普通物理学

声学部分

一九八六年六月

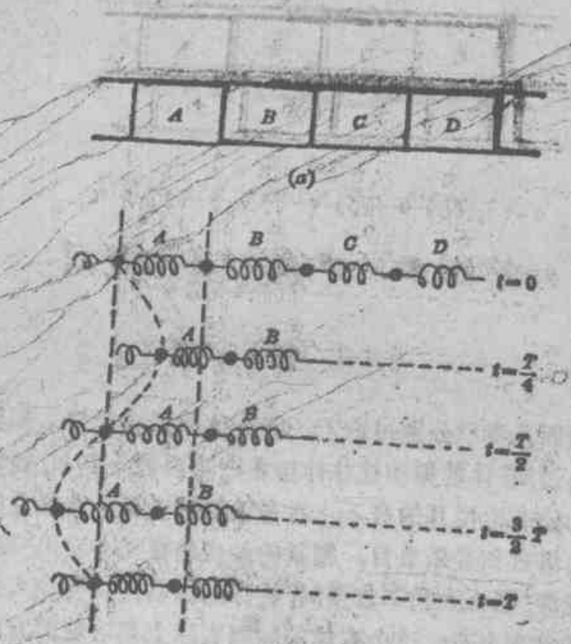
第五章　声波的基本性质
§ 5—1　概述
§ 5—2　声压的基本概念
§ 5—3　理想流体媒质中的声波方程
§ 5—4　特殊形式的声波方程
§ 5—5　平面声波的基本性质
§ 5—6　声场中的能量关系
§ 5—7　声压级与声强级
§ 5—8　响度级与等响曲线
§ 5—9　从平面声波的基本关系检验线性化条件
§ 5—10 声波的反射、折射与透射
§ 5—11 隔声的基本规律
§ 5—12 声波的干涉
习　题

第四章 声波的基本性质

§4-1 概 述

前面几章已分别讨论了一些物体的振动规律，那里我们已指出过，物体的振动往往伴随着产生声音．例如，提琴的弦的振动能产生悦耳的音乐，收音机借助于扬声器纸盆的振动播送出语言和音乐节目，绷紧的鼓皮的振动会发出“咚咚咚”的声音等．那么人们不禁要问：物体的振动何以会在人们的耳朵中感觉为声音？这个有趣的问题实际上包含着两方面的内容：一是物体的振动如何传到人们的耳朵，从而使人耳的鼓膜发生振动；另一是人耳鼓膜的振动如何使人们主观上感觉为声音．关于后一问题属于生理声学的范畴，这里不准备讨论，我们将重点讨论第一方面问题，即物体的振动是如何在媒质中传播的．

设想由于某种原因（例如就是前面讲到的一个物体的振动）在弹性媒质的某局部地区激发起一种扰动，使这局部地区的媒质质点 A 离开平衡位置开始运动．这个质点 A 的运动必然推动相邻媒质质点 B，亦即压缩了这部分相邻媒质，如图 4-1-1(a)．由于媒质的弹性作用，这部分相邻媒质被压缩时会产生一个反抗压缩的力，这个力作用于质点 A 并使它恢复到原来的平衡位置．另一方面，因为质点 A 具有质量也就是具有惯性，所以质点 A 在经过平衡位置时会出现“过冲”，以至又压缩了另一侧面的相邻媒质，该相邻媒质中也会产生一



(a)

(b)

图 4-1-2

个反抗压缩的力，使质点 A 又回过来趋向平衡位置．可见由于媒质的弹性和惯性作用，这个最初得到扰动的质点 A 就在平衡位置附近来回振动起来．由于同样的原因，被 A 推动了的质点 B 以至更远的质点 C、D、…等也都在平衡位置附近振动起来，只是依次滞后一些时间而已．这种媒质质点的机械振动由近及远的传播就称为声振动的传播或称为声波．可见声波是一种机械波．适当频率和强弱的声波传到人的耳朵，人们就感受到了声音．

弹性媒质里这种质点振动的传播过程，十分类似于多个振子相互耦合形成的质量→弹簧→质量→弹簧……的链形系统中，一个振子的运动会影响其他振子也跟着运动的过程．图

4-1-1(b) 表示振子 A 的质量在四个不同时间的位置，其余振子的质量也都在平衡位置附近作类似的振动，只是依次滞后一些时间.

由以上讨论可见，弹性媒质的存在是声波传播的必要条件. 人们很早做过的一个简单实验也清楚地证明了这一点，把电铃放在玻璃罩中，抽去罩中作为弹性媒质的空气，结果只能看到电铃的小锤在振动，却听不到由它发出的电铃声.

