高等数学实训教程（上册）

胡雅彬　吴少祥　主编

西北大学出版社

高等数学实训教程(上册)

胡雅彬 吴少祥　主编

西北大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学实训教程/ 胡雅彬, 吴少祥主编. —西安: 西北大学出版社,2009. 9
ISBN 978-7-5604-2641-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①胡…②吴… Ⅲ. 高等数学- 高等学校: 技术学校- 教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP 数据核字(2009) 第144858 号

高等数学实训教程

出版发行	西北大学出版社	社　　址	西安市太白北路229 号
电　　话	029 - 88303313	经　　销	新华书店经销
印　　刷	陕西奇彩印务有限责任公司印刷	开　　本	787 ×1092　1/ 16
版　　次	2009 年9 月第1 版	印　　次	2009 年9 月第1 次印刷
字　　数	243 千字	印　　张	10
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5604 - 2641 - 9	定　　价	20.00 元

前 言

本书是根据教育部最新制定的《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》编写的实训教材. 该书既可作为教师教学参考用书, 也可作为学生学习《高等数学》课程的训练提高用书.

本书内容包括: 函数极限与连续、导数与微分及应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分学、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换以及线性代数等九章内容. 本书结合理工类专业的实际情况, 着重对高等数学的基本概念、基本理论与基本方法进行剖析, 对学生的训练题目作了严格地筛选, 重点突出、特点鲜明.

本书的结构和特点为:

1. 以"应用为目的, 必须够用为度"兼顾学生后续学习为原则, 不拘泥于数学学科自身的严密性、逻辑性.

2. 每章按"知识要点、例题选讲、实训题目"形式进行编写, 结构清晰.

3. 实训题型全面、难度适中、不强调过分复杂的运算技巧及论证, 注重高等数学基本知识内容的掌握.

参加本书编写的有: 西安电力高等专科学校数学教研室胡雅彬(上册知识要点、例题选讲), 吴少祥(下册知识要点、例题选讲), 余庆红(第一章实训题目(作业)及答案), 姚振宇(第二章实训题目(作业)及答案), 寇磊(第三章实训题目(作业)及答案), 吴文海(第四章实训题目(作业)及答案), 赵启峰(第五章实训题目(作业)及答案), 马小燕(第六章实训题目(作业)及答案), 廖虎(第七章实训题目(作业)及答案), 任晓全(第八章实训题目(作业)及答案), 段东东(第九章实训题目(作业)及答案), 本书由段东东制定编写大纲, 由胡雅彬、吴少祥负责全书统稿.

本书由吴文海主审, 并提出了许多宝贵的意见和建议, 在此表示衷心的感谢. 另外, 本书在编写过程中也得到了西安电力高等专科学校有关部门领导及西北大学出版社的大力支持, 在此一并致以诚挚的感谢.

由于作者水平有限, 本书中难免有不妥之处, 恳请读者多给予批评指正.

编 者

2009 年6 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

知识要点

一、函数的概念

1. 函数、反函数、基本初等函数、初等函数、复合函数的定义.

2. 理解函数记号 $y=f(x)$ 中"f"的意义. 函数的两个要素，对于两个或两个以上的函数，只有定义域和对应法则完全相同时才是同一函数.

3. 弄清基本初等函数的概念，熟悉这些函数的特性.

4. 求 $f(x)$ 的定义域. 对于较复杂的函数求定义域问题，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

5. 函数的重要性质：有界性，奇偶性，周期性，单调性.

6. 复合函数的复合过程，弄清自变量、中间变量和因变量. 清楚 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合成 y 为 x 的函数满足的条件.

二、极限

1. 极限的概念.

2. 极限的计算方法：

(1) 利用极限四则运算法则求极限，要注意该法则是极限都存在的条件下才能使用，当出现"$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"或"$\infty-\infty$"等情况，必须对原式进行恒等变换，化简然后再求极限.

(2) 利用两个重要极限求极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(3) 利用无穷小的性质求极限.

(4) 利用等价无穷小代换求极限.

常用等价无穷小量有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\arcsin x\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^m-1\sim mx$.

(5) 利用函数的连续性求极限(函数在 x_0 点连续，则极限值等于函数值).

(6) 利用极限存在的充分必要条件求极限.

一般地，求分段函数在分界点处的极限时，要考虑左、右极限.

三、函数的连续

1. 函数的连续性：

理解连续函数的定义. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处连续.

2. 间断点及分类：

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点. 函数 $f(x)$ 在间断点的左右极限都存在的间断点为第一类间断点，而 $f(x)$ 在间断点左存极限至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.

四、闭区间上连续函数的性质

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则一定有最大值和最小值.

2. 知道闭区间上连续函数的介值定理与零点定理.

