并成一组,称为允许重复的组合,这样的组合共有

$$C_{N+m-1}^m = \frac{(N+m-1)!}{m!(N-1)!} \text{ 种}.$$

5. 几个常用的组合公式

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

(2) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

(3) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, 从而 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots C_n^n = 2^n$.

补充注释与重要结论

一、事件的运算

事件是样本空间的子集,从而其运算法则与集合运算法则完全相对应,不要与普通数的运算相混淆.例如,不要错误地认为

$$(A-B)+B = A,$$

而事实上应为

$$(A-B)+B = A \cup B,$$

特别注意事件运算中下面的重要结论:

(1) $AB \subset A \subset A \cup B$, $AA = A$, $A \cup A = A$.

(2) $A - B = A\bar{B} = A - AB$.

(3) $A = (A-B) + AB = A\bar{B} + AB$.

(4) $A \cup B = A + \bar{A}B = B + \bar{B}A = AB + A\bar{B} + B\bar{A}$.

(5) $A \cup B \cup C = A + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}C$.

上面结论可利用"文氏图"帮助理解和掌握.

二、事件的互斥与互逆

A 与 B 互斥(互不相容)指的是 A,B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$;

A 与 B 互逆指的是 A,B 不能同时发生,而且 A,B 至少有一个发生,即 $AB = \varnothing$,且 $A \cup B = \Omega$.因此

A 与 B 互逆 $\Rightarrow$ A 与 B 互斥;

A 与 B 互斥 $\not\Rightarrow$ A 与 B 互逆;

A 与 B 互逆 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互逆;

A 与 B 互斥 $\not\Rightarrow$ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互斥.

三、事件的独立性

1. 两事件的相互独立

两事件 A,B 相互独立的直观含义是其中一个事件的发生不影响另一个事件发生的概率,因此有些实际问题可凭直观进行判断,但理论证明要用下面判别条件之一来判断:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$

(2) $P(B \mid A) = P(B)$ $\quad (P(A) > 0)$.

(3) $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$ $\quad (0 < P(A) < 1)$

(4) $P(B \mid A) + P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 1$ $\quad (0 < P(A) < 1)$.

上述4个条件中任何一个都是 A,B 相互独立的充要条件,但通常用第一个进行判别.易知必然事件 Ω,不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件相互独立;进一步,概率为1或0的事件与任何事件相互独立.

2. n 个事件的两两独立与相互独立($n \geqslant 3$)

(1) n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立是指其中任何两个事件相互独立,即有下列 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个等式成立:

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

而 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立是指其中任意 k 个不同事件都是相互独立，即有下列 $2^n - n - 1$ 个等式成立：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n, k = 2, 3, \cdots, n$. 因此相互独立的事件组一定两两独立，但反之不成立. 当 $n = 3$ 时，有下面反例：

【例 1】一个均匀的正四面体. 其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红，白，黑三种颜色，现在我们以 A_1, A_2, A_3 分别记投一次四面体出现红，白，黑颜色的事件，则由于在四面体中有两面有红色，故，

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

同理，$P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$，而且易知

$$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_1A_3) = \frac{1}{4}$$

故

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

即 A_1, A_2, A_3 两两独立. 但是

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8},$$

故 A_1, A_2, A_3 不相互独立.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则由事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_k}$ 经过任何事件运算所得到的事件 $\sigma_1(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k})$ 与由事件 $A_{i_{k+2}}, \cdots, A_{i_{k+2}}, \cdots A_{i_n}$ 经过任何事件运算所得到的事件 $\sigma_2(A_{i_{k+1}}, A_{i_{k+2}}, \cdots, A_{i_n})$ 也相互独立，其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的任何一个排列，例如，若 A, B, C, D 相互独立，则 $A - B$ 与 CD 一定独立. $\overline{B}$ 与 $(A \cup D)\overline{C}$ 一定独立.

四、两事件的互不相容与独立性

A 与 B 互不相容（互斥）是指 A, B 不能同时发生，即 $AB = \Phi$. 此时与事

件的概率性质无关；但是 A 与 B 独立是指 $P(AB) = P(A)P(B)$，此时与事件的概率特性有关，故"互不相容"与"独立性"并没有蕴含关系，事实上，容易举例说明互不相容的两个事件可以独立，也可以不独立. 另外，要注意的是：若 A 与 B 互不相容，而且独立，则 A, B 至少有一个为零概率事件. 这由 $AB = \Phi$, $P(AB) = P(A)P(B)$ 立即可得 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$.

五、条件概率

设 $P(B) > 0$，则 B 发生的条件下 A 发生的条件概率为

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

不难验证条件概率 $P(\cdot \mid B)$ 满足概率的三条基本性质，即三条公理：

(1) 非负性：$P(A \mid B) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega \mid B) = 1$；

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的事件列 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B).$$

由此可知 $P(\cdot \mid B)$ 满足概率的其他一切性质，例如有：

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B).$$
$$P(A - C \mid B) = P(A \mid B) - P(AC \mid B).$$
$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(AC \mid B).$$
$$P(AC \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid AB).$$

但要注意的是：即使 A, C 相互独立，即 $P(AC) = P(A)P(C)$，条件概率 $P(\cdot \mid B)$ 并不一定满足 $P(AC \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid B)$.