本书只讨论声波的宏观性质，不涉及媒质的微观特性，所以本书中讨论的媒质均认为是"连续媒质"，即认为它是由无限多连续分布的物质点所组成的. 当然这里所谓质点只是在宏观上是足够小、以至各部分物理特性可看作是均匀的一个小体积元，实际上质点在微观上却仍包含有大量数目的分子. 显然这样的质点(媒质微团)既具有质量又具有弹性.

本书着重讨论气体、液体等流体媒质. 其中，理想流体媒质的弹性主要表现在体积改变时出现的恢复力，不会出现切向恢复力，所以理想流体媒质中声振动传播的方向与质点振动方向是一致的，本书重点讨论的也就是这类纵声波.

§4-2 声压的基本概念

前节已定性讨论了声波的物理图象，为了进一步定量研究声波的各种性质，就需要确定用什么物理量来描述声波过程. 我们已经知道，连续媒质可以看作是由许多紧密相连的微小体积元 dV 组成的物质系统，这样，体积元内的媒质就可以当作集中在一点、质量等于 ρdV 的"质点"来处理，ρ 是媒质的密度. 但这种"质点"又同我们在第一章所讲的刚性质点不同，因为 ρ 是随时间和坐标不同而变化的量，因此这个质点的质

量是变化的. 本书主要讨论平衡态下的物质系统内的声学现象，在平衡态时系统可用体积 V_0(或密度 ρ_0)、压强 P_0 及温度 T_0 等状态参数来描述. 在这种状态下，组成媒质的分子等微粒虽然不断地运动着，但就任一个体积元来讲，在时间 t 内流入的质量等于流出的质量，因此体积元内的质量是不随时间变化的. 如有声波作用时，在组成媒质的微粒的杂乱运动中附加了一个有规律的运动，使得体积元内有时流入的质量多于流出的质量，有时又反过来，即体积元内的媒质一会儿稠密，一会儿又稀疏. 所以声波的传播实际上也就是媒质内稠密和稀疏的交替过程. 显然这样的变化过程可以用体积元内压强、密度、温度以及质点速度等的变化量来描述.

设体积元受声扰动后压强由 P_0 改变为 P，则由声扰动产生的逾量压强(简称为逾压)

$$p=P-P_0$$

就称为声压. 因为声传播过程中，在同一时刻，不同体积元内的压强 P 都不同；对同一体积元，其压强 P 又随时间而变化，所以声压 p 一般地是空间和时间的函数，即 $p=p(x, y, z, t)$. 同样地由声扰动引起的密度的变化量 $\rho'=\rho-\rho_0$ 也是空间和时间的函数，即 $\rho'=\rho'(x, y, z, t)$.

此外，既然声波是媒质质点振动的传播，那么媒质质点的振动速度自然也是描述声波的合适的物理量之一. 但由于声压的测量比较容易实现，通过声压的测量也可以间接求得质点速度等其他物理量，所以声压已成为目前人们最为普遍采用的描述声波性质的物理量.

存在声压的空间称为声场. 声场中某一瞬时的声压值称为瞬时声压. 在一定时间间隔中最大的瞬时声压值称为峰值声压或巅值声压. 如果声压随时间的变化是按简谐规律的，

则峰值声压也就是声压的振幅．在一定时间间隔中，瞬时声压对时间取均方根值称为有效声压

$$p_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p^2dt},$$

式中下角符号"e"代表有效值，T 代表取平均的时间间隔，它可以是一个周期或比周期大得多的时间间隔．一般用电子仪表测得的往往就是有效声压，因而人们习惯上指的声压，也往往是指有效声压．

声压的大小反映了声波的强弱，声压的单位为帕(Pa)：

$$1\text{帕}=1\text{牛顿/米}^2,$$

有时也用微巴作单位，1 微巴 = 1 达因/厘米^2 = 0.1 帕．

为了使读者对声压的大小有一直观概念，下面举出一些有效声压大小的典型例子：

人耳对 1 千赫声音的可听阈(即刚刚能觉察到它存在时的声压)约 2×10^{-5} 帕；微风轻轻吹动树叶的声音约 2×10^{-4} 帕；在房间中的高声谈话声(相距 1 米处)约 0.05 至 0.1 帕；交响乐演奏声(相距 5～10 米处)约 0.3 帕；飞机的强力发动机发出的声音(相距 5 米处)约 10^2 帕．

§4-3　理想流体媒质中的声波方程

我们已经知道，声场的特征可以通过媒质中的声压 p、质点速度 v 以及密度的变化量 ρ' 来表征．以声压为例，在声传播过程中，对同一时刻，声场中各不同位置都有不同的数值，也就是声压随着位置有一个分布；另一方面，声场中每个位置的声压又在随时间而变化，也就是说声压随位置的分布还在随时间而变化．本节就是要根据声波过程的物理性质，建立

声压随空间位置的变化和随时间的变化两者之间的联系，这种联系的数学表示就是声波动方程.