3. 会用零点定理判断及证明函数方程在指定区间中根的存在性.

例题选讲

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}+\sqrt{\ln x}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases}16-x^2>0\\ \ln x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4\\ x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4\\ x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$$

∴ 函数的定义域为 $[\mathrm{e},4)$.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x+1)$ 的定义域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

解 要使 $f(x+1)$ 有意义

∴ $0\leqslant x+1\leqslant 1$，　$-1\leqslant x\leqslant 0$

∴ 选 B.

例 3 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的图像对称于直线(　　).

A. $y=x$　　B. $y=-x$　　C. $y=0$　　D. $x=0$

解 该题实际上是判定 $f(x)$ 的奇偶性.

∵ $$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x=f(x)$$

∴ $f(x)$ 为偶函数. 由偶函数的特性知图像关于 y 轴对称. 故选 D.

说明：判断函数奇偶性的方法主要是根据定义及奇偶函数的运算性质. 特别注意定义域的对称性.

例 4 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$.

分析：可用变量代换法或根据所给表达式直接“拼凑”.

解 方法一：变量代换法

令 $1+\dfrac{1}{x}=t$，　则 $\dfrac{1}{x}=t-1$，代入原式有

$$f(t)=1+(t-1)^2+(t-1)=t^2-t+1$$

再将 t 换成 x 得

$$f(x)=x^2-x+1.$$

方法二：直接拼凑法

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)+1$$

于是
$$f(x)=x^2-x+1$$

例 4 求下列各数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

分析:(1) 极限呈"$\infty-\infty$"型未定式极限,需先分子有理化后,再求极限.

(2) 先找到数列前 n 项和的解析式,再求极限.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-1.$

说明:在求极限时,经常会碰到极限四则运算不能直接应用,此时需先进行适当的恒等变换化为"$\frac{\infty}{\infty}$""$\frac{0}{0}$"型,再通过分子有理化或约去使分母的极限为零的非零因子,从而求得极限.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x}$.

分析:由于函数 $f(x)=\frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x}$ 在 $x=1$ 处连续,所以可利用函数的连续性求极限.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

则
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x}=f(1)=\frac{1}{\pi}.$$

说明:如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,可根据 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 求极限.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

分析:本题是"$\frac{0}{0}$"型极限,可先通过分解因式约去致零因子,再求极限.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{4}{3}$.

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

分析：先需要分子、分母有理化，然后再求极限.

解 原式$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$

$=\dfrac{4}{3}.$

例 9 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x}$.

分析：本题是“$\dfrac{0}{0}$”型，可利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$或等价无穷小代换求极限.

解 (1) 方法一：∵ $1-\cos2x=2\sin^2x$

∴ 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{x}=2.$

方法二：∵ 当 $x\to0$ 时，$1-\cos2x\sim\dfrac{1}{2}(2x)^2$，$\sin x\sim x$

∴ 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

(2) 方法一：∵ $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$

∴ 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot\sin x}$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{2}.$

说明：例 7、8、9 题都是“$\dfrac{0}{0}$”型极限，从而求极限常用方法如下：

(1) 当函数是有理式时，可通过分解因式消去使分母为零的因式，再求极限；当函数是无理式时，可通过分子、分母有理化消去使分母为零的因式，再求极限.

(2) 当函数中含有三角函数时，往往通过三角恒等变形，再利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限，或利用等价无穷小代换法求极限. 此方法只能在乘积和商中进行，不能在加减运算中代

换,否则会导致错误结论.

例 10 当 $x \to 0$ 时,$\ln(1+x)$ 与 $\arcsin x$ 是(　　).

A. 同阶无穷小　　B. 等价无穷小　　C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

解 该题是两个无穷小量的比较,实际是求两个函数比值的极限.

∵
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$
$$(\ln(1+x)\sim x,\quad \arcsin x\sim x)$$

∴ 选 B.

例 11 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-1}}{[1+x]^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\ln e=1$.

说明:本题(1)、(2)属于第二重要极限,利用公式求解.

例 12 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$. 则(　　).

A. $f(x_0)$ 可能不存在　　B. $f(x_0)>1$　　C. $f(x_0)<1$　　D. $f(x_0)=1$

解 利用函数连续的定义,则 $f(x_0)=1$. 故选 D.

例 13 设 $f(x)=\dfrac{|x|(x+2)}{x(x+1)}$,则 $x=0$ 是________间断点,$x=-1$ 是________间断点.

解 ∵
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|(x+2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x+1}=2$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|(x+2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x+2)}{x+1}=-2$$

∴ $x=0$ 是第一类(可去)间断点,又因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x(x+2)}{x(x+1)}=\infty$

∴ $x=-1$ 是第二类(无穷)间断点.