六、概率定义的公理化定义

任何事件 A 的概率 $P(A)$ 是客观存在的，但概率的古典定义和几何定义都只是给出了一些特定的等可能概型中事件概率的计算方法，概率的统计定义虽然可以用来刻画非等可能概型，但实际中无法通过做无穷多次试验来确定 $P(A)$. 另外，概率论中许多悖论的提出，其中最著名的是所谓"贝特朗悖论"，它由法国学者 J. Bertrand 于 1899 年提出（可参看[1]），使得古典概率论中基本概念存在的矛盾与含糊越来越突出，因此建立一个普遍适应的严格的概率公理化定义就越来越重要. 这个工作由原苏联数学家柯尔莫哥洛夫（A.

H. kolmogrov, 1903 - 1987) 年完成，从此概率论成为一门严格的数学分支.

典型题型与例题分析

题型 Ⅰ　事件的表示和运算

【解题提示】 事件是空间的子集，正确写出样本空间才能正确表示事件，并进一步弄清楚不同事件间的关系；事件的运算与集合运算相对应，切忌与数的运算相混淆.

【例 1.1】 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 将一枚硬币抛两次，观察出现正面，反面的情况.

(2) 将一枚硬币抛两次，观察出现正面的次数.

【解】 (1) 每次抛硬币有两个可能的结果，即出现正面或反面，于是抛硬币两次共有 4 个可能的结果，即样本空间

$\Omega_1 = \{$(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)，(反面，反面)$\}$.

(2) 抛硬币两次所出现正面的次数为 0，1，2，故此时样本空间.

$\Omega_2 = \{0,1,2\}$.

【评注】 同是抛硬币两次，但由于试验的目的不同，从而样本空间不同. 要正确写出样本空间一定要弄清楚试验的目的.

【例 1.2】 写出下列试验的样本空间，并用样本点表示相应的事件.

(1) 将一颗骰子掷若干次，直至掷出的点数之和超过 2 为止，观察全部可能结果. 事件 $A = \{$恰好掷骰子一次$\}$.

(2) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的全部可能结果，事件 $B = \{$检查不超过 3 次$\}$.

【解】 (1) 若第 1 次掷出现 1 点，则需继续掷第 2 次；若第 2 次掷又出现 1 点，则需继续抛第 3 次，此时不管出现哪个点数都可以停止试验. 其他情况可类似讨论，故得样本空间为：

$\Omega_1 = \{111,112,113,114,115,116,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,$

$26,3,4,5,6,\}$.

易知事件

$$A = \{3,4,5,6\}.$$

(2) 令 0 表示查到次品，1 表示查到正品，则此时的样本空间为

$\Omega = \{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}$,

检查不超过 3 次的事件

$$B = \{00,100\}.$$

【例 1.3】 将一颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数. 令 $A = \{$两次掷出的点数相同$\}$，$B = \{$点数之和为 10$\}$，$C = \{$最小点数是 4$\}$.

(1) 写出试验的样本空间；

(2) 用样本点表示事件 A, B, C 以及 $A \cup B, ABC, A - C, C - A, B\bar{C}, A \cup (BC)$.

【解】 (1) 每次掷骰子都有 6 个可能结果，于是样本空间

$$\Omega = \{11,12,\cdots,16,21,22,\cdots,26,\cdots,61,62,\cdots,66\},$$

Ω 共包含有 36 个元素，"11" 表示第一次出现 1 点，且第二次出现 1 点，其他表示类似.

(2) $A = \{11,22,33,44,55,66\}$.

$B = \{46,55,64\}$,

$C = \{44,45,46,54,64\}$,

$A \cup B = \{11,22,33,44,55,66,46,64\}$,

$ABC = \Phi$,

$A - C = \{11,22,33,55,66\}$,

$C - A = \{45,46,54,64\}$,

$B\bar{C} = \{55\}$,

$A \cup (BC) = \{11,22,33,44,55,66,46,64\}$.

【评注】 读者不妨进一步验证事件运算的性质：$A - C = A - AC$, $C - A = C - CA$;　$B\bar{C} = B - C$,　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

【例 1.4】 设 A, B, C 为三个事件，试用 A, B, C 表示下列事件：

(1) A, B, C 中不多于一个发生；

(2) A, B, C 中不多于两个发生；

(3) A, B, C 中至少有两个发生；

(4) A, B 中至少有一个发生，但 C 不发生；

(5) A, B, C 中恰有两个发生.

【解】 (1) A,B,C中不多于一个发生等价于一个也不发生，或仅发生其中一个，于是(1) 的表示应为

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C.$$

由于(1) 的对立事件为"A,B,C 中至少有两个发生"，于是由事件的双重否定律可得(1) 的另一等价表示为

$$\overline{AB+BC+AC}.$$

(2) $\overline{ABC}$.

(3) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或等价表示为$AB+BC+AC$.

(4) $(A+B)\overline{C}$

(5) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

【评注】 利用事件间的关系直接表示另一个事件比较复杂时，可充分利用事件的双重否定律，即 $\overline{\overline{A}}=A$ 来简化表示.