§4-3-1 理想流体媒质的三个基本方程

虽然我们的目的旨在推导关于描述声波的任一参量，例如，声压 p 的波动方程，但我们不应该孤立地单纯考察声压 p 的变化，因为从§4-2所述声波的物理过程我们已经看到，在声扰动过程中，声压 p、质点速度 v 及密度增量 ρ' 等量的变化是互相关联着的，所以我们必须首先找出它们之间的联系.

声振动作为一个宏观的物理现象，必然要满足三个基本的物理定律，即牛顿第二定律、质量守恒定律及描述压强、温度与体积等状态参数关系的物态方程. 我们很快就会看到，运用这些基本定律，就可以分别推导出媒质的运动方程，即 p 与 v 之间的关系；连续性方程，即 v 与 ρ' 之间的关系；以及物态方程，即 p 与 ρ' 之间的关系.

为了使问题简化，必须对媒质及声波过程作出一些假定，虽然这些假定使结果的应用带来一定的局限性，但这些假定既可以使数理分析简化，又可以使阐述声波传播的基本规律和特性简单明了. 而且今后我们将证明，这些假定在相当普遍的情况下还是能很好被满足的，因此，这里得出的结果并不失去普遍意义. 至于某些特殊情况，则在以后有关的章节里再作相应的阐述.

这些假定是：

(1) 媒质为理想流体，即媒质中不存在粘滞性，声波在这种理想媒质中传播时没有能量的耗损.

(2) 没有声扰动时，媒质在宏观上是静止的，即初速度为零. 同时媒质是均匀的，因此媒质中静态压强 P_0、静态密度 ρ_0 都是常数.

(3) 声波传播时，媒质中稠密和稀疏的过程是绝热的，即媒质与毗邻部分不会由于声过程引起的温度差而产生热交换。也就是说，我们讨论的是绝热过程。

(4) 媒质中传播的是小振幅声波，各声学参量都是一级微量，则，声压 p 甚小于媒质中静态压强 P_0，即 $p \ll P_0$；质点速度 v 甚小于声速 c_0，即 $v \ll c_0$；质点位移 ξ 甚小于声波波长 λ，即 $\xi \ll \lambda$；媒质密度增量甚小于静态密度 ρ_0，即 $\rho' \ll \rho_0$；或密度的相对增量 $s_\rho = \frac{\rho'}{\rho_0}$ 甚小于 1，即 $s_\rho \ll 1$。

现在先考虑一维情形，即声场在空间的两个方向上是均匀的，只需考虑在一个方向，例如，在 x 方向上的运动。

1. 运动方程　设想在声场中取一足够小的体积元如图 4-3-1 所示，其体积为 Sdx(S 为体积元的垂直于 x 轴的侧面的面积)由于声压 p 随位置 x 而异，因此作用在体积元左侧面与右侧面上的力是不相等的，其合力就导致这个体积元里的质点沿 x 方向的运动。当有声波传过时，体积元左侧面处的

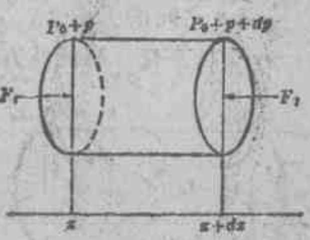


图 4-3-1

压强为 P_0+p，所以作用在该体积元左侧面上的力为 $F_1=(P_0+p)S$，因为在理想流体媒质中不存在切向力，内压力总是垂直于所取的表面，所以 F_1 的方向是沿 x 轴正方向；体积元右侧面处的压强为 P_0+p+dp，其中 $dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx$ 为位置从 x 变到 $x+dx$ 以后声压的改变量，于是作用在该体积元右侧面上的力为 $F_2=(P_0+p+dp)S$，其方向沿负 x 方向；考虑到

媒质静态压强 P_0 不随 x 而变，因而作用在该体积元上沿 x 方向的合力为 $F=F_1-F_2=-S\frac{\partial p}{\partial x}dx$. 该体积元内媒质的质量为 ρSdx，它在力 F 作用下得到沿 x 方向的加速度 $\frac{dv}{dt}$，因此据牛顿第二定律有

$$\rho Sdx\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}Sdx,$$

整理后可得

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

这就是有声扰动时媒质的运动方程，它描述了声场中声压 p 与质点速度 v 之间的关系.

