高职高专公共课系列教材

高等应用数学

下册

主编　左艳芳　杨家坤

云南大学出版社

高职高专公共课系列教材

高等应用数学

下　册

主　编　左艳芳　杨家坤

副主编　李庆芹　吴武琴　杨朝晖

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学．下册/左艳芳，杨家坤主编．—昆明：云南大学出版社，2009

ISBN 978-7-81112-749-2

Ⅰ．高… Ⅱ．①左…②杨… Ⅲ．应用数学—高等学校—教材 Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 014746 号

高等应用数学（下册）

左艳芳　杨家坤　主编

组织策划：徐　曼
责任编辑：徐　曼　朱光辉
封面设计：刘　雨
出版发行：云南大学出版社
印　　装：昆明理工大学印刷印务包装有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：11.5
字　　数：280 千
版　　次：2009 年 2 月第 1 版
印　　次：2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81112-749-2
定　　价：22.00 元

地　　址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内（邮编：650091）
发行电话：0871-5033244　5031071
网　　址：www.ynup.com
E-mail：market@ynup.com

前　　言

本书是为了适应高等职业技术教育培养技术型应用型人才的需要，适应高等职业教育大众化发展趋势的现实，集多所院校之力量编写的具有云南地方特色的高等职业技术教育教材。

在本书编写过程中我们努力贯彻以下原则:

1. 突出以应用、实用、够用为度的教学原则，不追求严密论证;

2. 注重以实例引入知识点，并最终回归到数学应用的思想，加强学生对数学的应用知识、兴趣和能力的培养;

3. 注意有关概念的实际情况解释，力求表述准确、思路清晰、通俗易懂。注重教学方法和教学思想的阐述，注意培养学生的综合素质，培养学生用数学原理和方法消化、吸收工程概念和工程原理的能力;

4. 在每章或每节开始，都用简短语言点题，以使读者了解本章或本节所讨论问题的来龙去脉，起到承上启下的作用；每节之后配有一定数量的习题，供学生练习；在每章末都作了小结，帮助学生复习本章内容，理清思路，掌握学习内容及教学要求，同时附上两份复习题帮助学生检测学习效果，以便查缺补漏。

本书分上、下两册，共十四章。上册为一元函数微积分、微分方程和无穷级数等内容，建议 70 ~90 学时；下册为多元函数微积分、线性代数、概率统计、拉氏变换等内容，建议 60 ~70 学时。

参加本书编写的院校有：昆明冶金高等专科学校、昆明工业职业技术学院、昆明大学、云南国土资源职业技术学院、云南医学高等专科学校。本书由左艳芳、杨家坤任主编，李庆芹、吴武琴、杨朝晖任副主编。

下册各章编写人员如下:

第九章：洪银胜、陈丽萍；第十章：杨家坤；第十一章：左艳芳、李庆芹；第十二章：杨朝晖、吴武琴；第十三章：张锦华、杨家坤。全书由左艳芳、杨家坤统稿。

由于编者水平有限，书中错误在所难免，欢迎各位专家和使用本书的师生提出宝贵意见。

编　者

2009 年 1 月

目　　录

第九章　多元函数微分学

第一节　空间直角坐标系及常见曲面

一、空间点的坐标

以空间一定点 o 为公共原点，作三条相互垂直的数轴 ox、oy、oz，使它们成右手系(即使右手拇指、食指、中指两两相互垂直，拇指、食指的方向分别与 ox、oy 轴正向一致时，中指的方向就与 oz 轴的正方向一致)，这三条数轴就构成了空间直角坐标系(如图 9. 1. 1)。定点 o 叫做坐标原点，ox 叫横轴，oy 叫纵轴，oz 叫竖轴。三条坐标轴中每两条可以确定一个平面，一共可以确定三个平面: xoy 面、xoz 面、yoz 面，这三个平面统称为坐标面。显然，三个坐标面两两相互垂直。