【例 1.5】 设 A,B 为两个任意事件，试化简下列各式：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})$；

(2) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$；

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

【分析】 正确利用分配律，并注意当两个事件有包含关系，求和取"大"的，求积取"小"的，即当两事件 C,D 满足$C\supset D$时，$C+D=C$，$CD=D$

【解】 (1) 将 $A+B$ 看作一个事件，利用分配律可得

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B})&=(A+B)A+(A+B)\overline{B}\\&=A+A\overline{B}+B\overline{B}\\&=A+A\overline{B}\end{aligned}$$

显然 $A\overline{B}\subset A$，故 $A+A\overline{B}=A$，即

$$(A+B)(A+\overline{B})=A$$

(2) 由(1) 的结果有

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)&=A(\overline{A}+B)\\&=A\overline{A}+AB\\&=AB.\end{aligned}$$

(3) 利用(2) 的结果有

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})&=AB(\overline{A}+\overline{B})\\&=AB\overline{A}+AB\overline{B}\end{aligned}$$

$$=\Phi+\Phi=\Phi.$$

【例 1.6】 设事件 A,C 互不相容，证明：

$$(A+B)-C=A+(B-C).$$

【证明】 因为$(A+B)-C=(A+B)\overline{C}=A\overline{C}+B\overline{C}$，$A+(B-C)=A+B\overline{C}$，又 A,C 互不相容，即 $AC=\Phi$，从而 $A\subset\overline{C}$，于是 $A\overline{C}=A$，故 $(A+B)-C=A\overline{C}+B\overline{C}=A+B\overline{C}$，即有

$$(A+B)-C=A+(B-C).$$

【评注】 对于数的运算，显然有$(a+b)-c=a+(b-c)$对任意的三个数 a，b，c 均成立，但对于三个事件 A,B,C，一般情况下

$$(A+B)-C\neq A+(B-C).$$

【例 1.7】 对于事件 A 与B，如果存在事件 C 使得$A+C=B+C$，且 $AC=BC$，试证明 A 与B 为相等的事件，即 $A=B$.

【分析】 此题不便于直接利用事件的运算性质化简得到等式 $A=B$，此时一个常用的有效方法是去证明两个包含关系：$A\subset B$，$B\subset A$，这与利用数的不等式来证明数的等式的思想是一致的.

【证明】 设 $\omega\in A$，则 $\omega\in A+C$，由 $A+C=B+C$ 可知$\omega\in B+C$，从而 $\omega\in B$ 或$\omega\in C$.若 $\omega\in B$，则由 $\omega\in A$ 就推得了$\omega\in B$，故 $A\subset B$；若 $\omega\in C$，则此时 $\omega\in AC$，又 $AC=BC$，故 $\omega\in BC$，于是也有 $\omega\in B$，即有 $A\subset B$.完全类似可得 $B\subset A$，所以 $A=B$.

【评注】 一般仅由 $A+C=B+C$推不出$A=B$，再一次表明事件的运算不同于数的运算.

【例 1.8】 设事件 A,B,C 满足$C\supset AB$，$\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$ 证明：$AC=C\overline{B}+AB$.

【分析】 对于较复杂的事件间关系，我们可以先通过文氏图帮助理解，再设法严格证明它.

【证明一】 如图 1－7，结论的直观性是明显的.

图 1-7

由于 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，故 $C\subset A+B$.

而 $C\overline{B}\subset(A+B)\overline{B}=A\overline{B}+B\overline{B}=A\overline{B}$.

于是 $AC\overline{B}=A\overline{B}C\overline{B}=C\overline{B}$. 又 $ACB=CAB=AB$.

故

$$AC=AC(B+\overline{B})=ACB+AC\overline{B}$$

$$= AB + C\overline{B} = C\overline{B} + AB.$$

【证明二】 利用包含关系来证明.

设 $\omega \in AC$,则 $\omega \in A$,且 $\omega \in C$,由 $C \subset A + B$ 得 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B$,当 $\omega \in B$ 时,则由 $\omega \in AC$ 推得了 $\omega \in AB$;当 $\omega \overline{\in} B$,即 $\omega \in \overline{B}$ 时,则有 $\omega \in C\overline{B}$,于是由 $\omega \in AC$ 推得了 $\omega \in AB$ 或 $C\overline{B}$,所以.

$$AC \subset C\overline{B} + AB.$$

类似可得

$$C\overline{B} + AB \subset AC.$$

故有

$$AC = C\overline{B} + AB.$$

【例 1.9】 对于任意两事件 A 和 B,与 $A \cup B = B$ 不等价的是

(A) $A \subset B$. (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(C) $A\overline{B} = \Phi$. (D) $\overline{A}B = \Phi$. 【 】

【解】 易知 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A\overline{B} = \Phi$,故选(D).

【例 1.10】 对于事件 A 和 B,下面结论正确的是

(A) 若 A 与 B 互不相容,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互不相容.

(B) 若 A 与 B 相容,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相容.

(C) 若 A 与 B 互逆,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互逆.

(D) 若 $A - B = \Phi$,则 A 与 B 互不相容. 【 】

【解】 对于(A),由 $AB = \Phi$,显然推不出 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B} = \Phi$,对于(B),由 $AB \neq \Phi$,而 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$,易知当 $A \cup B = \Omega$ 时,有 $\overline{A}\overline{B} = \Phi$,即此时 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 可以互不相容,故(B)也不正确,对于(C),由于 $AB = \Phi$,$A \cup B = \Omega$,故 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\Omega} = \Phi$,$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB} = \overline{\Phi} = \Omega$,即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互逆,所以(C)为正确答案.

题型 II 有关概率基本性质的命题

【解题提示】 利用概率的性质、事件间的关系和运算律进行求解

【例 1.11】 已知 $P(A \cup B) = 0.6$,$P(B) = 0.3$,则 $P(A\overline{B}) =$ ______.

【解】 因为 $A\overline{B} = A - B$,所以 $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 又

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

故

$$P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$$

正确答案应填 0.3.

【例 1.12】 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,$P(AB) = 0$,$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$,则事件 A,B,C 全不发生的概率为 ______.