例 14 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2-2x)\sin x}{4x^5+3x^3}$.

解 ∵ 当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{3x^2-2x}{4x^5+3x^3}$ 为无穷小量,而 $|\sin x|\leqslant 1$ 为有界函数.

∴
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-2x)\sin x}{4x^5+3x^3}=0.$$

说明:在求极限过程中,要会利用"无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量"进行计算.

例 15 设 $f(x)=\begin{cases}a+x & x\leqslant 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$,若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 a 的值是多少?

解 由连续定义. ∵ $f(0)=a$,即
$$\lim_{x\to 0^+}|a+x|=a,\quad \lim_{x\to 0^-}\cos x=1$$

∴ 由左极限 = 右极限知:$a=1$.

例 16 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & x<0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & x>0\end{cases}$，问 a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

分析:因为初等函数在其定义域内是连续的,因而要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,只需讨论 $x=0$ 处的情形即可.

解 ∵ $x=0$ 时，$f(0)=b$

又 ∵

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}=-\sqrt{2}a$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)]=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=-\ln e=-1$$

∴ $-\sqrt{2}a=-1=b$

∴ $a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=-1.$

故当 $a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 17 证明:方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

分析:先设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$. 由介值定理的推论(零点定理)加以证明.

证明 设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内也连续.

又因为 $f(0)=-1,f(1)=1$,

所以至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=0$.

故 ξ 为方程 $x\cdot 2^x=1$ 的小于 1 的正根.

第二章 导数及其应用

知识要点

一、导数的概念

1. 函数在点 x_0 处的导数定义式为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. n 阶导数：

$n-1$ 阶导数的导数为 n 阶导数.

3. 左、右导数：

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 左导数.

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 右导数.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处左右导数存在且相等.

4. 几何意义：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何定义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率. 即 $k=f'(x_0)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处

切线方程为：　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程为：　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$　（当 $f'(x_0)\neq 0$）.

5. 可导与连续的关系：

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，反之不一定.

二、导数的运算

1. 求导公式与求导法则：

(1) 常用求导公式：

$(c)'=0$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$(e^x)'=e^x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) 四则运算法则：

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均在点 x 处可导，则

①$[u\pm v]'=u'\pm v'$；

② $[u\cdot v]'=u'v+uv'$，

$[ku]'=ku'$；

③$\left[\dfrac{u}{v}\right]'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v(x)\neq 0)$.

2. 复合函数的导数：

设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 分别是 u 和 x 的可导函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

3. 隐函数的导数：

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数求导法，就是将方程两边同时对 x 求导，将含有 y 的项作为复合函数，先对 y 求导再乘以 y 对 x 的导数，再求出$\dfrac{dy}{dx}$即可.

4. 由参数方程所确定函数的导数：

若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(x)\end{cases}$(其中 t 为参数) 确定 x 和 y 之间的函数关系，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

参数方程二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

5. 对数求导法.

三、微分的概念

1. 微分的概念：

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 具有导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)\Delta x$ 叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 的微分，记为 $dy\,|_{x=x_0}$.

$$dy\,|_{x=x_0}=f'(x_0)dx.$$

2. 可微与可导的关系：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $dy=f'(x)dx$.

3. 微分的几何意义：

函数 $f(x)$ 的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 在几何中表示曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处切线纵坐标的改变量.

4. 微分运算法则：

① 四则运算法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$d(uv) = vdu + udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

② 复合函数的微分(一阶微分形式不变性)

若 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 都可导,则 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy = f'(u)du.$$

不论 u 是自变量还是中间变量,微分的形式不变.

四、导数的应用

1. 罗必达法则(求不定式的极限):

对于"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型求极限问题,凡符合法则条件都可用罗必达法则计算极限,对其它类型如"$0 \cdot \infty$""$\infty - \infty$""0^0""1^∞""∞^0"等可化成"$\frac{0}{0}$"和"$\frac{\infty}{\infty}$"再用法则计算.

2. 利用导数判定 $f(x)$ 的单调性:

步骤:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义区间;

(2) 求 $f'(x) = 0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点,用这些点将定义区间分成若干个区间;

(3) 列表判定 $f(x)$ 在每个区间上的单调性.

3. 极值:

(1) 函数的极值是局部性的概念,函数的极大值不一定比极小值大,函数的极值只能在区间内部取得.

(2) 函数极值的判定和求法:

① 取得极值的必要条件 $f'(x_0) = 0$,x_0 必是函数的驻点,但驻点不一定是极值点;

② 极值的求法步骤同单调性判别,列表由取得极值的第一充分条件议论驻点及导数不存在点左右两侧导数的符号,或由第二充分条件求极值.