有了空间直角坐标系，就可以用三个有序实数确定空间一个点的位置(这与平面直角坐标系内的点与有序实数对之间一一对应类似)。设 M 是空间一点(如图 9. 1. 2)，过 M 作 xoy 面的垂线，垂足为 P，过 M 作 z 轴的垂线，垂足为 Q。若 P 点在 xoy 面上的坐标为 (x_0, y_0)，Q 点在 z 轴上的坐标为 z_0，则 M 点就唯一对应三个有序实数 (x_0, y_0, z_0)，而这三个有序实数也能唯一确定空间一点 M。因此空间的点 M 与三个有序实数建立了一一对应关系。有序实数 (x_0, y_0, z_0) 叫点 M 的坐标，x_0、y_0、z_0 分别叫点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标。

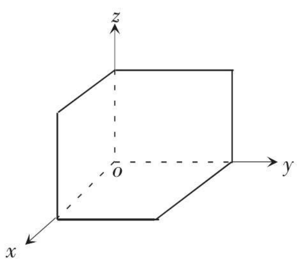

图 9. 1. 1

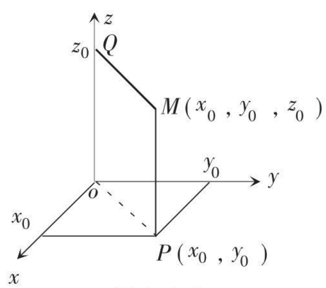

图 9. 1. 2

例 1　过点 M(1, 3, 2) 分别作三个坐标面的平行平面，使其与三个坐标面围成一个长方体，求长方体各顶点的坐标。

解　如图 9. 1. 3 所示，M_1 是 M 在 xoy 面上的投影，所以 M_1 的坐标为(1, 3, 0)。$M_1N_1 \perp y$ 轴且 N_1 在 y 轴上，所以 N_1 的坐标为(0, 3, 0)。o 是原点，坐标为(0, 0, 0)。N，P，Q 在 xoy 面上的投影分别 N_1，o，Q_1，且它们到 xoy 面的距离都是 2，所以它们的坐标分别为 N(0, 3, 2)，P(0, 0, 2)，Q(1, 0, 2)。且 $M_1Q_1 \perp x$ 轴且 Q_1 在 x 轴上，所

以 Q_1 的坐标为(1，0，0)。

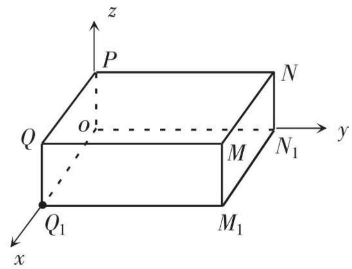

图 9.1.3

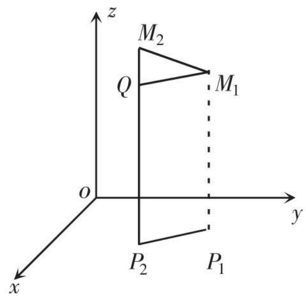

图 9.1.4

二、空间两点间的距离公式

已知空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过 M_1，M_2 分别作 xoy 面的垂线，垂足为 P_1，P_2，过 M_1 作 P_2M_2 的垂线，垂足为 Q(如图 9.1.4)。由坐标的定义知，在 xoy 平面内，P_1 的坐标为(x_1, y_1)，P_2 的坐标为(x_2, y_2)，而 $z_1 = P_1M_1$，$z_2 = P_2M_2$，由平面的两点间距离公式知:

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$\text{而} |QM_2| = |P_2M_2 - P_1M_1| = |z_2 - z_1|$$

所以，在 $Rt\triangle M_1QM_2$ 中

$$|M_1M_2|^2 = |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 = |P_1P_2|^2 + |QM_2|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式。

三、曲面方程的概念

与平面解析几何中建立的曲线与方程的对应关系一样，可以建立空间曲面与包含三个变量的方程 $F(x, y, z) = 0$ 的对应关系。

如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 有如下关系:

(1) 曲面 S 上任意一点的坐标满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程 $F(x, y, z) = 0$。