【解】 A,B,C 全不发生的事件为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$,于是所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) &= 1 - P(A \cup B \cup C)\\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]\\ &= 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 0)\\ &= \frac{5}{12}\ (\text{因为 } ABC \subset AB,\ P(AB) = 0,\ \text{所以 } P(ABC) = 0)\end{aligned}$$

故正确答案应填 $\frac{5}{12}$.

【例 1.13】 设事件 A,B,C 满足 $P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$,$P(ABC) = \frac{1}{16}$,则 A,B,C 中不多于 1 个发生的概率为 ______.

【解】 由于 A,B,C 中不多于 1 个发生的对立事件为 A,B,C 中至少有两个发生,故所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{AB + BC + AC}) &= 1 - P(AB + BC + AC)\\ &= 1 - [P(AB) + P(BC) + P(AC) - P(ABC)\\ &\quad - P(ABC) - P(ABC) + P(ABC)]\\ &= 1 - (\frac{3}{4} - \frac{1}{8})\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

正确答案应填 $\frac{3}{8}$.

【评注】 此题若不利用求逆事件的概率公式而直接计算,则是较复杂的,因此在计算有关"至少"或"至多"的事件概率时,求逆公式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 常常是有效的.

【例 1.14】 对于任意事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则

(A) $\bar{A}\bar{B}=\Phi$.　　(B) $AB=\Phi$

(C) $P(A)P(B)=0$.　　(D) $P(A\bar{B})-P(A)=0$.　【　】

【解】 由 $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$，$P(AB)=0$ 可知 $P(A\bar{B})-P(A)=0$，故 (D) 为正确答案，另外，下面说明 (A)，(B)，(C) 为什么不正确，考虑样本空间 $\Omega=[0,4]$ 的几何概型，令 $A=[0,2]$，$B=[2,4]$，则易知 $P(AB)=P(\{2\})=0$，但 $AB=\{2\}\neq\Phi$，$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A)P(B)=\frac{1}{4}\neq 0$，即 (B)，(C) 不正确，令 $A=[0,2]$，$B=[3,4]$，则 $P(AB)=P(\Phi)=0$，但

$$\bar{A}\bar{B}=[2,4]\cap(0,3)=[2,3]\neq\Phi.$$

【评注】 本例也说明不可能事件的概率为零，但概率为零的事件不一定是不可能事件.

【例 1.15】 设事件 A,B 同时发生时，事件 C 一定发生，则

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)=P(AB)$.

(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

【解】 由于 $AB\subset C$，于是有

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

又 $P(A\cup B)\leqslant 1$，故 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 正确答案选 (B).

【例 1.16】 设事件 A,B,C 同时发生时，事件 D 一定发生，则

(A) $P(C)\geqslant P(A)+P(D)-1$.

(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(D)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-1$.

(D) $P(D)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2$.

【解】 由于 $ABC\subset D$，于是有

$$\begin{aligned}P(D)&\geqslant P(ABC)\\&=P(AB)+P(C)-P[(AB)\cup C]\\&\geqslant P(AB)+P(C)-1\\&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)+P(C)-1\\&\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2.\end{aligned}$$

故应选 (D).

【例 1.17】 已知 $P(A)=x$，$P(B)=2x$，$P(C)=3x$ 且 $P(AB)=P(BC)$，试求 x 的最大值.

【分析】 将已知条件用一个式子联系起来容易想到加法公式，$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

【证明】 因为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)\\&\quad-P(AC)+P(ABC)\\&=x+2x+3x-P(AB)-[P(BC)+P(AC)\\&\quad-P(ABC)]\\&=6x-P(AB)-[P(AB)+P(AC)-P(ABC)]\\&=6x-P(AB)-P(AB\cup AC)\\&=6x-P(AB)-P[A(B\cup C)],\end{aligned}$$

而且 $P(AB)\leqslant P(A)=x$，$P[A(B\cup C)]\leqslant P(A)=x$，故

$$1\geqslant P(A\cup B\cup C)\geqslant 6x-x-x=4x,$$

即 $x\leqslant\frac{1}{4}$，所以 x 的最大值为 $\frac{1}{4}$，图 1－8 表明 x 在 $A=D_1$，$B=D_1+D_2$，$C=D_2+D_3+D_4$ 时取到最大值，其中事件 D_1,D_2,D_3,D_4 将样本空间分成 4 等份.

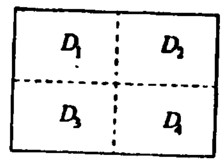

图 1—8

【例 1.18】 设 A,B 为两个任意事件，证明

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$$

【分析】 利用概率的性质对左边的式子进行变形，并利用不等式 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$，对 $\forall x$ 成立.

【证明】 先证明 $P(AB)-P(A)P(B)\leqslant\frac{1}{4}$.不失一般性,我们假定 $P(A)\geqslant P(B)$,于是有

$$\begin{aligned}P(AB)-P(A)P(B)&\leqslant P(B)-P(A)P(B)\\&\leqslant P(B)-P(B)P(B)\\&=P(B)[1-P(B)]\\&\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

其次证明 $P(AB)-P(A)P(B)\geqslant-\frac{1}{4}$,事实上,

$$\begin{aligned}&P(AB)-P(A)P(B)\\&=P(AB)-[P(AB)+P(A\bar{B})][P(AB)+P(\bar{A}B)]\\&=P(AB)[1-P(AB)-P(\bar{A}B)-P(A\bar{B})]-P(A\bar{B})P(\bar{A}B)\\&=P(AB)[1-P(A\cup B)]-P(A\bar{B})P(\bar{A}B)\\&\geqslant-P(A\bar{B})P(\bar{A}B)=-P(A\bar{B})[1-P(A\cup\bar{B})]\\&\geqslant-P(A\bar{B})[1-P(A\bar{B})]\\&\geqslant-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

故有

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}.$$

【评注】 在事件概率的有关等式或不等式的证明中,下面几个结论是重要的:

(1) 对任何事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant1$.