2. 连续性方程　连续性方程实际上就是质量守恒定律，即媒质中单位时间内流入体积元的质量与流出该体积元的质量之差应等于该体积元内质量的增加或减少.

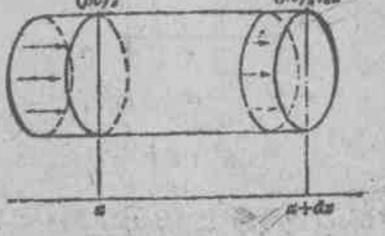


图 4-3-2

仍设想在声场中取一足够小的体积元，如图4-3-2所示，其体积为 Sdx，如在体积元左侧面 x 处，媒质质点的速度为 $(v)_x$，密度为 $(\rho)_x$，则在单位时间内流过左侧面进入该体积元的质量应等于截面积为 S、高度为 $(v)_x$ 的柱体体积内所包含的媒质质量即 $(\rho v)_xS$；在同一单位时间内从体积元经过右侧面流出的质量为 $-(\rho v)_{x+dx}S$，负号表示流出. 取其泰勒展开式的一级近似即为 $-\left[(\rho v)_x+\frac{\partial(\rho v)_x}{\partial x}dx\right]S$. 因此，单位时间内流入

体积元的净质量为$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}Sdx$（$\rho$、$v$都是$x$的函数，式中不再注下标$x$）。另一方面，体积元内质量增加，则说明它的密度增大了，设它在单位时间内的增加量为$\frac{\partial\rho}{\partial t}$，那么在单位时间内体积元质量的增加则为$\frac{\partial\rho}{\partial t}Sdx$。由于体积元内既没有产生质量的源，又不会无缘无故地消失，所以质量是守恒的。因此，在单位时间内体积元的质量的增加量必然等于流入体积元的净质量，则

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}Sdx=\frac{\partial\rho}{\partial t}Sdx,$$

整理后可得

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

这就是声场中媒质的连续性方程，它描述媒质质点速度v与密度ρ间的关系。

3．*物态方程*　我们仍考察媒质中包含一定质量的某体积元，它在没有声扰动时的状态以压强P_0、密度ρ_0及温度T_0来表征，当声波传过该体积元时，体积元内的压强、密度、温度都会发生变化。当然这三个量的变化不是独立的，而是互相联系的，这种媒质状态的变化规律由热力学状态方程所描述。因为即使在频率较低的情况下，声波过程进行得还是比较快，体积压缩和膨胀过程的周期比热传导需要的时间短得多，因此在声传播过程中，媒质还来不及与毗邻部分进行热量的交换，因而声波过程可以认为是绝热过程，这样，就可以认为压强P仅是密度ρ的函数，即

$$P=P(\rho).$$

因而由声扰动引起的压强和密度的微小增量则满足

$$dP=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s d\rho,$$

这里下标"s"表示绝热过程.

考虑到压强和密度的变化有相同的方向，当媒质被压缩时，压强和密度都增加，即 $dP>0$，$d\rho>0$；而膨胀时压强和密度都降低，即 $dP<0$，$d\rho<0$。所以系数 $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s$ 恒大于零，现以 c^2 表示，即

$$dP=c^2d\rho \tag{4-3-3}$$

这就是理想流体媒质中有声扰动时的物态方程，它描述声场中压强 P 的微小变化与密度 ρ 的微小变化之间的关系. 关于

$$c^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s,$$

现在暂时姑且认为是引入的一个符号，下一节解出波动方程以后将会看到，它实际上代表了声传播的速度. 它在一般情况下并非常数，仍可能是 P 或 ρ 的函数，其值决定于具体媒质情况下 P 对 ρ 的依赖关系.

例如我们知道，理想气体的绝热物态方程为

$$PV^\gamma=\text{const}, \tag{4-3-4}$$

而对一定质量的理想气体，上式成为

$$\frac{P}{\rho^\gamma}=\text{const},$$

由此可求得

$$c^2=\frac{\gamma P}{\rho} \tag{4-3-5}$$

可见 c 仍是 P 及 ρ 的函数.