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 称为曲面 S 的方程，而曲面 S 称为该方程的图形(如图 9.1.5 所示)。

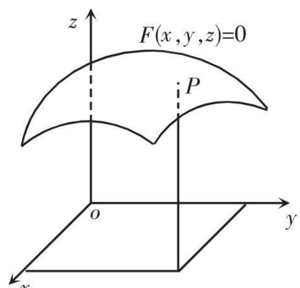

图 9.1.5

例 2　求以 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，以 r 为半径的球面方程。

解　设 $M(x, y, z)$ 为球面上任意一点，那么，$|MP| = r$。

因此　$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$，

即　$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$。

反过来不难证明坐标满足这个方程的点都在指定的球面

上。所以此方程即为球面的方程。

例3 一动点 $M(x, y, z)$ 与两定点 $M_1(1, -1, 0)$、$M_2(2, 0, -2)$ 的距离相等，求此动点 M 的轨迹方程。

解 依题意有 $|MM_1| = |MM_2|$

由两点间距离公式得 $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+2)^2}$

化简后可得点 M 的轨迹方程为 $x+y-2z-3=0$

由几何学知识知道，动点 M 的轨迹是线段 M_1M_2 的垂直平分面，因此上面所求的方程即为该平面的方程。

四、常见曲面及其方程

1. 平　面

如图 9.1.6 所示，平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$$

三种特殊位置的平面:

(1) 若平面 α 与 xoy 面平行，则其方程为 $z=z_0$(如图 9.1.7 所示);

(2) 若平面 α 与 xoz 面平行，则其方程为 $y=y_0$(如图 9.1.8 所示);

(3) 若平面 α 与 yoz 面平行，则其方程为 $x=x_0$(如图 9.1.9 所示)。

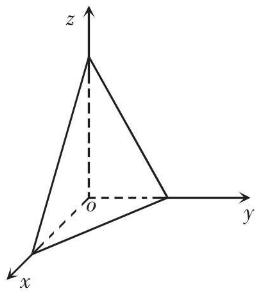

图 9.1.6

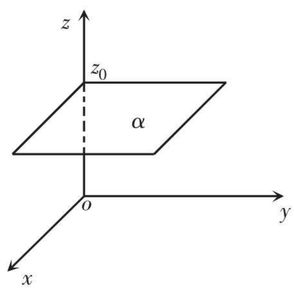

图 9.1.7

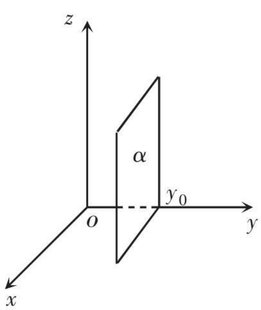

图 9.1.8

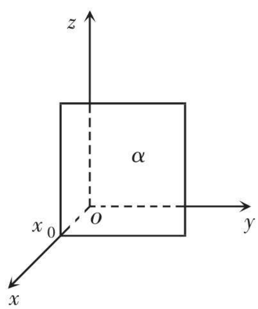

图 9.1.9

例4 设 $P_1(2, 1, -1)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(0, 3, -2)$ 是平面 α 上的三个点，求平面 α 的方程。

解 设平面 α 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

由于 P_1, P_2, P_3 在平面 α 上，所以

$$\begin{cases} 2A + B - C + D = 0 \\ A - B + 3C + D = 0 \\ 3B - 2C + D = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $A = -\frac{2}{5}D$，$B = -\frac{3}{5}D$，$C = -\frac{2}{5}D$

所以平面 α 的方程为 $-\frac{2}{5}Dx - \frac{3}{5}Dy - \frac{2}{5}Dz + D = 0$

即 $2x + 3y + 2z - 5 = 0$

2. 球　面

由例 2 知以 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，以 r 为半径的球面的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

特别是当球心为原点，即 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 时，球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$。

$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$是球面的上半部(如图 9.1.10 所示)

$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$是球面的下半部(如图 9.1.11 所示)