(2) 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

(3) 对任何事件 A,B,有

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$$
$$P(A\cup B)=P(AB)+P(\bar{A}B)+P(A\bar{B}).$$

题型 Ⅲ 古典概型的计算

【解题提示】 古典概型中事件概率的计算一般按下列步骤进行:

1. 正确判断试验为古典概型,即试验必须有两个特点:(1)试验的所有可能结果只有有限个;(2)每个结果发生的可能性相同.

2. 恰当选取样本空间 Ω,并计算 Ω 中含样本点的个数 n.

3. 计算要求概率的事件 A 中含样本点的个数 k.

4. 由古典概型概率计算公式得到

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

另外,在具体计算过程中要注意下面两点:

1. 对于比较简单的试验,即样本空间所含样本点数较少,这时可直接写出样本空间 Ω 和事件 A,然后数出各自所含样本点的个数即可.

2. 对于较复杂的试验,一般不再写出样本空间和事件 A 中的元素,而是利用排列组合方法计算它们各自所含的样本点数,但这时一定要保证 n 和 k 的计算方法一致,即要么都用排列,要么都用组合进行计算,否则就会得出错误的结果.在用排列组合求解具体问题时常遇到下列具有普遍意义的模型:

(1)随机取球模型:从 n 个球(或产品)中任取 k 个球,即每个球被取到的可能性相同,按有放回,无放回以及考虑取球的次序和不考虑取球次序,其在每种方式下各种不同取法,即基本事件总数如下表1-1:

表1-1

取球方式		基本事件总数
有放回	考虑次序	n^k
	不考虑次序	C^k_{n+k-1}
无放回	考虑次序	P^k_n
	不考虑次序	C^k_n

(2)随机投球模型:将几个球随机投到 n 个盒中,按每盒最多可以容纳一个球和可以容纳任意多个球,以及球可分辨和不可分辨等四种情形,其每种情形下各种不同的投法,即基本事件总数如下表1-2:

表 1 - 2

投球方式		基本事件总数
每个盒子可容纳任意多个球	球可分辨	N^n
	球不可分辨	C_{N+n-1}^n
每个盒子最多可容纳一个球	球可分辨	P_N^n
	球不可分辨	C_N^n

【例 1.19】 将一枚均匀的硬币掷两次，试求至少出现一次正面的概率.

【分析】 这是一个比较简单的古典概型，从而可直接写出样本空间和事件中的元素.

【解】 易知试验为古典概型，令 $A=$ {至少出现一次正面}，于是样本空间
$\Omega=$ {(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)，(反面，反面)}
$A=$ {(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)}.
故
$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}=\frac{3}{4}.$$

【例 1.20】 将一枚均匀的骰子掷两次，则两次出现的最小点数等于 4 的概率为______.

【解】 易知试验为古典概型，且样本空间
$$\Omega=\{(i\quad j),i,j=1,2,\cdots,6\},$$
所求概率的事件
$$A=\{(4\quad 4),(4\quad 5),(4\quad 6),(5\quad 4),(6\quad 4)\}.$$
故 $P(A)=\frac{5}{36}$.

【例 1.21】 100 件产品中有 10 件次品，现从中任取 5 件进行检验，求所取的 5 件产品中至多有 1 件次品的概率.

【解】 从 100 件产品中任取 5 件，所有不同的取法，即基本事件总数为 C_{100}^5，而有利事件数为一件次品也没有取到的不同取法 C_{90}^5 加上仅取到一件次品的不同取法 $C_{90}^4\cdot C_{10}^1$，故所求概率为

$$P=\frac{C_{90}^5+C_{90}^4C_{10}^1}{C_{100}^5}\approx 0.9231.$$

【例 1.22】 从 0，1，2，…，9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：
$$A_1=\{\text{三个数字中不含 0 和 5}\};$$
$$A_2=\{\text{三个数字中不含 0 或 5}\};$$
$$A_3=\{\text{三个数字中含 0 但不含 5}\}.$$

【解】 因不必考虑三个数字的顺序，故按组合进行计算，于是基本事件总数为 C_{10}^3，有利于 A_1 的基本事件数为 C_8^3；有利于 A_2 的基本事件数应为不含 0 的基本事件数加上不含 5 的基本事件数再减去既不含 0 也不含 5 的基本事件数，即为 $C_9^3+C_9^3-C_8^3$；有利于 A_3 的基本事件数为 C_8^2，这是因为三个数字中有一个为 0，只有一种取法，而另外两个数字不含 5，当然也不再取 0，故有 C_8^2 种取法，由乘法原理共有 $1\cdot C_8^2=C_8^2$ 种不同取法. 由古典概率公式得
$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$
$$P(A_2)=\frac{C_9^3+C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$
$$P(A_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}.$$

【评注】 对于 A_2 可以作下列分解：令 $B_1=$ {三个数字不含 0}，$B_2=$ {三个数字不含 5}，则 $A_2=B_1+B_2$，由加法公式有 $P(A_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)$，然后由古典概率公式分别求出 $P(B_1)$，$P(B_2)$，$P(B_1,B_2)$ 即可得 $P(A_2)$.