4. 函数的最大值和最小值:

(1) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上最大(小)值求法:

步骤:

① 求 $f'(x) = 0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点;

② 求出函数 $f(x)$ 在各驻点、导数不存在的点及区间端点处的函数值,比较大小,其中最大的就是最大值,最小的就是最小值.

(2) 实际问题的最大值和最小值.

例题选讲

例 1　设 $f(x)$ 在 x_0 不连续,则(　　).

A. $f'(x_0)$ 必存在　　　　B. $f'(x_0)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必不存在

解　因为 $f(x)$ 在 x_0 不连续,C、D选项不对,A是可导必连续,所以A不对,正确选项为B.

例2　已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=2$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$ ________.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}f'(1)=1.$

例3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$,则 $f'(x_0)=$ ____.

解　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{-2[f(x_0-2h)-f(x_0)]}{-2h}}$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f(x_0)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

∴　$f'(x_0)=-2.$

说明:例2、例3都是利用导数定义求极限,必须先凑成导数定义形式再求极限.

例4　当 a、b 为何值时,$f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b & x<0 \\ \sin ax & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

分析:由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 必连续,然后求出 a、b 值.

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

而

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^{2x}+b)=b+1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin ax=0$$

∴　$b+1=0$,　$b=-1.$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 成立

而

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\sin ax}{ax}=a$$

∴　$a=2.$

例5　曲线 $\begin{cases} y=t^2-4t-1 \\ x=t^2+1\end{cases}$ 上________处的切线是水平的.

解　设切点为 (x_0,y_0),

则

$$k=y'=\frac{2t-4}{2t}=\frac{t-2}{t}$$

令 $y'=0$,　得 $t=2$

则
$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -5 \end{cases}$$

所以填 $(5, -5)$ 处切线是水平的.

例 6　求隐函数 $y = 2 + xe^y$ 的导数 y' 及 $y'|_{x=0}$.

解　两边同时对 x 求导

$$y' = e^y + xe^y \cdot y'$$

$\therefore\quad y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$.

将 $x = 0$ 代入原方程得 $y = 2$

$\therefore\quad y'|_{\substack{x=0\\y=2}} = \dfrac{e^2}{1} = e^2$.

例 7　求下列函数的导数.

(1) $y = x^{\sin x}$；　　(2) $y = \dfrac{\sqrt{5x+3}}{(x^2+1)^2 e^{3\sqrt{x}}}$.

解　(1) 两边取对数

$$\ln y = \sin x \ln x$$

$\therefore$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

(2) 两边取对数

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(5x+3) - 2\ln(x^2+1) - 3\sqrt{x}$$

$\therefore$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{5}{2(5x+3)} - \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore$
$$y' = \frac{\sqrt{5x+3}}{(x^2+1)^2 e^{3\sqrt{2}}}\left(\frac{5}{2(5x+3)} - \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right).$$

说明:当函数是幂指函数或积、幂、商组成时,通常应用对数求导法.

例 8　已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$,求 y''.

解　$\because$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$$

$\therefore$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{-\dfrac{1}{2t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

例 9　已知 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数.

(1) $y = f(x^2)$；　　(2) $y = a^{f(x)} + [f(x)]^a$.

解　(1) 已知 $y = f(x^2)$ 是由 $y = f(u), u = x^2$ 复合而成,

∴
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(x^2)\cdot 2x.$$

(2) 把 $y=a^{f(x)}+[f(x)]^a$ 看成是由 $y_1=a^u,u=f(x)$ 和 $y_2=v^a,v=f(x)$ 复合而成

∴
$$\begin{aligned}y'&=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=a^{f(x)}f'(x)+a[f(x)]^{a-1}f'(x).\end{aligned}$$

例 10 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,求 $\mathrm{d}y$.

解 ∵
$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

∴ $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x^2}{1-\cos x^2}$.

解 方法一:此题属于“$\dfrac{0}{0}$”型,可用洛必达法则.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x^2}{1-\cos x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2+x^2\cos x^2\cdot 2x}{2x\sin x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2+x^2\cos x^2}{\sin x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x^2}{x^2}+\cos x^2}{\dfrac{\sin x^2}{x^2}}=2.\end{aligned}$$

方法二:可用等价无穷小量代换.

当 $x\to0$ 时,$\sin x^2\sim x^2,1-\cos x^2\sim\dfrac{1}{2}x^4$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x^2}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^2}{\dfrac{x^4}{2}}=2.$$

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

解 此题是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型,所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3^+}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}&=\lim_{x\to3^+}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}\cdot\lim_{x\to3^+}\cos x\\&=\cos3\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{1}{e^x-e^3}\cdot e^x}\\&=\cos3\cdot\lim_{x\to3^+}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to3^+}\frac{e^x-e^3}{x-3}\end{aligned}$$