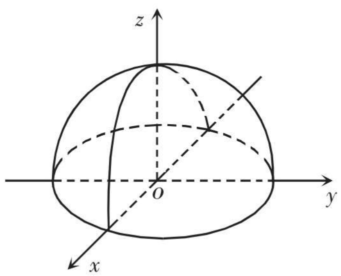

图 9.1.10

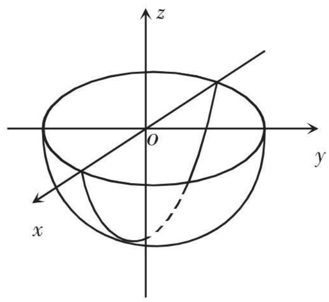

图 9.1.11

3. 抛物面

抛物面的方程为

$$z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} \quad (p，q 同号)$$

p，q 同正时，抛物面开口向上，如图 9.1.12 所示；p，q 同负时，抛物面开口向下。

当 $p = q$ 时，曲面可以看成是由 xoz 面上的抛物线 $z = \frac{x^2}{p}$绕 z 轴旋转而成的，这时称曲面为旋转抛物面。如图 9.1.13 所示。

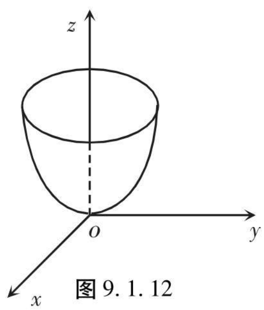

图 9.1.12

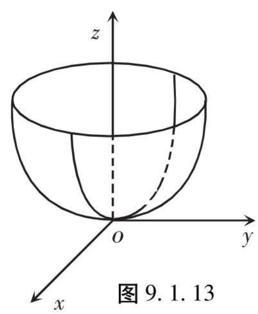

图 9.1.13

4. 柱面及其方程

设动直线 L 上的一个点沿着定曲线 C 移动时，L 随着这个点平行移动，动直线 L 所形成的曲面称为柱面。定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线。母线常平行于某坐标轴。母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y)=0$。

例如 $x^2+y^2=R^2$ 在空间表示的曲面是平行于 z 轴的直线(母线)沿着 xoy 面上的圆周 C(准线)平行移动而产生的，这个曲面称为圆柱面(如图 9.1.14 所示)。

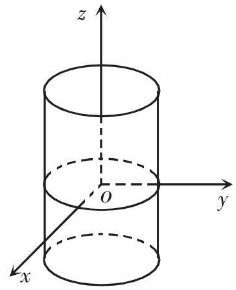

图 9.1.14

五、两曲面交线在坐标平面上的投影

设两曲面的方程为 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$，它们的交线 C 上任意一点的坐标同时满足这两个方程，所以它们的交线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases} \tag{1}$$

从这个方程中消去 z，得到方程

$$H(x, y)=0 \tag{2}$$

因为(2)不含 z，所以(2)是母线垂直于 xoy 面的一个柱面的方程。另一方面，式(2)是由式(1)消去 z 得到的，所以坐标满足式(1)的点，其坐标也满足式(2)，即曲线 C 上的点都在柱面(2)上，从而曲线 C 在 xoy 面上的投影就是柱面(2)与 xoy 面的交线，它的方程为

$$\begin{cases} H(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

用类似的方法可得到曲线 C 在 yoz 面和 xoz 面上的投影的方程。

例 5 求圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的交线在 xoy 面上的投影曲线的方程。

解 由 $\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{2}$$

所以，所求投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

它表示 xoy 平面上以原点为圆心，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ 为半径的圆。

习题 9－1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点:

A(1, 1, 1), B(−2, 1, 4), C(0, 2, −1), D(2, −1, −1)

2. 求点 A(4, 0, 1) 与点 B(2, −1, 3) 的距离。

3. 已知球面方程 $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z=0$，求球心坐标和球半径。

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 与平面 $x+y+z=2$ 的交线在 xoy 面上的投影方程。