【例 1.23】 袋中有 a 个红球，b 个白球，现从袋中每次任取一球，取后不放回，试求第 k 次取到红球的概率（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

【解一】 排列法

设各个球是有区别的，比如对每个球进行了编号，把取出的球依次排列在一直线上的 $a+b$ 个位置上，则样本空间中基本事件总数为 $a+b$ 个球在 $a+b$ 个位置上的全排列数：$(a+b)!$ 令 $A=$ {第 k 次取到红

球}．第 k 次取到红球相当于首先在第 k 个位置上排红球，共有 a 种排法；其次在其余的 $a+b-1$ 个位置上排剩下的 $a+b-1$ 个球，共有 $(a+b-1)!$ 种不同排法，由乘法原理得有利于事件 A 的事件数为 $a\cdot(a+b-1)!$，故：

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

【解二】 组合法

除了颜色之外，将各个球看作没有区别，将取出的球还是依次放在直线上的 $a+b$ 个位置上，此时 a 个红球在 $a+b$ 个位置上的所有不同放法为组合数 C_{a+b}^{a}（因 a 个红球之间没有区别，也就是不须考虑其排列次序，所以是组合数），而这个数就是 a 个红球被取出的所有不同取法总数，即样本空间中基本事件总数，令 $A=\{$第 k 次取到红球$\}$．第 k 次取到红球，即在第 k 个位置上必须放红球，其余的 $a-1$ 个红球可放在其余的 $a+b-1$ 个位置的任意 $a-1$ 个位置上，其所有不同的放法为组合数 C_{a+b-1}^{a-1}，即有利于事件 A 的基本事件数，故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

【评注】 (1) 本例说明不放回取球模型中，第 k 次取到红球的概率与次序 k 无关，它是一个常数，这正说明了在实际中抽签或抓阄问题的公平性．

(2) 本例说明同一个试验，样本空间的选取可以不同，但若都按古典概型求解，则必须保证都满足"等可能性"和"有限性"，而且求解时基本事件总数和有利事件数的计算要一致，即要么都用排列，要么都用组合．

(3) 本例也可以利用全概率公式，对 k 用归纳法求得概率为 $\frac{a}{a+b}$．

【例 1.24】 从数字 $1,2,\cdots,9$ 中(可重复地)任取 n 次，试求所取的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率

【分析】 n 个数的乘积要能被 10 整除，则 n 个数中至少有一个为偶数和至少有一个为 5，另外基本事件总数显然为 9^n．

【解】 $A=\{$所取的 n 个数的乘积能被 10 整除$\}$，$B=\{$所取的 n 个数中至少有一个为偶数$\}$，$C=\{$所取的的 n 个数中至少有一个为 5$\}$，则

$A=BC$，$\overline{A}=\overline{B}+\overline{C}$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B}+\overline{C})$$
$$=1-[P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\overline{C})].$$

易知样本空间中基本事件总数为 9^n，而有利于 $\overline{B}$ 的基本事件数为 5^n，有利于 $\overline{C}$ 的基本事件数为 8^n，有利于 $\overline{B}\overline{C}$ 的基本事件数为 4^n，所以由古典概率计算公式得

$$P(A)=1-\left[\frac{5^n}{9^n}+\frac{8^n}{9^n}-\frac{4^n}{9^n}\right]$$
$$=1-\frac{5^n}{9^n}-\frac{8^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}.$$

【评注】 当直接计算一个事件中样本点个数比较困难时，一个常用的手段是利用公式：$P(A)=1-P(\overline{A})$ 转化为求其对立事件中含样本点的个数．

【例 1.25】 设有 n 个球和 $N(N\geqslant n)$ 个盒子，现将 n 个球随机分配到 N 个盒子中，试在下列 4 种情况下分别求事件 $A=\{$某指定的 n 个盒子中各有 1 个球$\}$ 和 $B=\{n$ 个球分到 n 个不同的盒子中$\}$ 的概率：

(1) 每个盒子可容纳的球数不限，且每个球可分辨；

(2) 每个盒子可容纳的球数不限，且每个球不可分辨；

(3) 每个盒子至多容纳 1 个球，且每个球可分辨；

(4) 每个盒子至多容纳 1 个球，且每个球不可分辨．

【解】 (1) 此时每个球均可放到 N 个盒子中的任何一个，即有 N 种放法，于是 n 个球放到 N 个盒子中共有 N^n 种不同放法，这即为样本空间中基本事件总数，有利于事件 A 的基本事件数为 $n!$，这是因为球是可辨的，比如说从 $1\sim n$ 对球进行了编号，于是某指定的 n 个盒子中各有 1 个球对应着这 n 个球的一个全排列，而所有不同的全排列数为 $n!$．由古典概率计算公式得

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

有利于事件 B 的基本事件数可这样计算：首先从 N 个盒子中选取 n 个盒子，共有 C_N^n 种选法，其次将 n 个球放到选取的 n 个盒子中，每个盒子中放一个球，共有 $n!$ 种放法，由乘法原理知 n 个球放到 N 个盒子中的 n 个不同盒子的放法有 $C_N^n\cdot n!$ 种，所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}$$

(2) 基本事件总数的计算是一个允许重复的组合问题，我们用下列方法来求得：用 $N+1$ 个 | 把空间分成 N 个盒子，而用 n 个 0 代表 n 个球，于是 n 个不可分辨的球放到 N 个盒子中的一种方法可用下列记号表示：|000|0||…|00|，这表明第1个盒子有3个球，第二个盒子有1个球，第3个盒子是空的，…，第 N 个盒子有2个球. 显然，用这样的记号表示后，任何一种方法其开始和末了必须是 1，而其余的 $N-1$ 个 | 和 n 个 0 可以按任意次序出现，故所有可区别的放法种数等于从 $N-1+n=N+n-1$ 个位置中任取 n 个位置放 0 的选法，即为 C_{N+n-1}^n. 这就是样本空间中的基本事件总数.