第二节　二元函数的极限和连续性

一、二元函数的概念及其图像

1. 二元函数的概念

在实际问题中经常会遇到依赖于两个变量的函数。例如圆柱体的体积 $V=\pi r^2h$，体积由半径 r 和高 h 两个变量确定；又如电功率 $P=\frac{U^2}{R}$，功率由电压 U 与电阻 R 两个变量确定。如 $V=\pi r^2h$，$P=\frac{U^2}{R}$这样有两个自变量的函数叫做二元函数。

定义 9.2.1　设有三个变量 x，y 和 z，如果当变量 x 和 y 在它们的变化范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照某个对应法则，总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$ 或 $z=z(x,y)$。

其中 x 和 y 称为自变量，函数 z 称为因变量，自变量 x 和 y 的变化范围 D 称为函数的定义域。定义域内一点(x_0,y_0)所对应的函数值记为 $z_0=f(x_0,y_0)$，或 $z\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，所有函数值组成的集合称为函数的值域。类似的，可以定义三元及三元以上的函数。称二元及二元以上的函数为多元函数。

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域在几何上表示一个平面区域。所谓平面区域可以是整个 xoy 平面或者是 xoy 平面上由几条曲线所围成的部分。围成平面区域的曲线称为该区域的边界，包括边界在内的区域称为闭区域，不包括边界的区域称为开区域。如果区域可以包含在以原点为中心的某一个圆内，则称为有界区域，否则称为无界区域。

例 1　求函数 $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$的定义域。

解　由题意，自变量 x，y 应该满足不等式 $16-x^2-y^2\geqslant 0$。

即　$x^2+y^2\leqslant 4^2$

所以，定义域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4^2\}$，它表示 xoy 平面上以原点为圆心，以 4 为半径的圆的内部(包含边界即圆周)(如图 9.2.1 所示)。

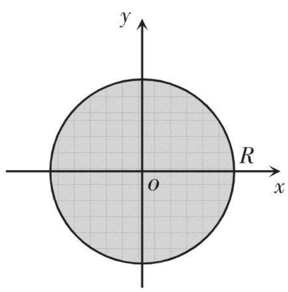

图 9.2.1

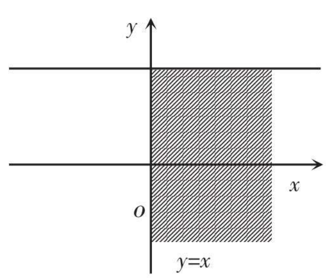

图 9.2.2

例 2 求函数 $z=\sqrt{x}-\sqrt{1-y}$ 的定义域。

解 由题意，自变量 x，y 应该满足不等式组

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\1-y\geqslant 0\end{cases} \quad 即\begin{cases}x\geqslant 0\\y\leqslant 1\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $\{(x, y) \mid x\geqslant 0, y\leqslant 1\}$，$x\geqslant 0$ 表示直线 $x=0$ 右侧半平面，$y\leqslant 1$ 表示直线 $y=1$ 下半平面，因此定义域是直线 $y=1$ 及 $x=0$ 之间的右下半平面(包含边界)(如图 9.2.2 所示)。

例 3 求函数 $z=\dfrac{1}{lg(y-x)}$ 的定义域。

解 由题意，自变量 x，y 应该满足不等式组

$$\begin{cases}y-x>0\\y-x\neq 1\end{cases} \quad 即\begin{cases}y>x\\y\neq x+1\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $D=\{(x, y) \mid y>x, y\neq x+1\}$，它是 xoy 平面上直线 $y=x$ 上方但去掉直线 $y=x+1$ 的部分(不包括边界)(如图 9.2.3 所示)。

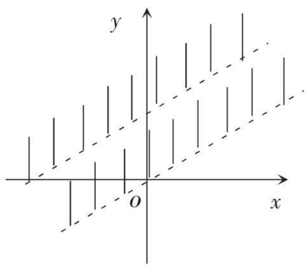

图 9.2.3

例 4 已知函数 $f(x, y)=x^3-2xy+3y^2$，求 $f(-2, 3)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{y}\right)$。

解 $f(-2, 3)=(-2)^3-2\times(-2)\times 3+3\times 3^2=31$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{y}+3\left(\frac{2}{y}\right)^2=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}$$

2. 二元函数的图像

设函数 $z=f(x, y)$ 的定义域是 xoy 面上的某个区域 D，在 D 内任取一点 $P(x_0, y_0)$ 得函数值 $z_0=f(x_0, y_0)$，这样就得到空间一点 $M(x_0, y_0, z_0)$。当 P 点取遍 D 内每一个点时，M 点的轨迹就是函数 $z=f(x, y)$ 的图像。一般来说，二元函数的图像是空间的曲面，曲面在 xoy 面上的投影就是函数的定义域 D(如图 9.2.4 所示)。

例如 $z=x^2+y^2$ 的图像就是旋转抛物面(如图 9.2.5 所示)。

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图像是以原点为球心，以 1 为半径的球面的上半部分(如图 9.2.6 所示)。

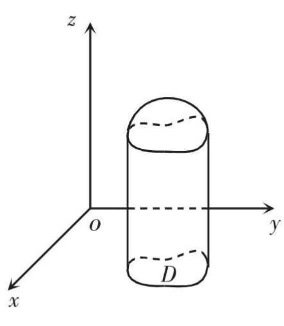

图 9.2.4

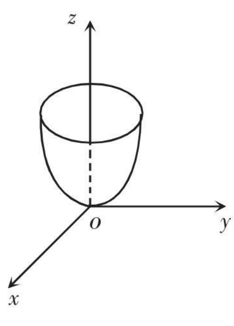

图 9.2.5

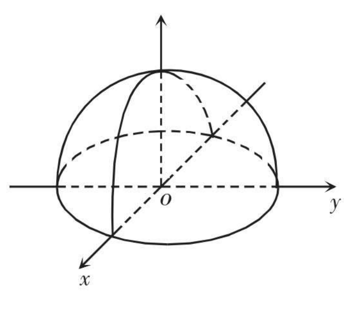

图 9.2.6

二、二元函数的极限

到点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于正数 δ 的所有点的集合叫做点 P_0 的 δ 邻域。

定义 9.2.2 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义(在 (x_0, y_0) 点可以没有定义)，$P(x, y)$ 是该邻域内异于 P_0 的任意一点，如果点 P 以任何方式趋近于 P_0 时，函数的对应值 $z=f(x, y)$ 趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $z=f(x, y)$ 当 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限。记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)=A$$

注：(1) 定义中的邻域是指平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部点的全体，即集合 $\left\{(x, y)\ \middle|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta, \delta>0\right\}$。

(2) 定义中 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式是任意的，二元函数极限存在是指点 (x, y) 沿任意路径，以任何方式趋近于 (x_0, y_0) 时，函数值趋近于 A。因此，点 $P(x, y)$ 按某种特定方式趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 的极限存在，不能保证当 $P(x, y)$ 趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时函数 $z=f(x, y)$ 的极限存在。

例 5 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

证明 当 (x, y) 沿 x 轴趋近于 $(0, 0)$ 时，即 $y=0$，$x\to 0$，则

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{0}{x^2+0^2}=0$$

当 (x, y) 沿直线 $y=x$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，$y=x$，$x\to 0$，则

$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

这说明 (x, y) 沿不同路径趋近于 $(0, 0)$ 时，$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 趋近不同的值，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

三、二元函数的连续性

定义 9.2.3 设函数 $z=f(x, y)$ 满足条件:

(1) 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$。

则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续。否则不连续，称点 $P_0(x_0, y_0)$ 是函数 $z=f(x, y)$ 的间断点。

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上连续。

二元连续函数有与一元连续函数类似的性质，如二元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合所得函数仍是连续函数。一切二元初等函数在其定义域内是连续的。

与闭区间上的一元连续函数的性质类似，如果二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一定取得最大值和最小值，并且一定可以取得介于最大值与最小值

间的任何值。

习题 9 - 2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\ln(x-y)+\ln x$　　(2) $z=\sqrt{x-y+2}$

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(2-x^2-y^2)}$　　(4) $z=\sin(x^2+y^2)$

(5) $z=\arcsin\dfrac{y}{2x}$　　(6) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$

2. 已知函数 $f(x,y)=xy^2+\dfrac{x^2}{y}$，求 $f(1,2)$，$f(a,b)$。

3. 已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$。

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y-x}$在何处不连续(间断)?