事件 A 表示"某指定的 n 个盒子中各有一个球"，即 n 个 0 放在 $N+n-1$ 个位置中固定的 n 个位置，当然就是 1 种方法，所以

$$P(A)=\frac{1}{C_{N+n-1}^n}$$

事件 B 表示"n 个球分到 n 个不同的盒子中"，即每个 0 只能放在两个相邻的 1 之间，而两个相邻的 1 的数目，即盒子的数目为 N，故有利于 B 的基本事件数为 C_N^n，从而可得

$$P(B)=\frac{C_N^n}{C_{N+n-1}^n}.$$

(3) 此时球可分辨，且一个盒子至多容纳一个球，故 n 个球放到 N 个盒子中的所有不同放法即为从 N 个元素中选取 n 个元素的选排列数：P_N^n，也就是样本空间中基本事件总数.

有利于 A 的基本事件数即 n 个球在 n 个盒子中的全排列数 $n!$，于是有

$$P(A)=\frac{n!}{P_N^n}$$

有利于 B 的基本事件数显然为 P_N^n，实际此时 B 的必然事件，故

$$P(B)=\frac{P_N^n}{P_N^n}=1$$

(4) 此时球不可分辨，且一个盒子至多放一个球，于是所有不同的放

法即从 N 个盒子中选取 n 个盒子的不同取法（不考虑次序），共有 C_N^n，这就是基本事件总数.

有利于 A 的基本事件数显然为 1，故

$$P(A)=\frac{1}{C_N^n}$$

有利于 B 的基本事件数为 C_N^n. 实际上此时 B 也是必然事件，故

$$P(B)=\frac{C_N^n}{C_N^n}=1.$$

【例1.26】 从5双不同的鞋子中任取4只，求此4只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率

【分析】 本例的基本事件总数容易计算，即为 C_{10}^4，但有利事件数相对较难，下面给出几种不同解法.

【解法一】首先从5双鞋中取出一双，并将此两只鞋全部取出，然后从剩下的4双中取出两双，再在每双中各取1只，于是取法共有

$$C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1 \text{ 种}$$

显然，这样取得的4只鞋仅有一双成对，而4只鞋配成两双的取法有 C_5^2 种，故取得的4只鞋至少有一双的取法为

$$C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2$$

故所求概率

$$P=(C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2)/C_{10}^4=\frac{13}{21}$$

【解法二】设 A 表示"至少有两只鞋子成一双"，于是 $\overline{A}$ 表示"没有成双的鞋子"故有利于 $\overline{A}$ 的基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，即从5双中取出4双，再从每双中各取一只的取法总数所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1/C_{10}^4)$$
$$=\frac{13}{21}$$

【解法三】首先从5双鞋中取出一双，取法为 C_5^1，且将此两只鞋全部取出，然后从剩下的8双鞋中任取出两只，其取法为 C_8^2，但在 $C_5^1C_8^2$ 中，4只中恰好成2双的情况都重复了1次，于是 A 的取法共有

$$C_5^1C_8^2\quad C_5^2 \text{ 种}$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

【解法四】首先从 5 双鞋中取出一双，取法为 C_5^1，且将此两只鞋全部取出；然后从剩下的 8 双鞋中任取两只，其取法为 C_8^2，此 8 只鞋中有 2 只成一双的取法为 C_4^1。所以从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋恰好只有两只鞋子配成一双的取法为 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$；而从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子配成两双的取法为 C_5^2。于是 A 的取法共有

$$C_5^1(C_8^2-C_4^1)+C_5^2 \quad 种$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1(C_8^2-C_4^1)+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【解法五】考虑一只一只地将鞋取出，有先后次序，则所有取法为 $10\times9\times8\times7$，而其逆事件 $\overline{A}$ 的取法为 $10\times8\times6\times4$，所以

$$P(A)=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$

【评注】本例再次说明，概率的求逆公式可使问题的求解大为简化，因此务必熟练掌握此技巧。另外，本题有下面很诱人的错误解法，请自己分析错误所在。

首先从 5 双鞋中任取 1 双，其 2 只全部取出，然后在剩下的 8 只鞋中任取 2 只，于是总的取法为 $C_5^1C_2^2C_8^2$，并且这样取出的 4 只鞋可保证至少有两只成一双，故所求概率为

$$P(A)=C_5^1C_2^2C_8^2/C_{10}^4$$

【例 1.27】将 3 个球（分可辨与不可辨两种情形）随机地投入到 4 个杯子中，假设杯子容纳球的个数不限。试求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率。

【分析】容易判断是古典概型问题，当球可辨与不可辨时，相应的有利事件数与基本事件总数大不相同。

【解】设 A_1,A_2,A_3 分别表示杯中球的最大个数为 1，2，3 的事件。

(1) 当球可辨时，此时 3 个球放到 4 个杯子中总的放法有 4^3 种，而 A_1 发生时，3 个球必须放在 3 个不同的杯子中，其总的放法为 $C_4^3 3!$ 即先取定 3 个杯子，共有 C_4^3 种，然后让 3 个球在 3 个杯中作全排列，A_2 发生时，2 个球须放在同一个杯子中，从而总的放法为 $C_4^1C_3^2C_3^1$，即先取定 1 个杯子，有 C_4^1 种取法，再从 3 个球中任取 2 个放入取定的杯中，有 C_3^2 种取法，最后将剩下的 1 个球放入剩下的 3 个空杯中，有 C_3^1 种放法，A_3 发生时，3 个球须放在同一个杯子中，故总的放法为 C_4^1，于是由古典概型计算公式有

$$P(A_1)=\frac{C_4^3 3!}{4^3}=\frac{3}{8},$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_3^2C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16},$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

(2) 当球不可分辨时，基本事件总数的计算是一个有重复的组合问题（可参看例 1.25），即为 $C_{4+3-1}^3=C_6^3$。A_1 发生时，仅有一个杯子是空的，从而有利事件数为 C_4^3。A_2 发生时，有 2 个杯子是空的，于是有利事件数为 $C_4^2C_2^1$，即先取定 2 个空杯，共有 C_4^2 种取法，然后将 3 个球放到剩下的 2 个杯中，分别放入 2 个球和 1 个球，共有 C_2^1 种放法。A_3 发生时，显然有利事件数为 C_4^1。故

$$P(A_1)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5},$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}.$$

【例 1.28】将分别写有字母 p、r、o、b、a、b、i、l、i、t、y 的卡片任意抽出，试求按抽出顺序恰好组成单词 probability 的概率；任意抽出 7 张，恰好组成单词 ability 的概率。

【分析】在计算基本事件总数时，必须注意到这是一个有重复的排列问题，即其中有 2 个字母 b 与 i 各重复了 1 次。

【解】 设 A_1, A_2 分别表示抽出的卡片能组成 probability 和 ability 的事件，现将两个 b 和两个 i 分别编号为 b_1, b_2 与 i_1, i_2，于是11张卡片可以看作11个不同的之某，从而其全部抽出的不同排列总数为 $P_{11}^{11} = 11!$，这就是第一个试验，即任意抽出11张的样本空间中基本事件总数，由于在单词 probability 中 b 和 i 均有 $2!$ 种排法，故有利于 A_1 的基本事件数为 $2!2!$，由古典概率计算公式有

$$P(A_1) = \frac{2!2!}{11!} = \frac{4}{11!}$$

类似得第二个试验，即任意抽出7张的样本空间中基本事件总数为 P_{11}^7，单词 ability 中 b 有两种排法（排 b_1b_2 或 b_2b_1），i 有 $2!$ 种排法（即 i_1i_2 或 i_2i_1），故有利于 A_2 的基本事件数为 $2 \cdot 2! = 4$ 于是

$$P(A_2) = \frac{4}{P_{11}^7}$$

【例1.29】 50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱，每个部件用3只铆钉，若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，从而成为不合格品，试求10个部件都是合格品的概率。

【分析】 若利用古典概型直接计算，则是相当复杂的，于是考虑从对立事件着手。

【解】 设 A_i = {第 i 个部件是合格品} $i = 1,2\cdots,10$，于是所求概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_{10}) = 1 - P(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \cdots + \overline{A}_{10}).$$

$\overline{A}_i$ 表示第 i 个部件强度太弱，即3个强度太弱的铆钉都装在第 i 个部件上，于是 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_{10}$ 两两互斥，故

$$P(A_1A_2\cdots A_{10}) = 1 - \sum_{i=1}^{10} P(\overline{A}_i).$$

又显然有 $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = \cdots = P(\overline{A}_{10}) = \dfrac{1}{C_{50}^3}$，所以

$$P(A_1A_2\cdots A_{10}) = 1 - \frac{10}{C_{50}^3} = \frac{1959}{1960}.$$

【例1.30】 掷 n 颗骰子，求出现最大的点数为5的概率

【分析】 本例不管是直接计算还是从对立事件着手都是较复杂的，但利用差事件是简洁的

【解】 设 A = {最大的点数是5}，B = {最大的点数不超过5}，C = {最大的点数不超过4}，于是易知 $C \subset B$，且 $A = B - C$，每颗骰子可能出现的点数为1,2,3,4,5,6，于是基本事件总数为 6^n，有利于 B 的事件数为 5^n，有利于 C 的事件数为 4^n，所以

$$P(A) = P(B-C) = P(B) - P(C)$$

$$= \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n}{6^n} = \frac{5^n - 4^n}{6^n}.$$

【例1.31】 （匹配问题） 某人写了 n 封信给不同的 n 个人，并在 n 个信封上写好了各人的地址，现在每个信封里随意地塞进一封信，试求至少有一封信放对了信封的概率。

【分析】 初一看似乎应用对立事件的概率求解，但实际上将更加复杂，我们利用广义加法公式求解

【解】 设 A_i = {第 i 封信装对了信封}，$i = 1,2,\cdots,n$ 于是所求概率为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

由广义加法公式有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

因为对于某一封信来说，它可以等可能地放进 n 个信封中的任何个，而只有一个信封是放对的，所以

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

对于某两封信来说，所有的放法为 $n(n-1)$，这是因为其中第一封信有 n 种放法，第二封信有 $n-1$ 种放法，由乘法原理得总的放法为 $n(n-1)$，而能放对的放法只有一种，因此

$$P(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i \ne j, \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

类似地有

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad i,j,k \text{ 互不相等}.$$

……

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}.$$