第三节　偏导数

一、偏导数的概念

在一元函数中，函数的变化率就是函数的导数，而对于二元函数 $z=f(x,y)$，由于 (x,y) 趋近 (x_0,y_0) 的路径有无数条，我们只能研究 (x,y) 以某条路径趋近 (x_0,y_0) 时函数的变化率。最常见的情况是，x 取定 x_0，$y\to y_0$ 时函数的变化率；以及 y 取定 y_0，$x\to x_0$ 时函数的变化率。这样的变化率叫做偏导数。

定义 9.3.1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当自变量 y 固定为 y_0，而 x 在 x_0 有增量 Δx 时，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数。记作$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或 $f'_x(x_0,y_0)$。

相应地，当自变量 x 固定为 x_0，而 y 在 y_0 有增量 Δy 时，如果 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称此极限为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数。记作$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或 $f'_y(x_0,y_0)$。

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，这个偏导数是 (x,y) 的函数，称此函数为 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数。记作$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$z'_x$，$f'_x$。类似地可以定

义 $z=f(x,y)$ 关于 y 的偏导数。记作$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$z_y'$，$f_y'$。

函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$，实际上就是偏导函数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 在(x_0,y_0)处的函数值，我们在求 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 时，一般是先求偏导函数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$，然后再求它们在(x_0,y_0)处的函数值，便得到 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 的值。在不至于混淆的情况下，我们把偏导函数简称为偏导数。

类似地可以定义三元及三元以上的函数的偏导数 。

二、偏导数的计算

由偏导数的定义可知，求偏导数的问题实际上仍是一元函数的求导问题，在求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时，把 y 当做常量，z 对自变量 x 求导；求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$时，把 x 当做常量，z 对自变量 y 求导。一元函数的求导公式与法则完全适用于求多元函数的偏导数。

例 1　求 $z=x^3+3xy+y-3y^2+5$ 在点$(1,2)$处的偏导数。

解　把 y 当做常数得　$z_x'=3x^2+3y$

把 x 当做常数得　$z_y'=3x+1-6y$

所以　$z_x'(1,2)=3\times1^2+3\times2=9$

$z_y'(1,2)=3\times1+1-6\times2=-8$

例 2　求 $z=xy+ln(2x+3y)$ 的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{2x+3y}(2x+3y)_x'=y+\frac{2}{2x+3y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{2x+3y}(2x+3y)_y'=x+\frac{3}{2x+3y}$$

例 3　求 $z=e^{2x^3-3y^2}$的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x^3-3y^2}(2x^3-3y^2)_x'=6x^2e^{2x^3-3y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x^3-3y^2}(2x^3-3y^2)_y'=-6ye^{2x^3-3y^2}$$

例 4　求 $z=(\sin x)^{\cos y}$的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}(\sin x)_x'=\cos y\cdot\cos x(\sin x)^{\cos y-1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sin x^{\cos y}ln(\sin x)\cdot(\cos y)_y'=-\sin y\cdot(\sin x)^{\cos y}ln\sin x$$

例 5　求 $z=ln\sin(x-2y)$ 的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sin(x-2y)}[\sin(x-2y)]_x'=\frac{\cos(x-2y)}{\sin(x-2y)}(x-2y)_x'=\cot(x-2y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sin(x-2y)}[\sin(x-2y)]_y'=\frac{\cos(x-2y)}{\sin(x-2y)}(x-2y)_y'=-2\cot(x-2y)$$

例 6　已知 $f_x'(x,y)=e^x\sin(x-2y)$，求 $f_x'\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f_y'\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$。

解　因为　$f_x'(x,y)=e^x\sin(x-2y)+e^x\cos(x-2y)$