对于一般流体(包括液体)，其压强和密度之间的关系比较复杂，不可能求得类似于(4-3-4)式那样的解析表达式，这时常可通过媒质的压缩系数(或体积弹性系数)来求得 c，因为

由定义

$$c^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s=\frac{dP}{\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_s\rho},$$

考虑到媒质质量一定，则有 $\rho dV+Vd\rho=0$，即

$$\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_s=-\left(\frac{dV}{V}\right)_s,$$

代入 c^2，则得到

$$c^2=\frac{dP}{\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_s\rho}=\frac{dP}{-\left(\frac{dV}{V}\right)_s\rho}=\frac{1}{\beta_s\rho}=\frac{K_s}{\rho}. \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

其中 $\frac{dV}{V}$ 为体积的相对增量；$\beta_s=-\frac{\frac{dV}{V}}{dP}$ 为绝热体积压缩系数，表示绝热情况下，单位压强变化引起的体积相对变化，负号表示压强和体积的变化方向相反；$K_s=\frac{1}{\beta_s}=\frac{dP}{-\frac{dV}{V}}$ 为绝热体积弹性系数. 由(4-3-6)式可见，对液体等一般媒质，c^2 通常也还是 ρ 的函数.

§4-3-2 小振幅声波一维波动方程

前面已经求得了有声扰动存在时理想流体媒质的三个基本方程，但这些方程中各声学量之间的关系都是非线性的，因此还不可能从这些方程中消去某些物理量以得到用单一参量表示的声波方程. 但是如果我们考虑到 §4-3-1 中曾经作出的一些假定，即声波的振幅比较小，声波的各参量 p、v、ρ' 以及它们随位置、随时间的变化量都是微小量，并且它们的平方项以上的微量为更高级的微量，因而可以忽略. 那么，三个基本方程即可得到简化，下面分别叙述.

1. *运动方程* 已知媒质运动方程为

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4-3-1}$$

这里 $\rho=\rho_0+\rho'$，它仍是一个变量. 至于媒质质点的加速度 $\frac{dv}{dt}$，它实际包含了两部分：一部分是在空间指定点上，由于该位置的速度随时间而变化所取得的加速度，即本地加速度 $\frac{\partial v}{\partial t}$；另一部分是由于质点迁移一空间距离以后，因速度随位置而异取得的速度增量而得到的加速度，它等于 $\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}=v\frac{\partial v}{\partial x}$，即迁移加速度. 因此(4-3-1)式成为

$$(\rho_0+\rho')\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x},$$

略去二级以上的微量就得到简化了的方程

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4-3-1a}$$

2. *连续方程* 已知连续性方程为

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{4-3-2}$$

因为 $\rho=\rho_0+\rho'$，其中 ρ_0 为没有声扰动时媒质的静态密度，它既不随时间变化，也不随位置而变化，将 ρ 代入(4-3-2)式，略去二级以上的微量即可得到简化方程

$$-\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{4-3-2a}$$

3. *物态方程* 前面我们已经提到，物态方程 (4-3-3) 式中的系数 $c^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)$，一般讲并非常数，仍可能是 P 或 ρ 的函数. 但如果是小振幅声波，ρ' 较小，这时可将 $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)$，在平衡

态(P_0, ρ_0)附近展开

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s,0}+\left(\frac{d^2P}{d\rho^2}\right)_{s,0}(\rho-\rho_0)+\cdots$$

这里下角符号"0"表示取平衡态时的数值．因$\rho-\rho_0$很小，上式可忽略第二项以后的所有项得$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s\approx\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s,0}$，并以$c_0$来表示，则有

$$c_0^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s,0}.$$

可见对小振幅声波，c_0^2近似为一常数．

例如，对理想气体，由(4-3-5)式知$c^2=\frac{\gamma P}{\rho}$，取平衡态时的数值则得

$$c_0^2\approx\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s,0}=\frac{\gamma P_0}{\rho_0}. \tag{4-3-5a}$$

对液体等一般流体，由(4-3-6)式知$c^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s=\frac{1}{\beta_s\rho}$，取平衡态时的数值则得到

$$c_0^2\approx\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{s,0}=\frac{1}{\beta_s\rho_0}. \tag{4-3-6a}$$

经过上述近似，再考虑到对于小振幅声波，(4-3-3)式中压强的微分即声压p，密度的微分即密度增量ρ'，因而媒质物态方程可简化为

$$p=c_0^2\rho'. \tag{4-3-3a}$$

总之，对小振幅声波，经过略去二级以上微量的所谓线性化手续以后，媒质的三个基本方程都已简化为线性方程了，它们是

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4-3-1a}$$

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial \rho'}{\partial t}; \tag{4-3-2a}$$

$$p=c_0^2\rho'. \tag{4-3-3a}$$

根据这一方程组,即可消去 p、v、ρ' 中的任意两个. 例如将(4-3-3a)式对 t 求导后代入(4-3-2a)式得

$$\rho_0 c_0^2\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial t},$$

将此式对 t 求导得

$$\rho_0 c_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}=-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

然后将(4-3-1a)式代入上式即得

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{4-3-7}$$

这就是均匀的理想流体媒质中小振幅声波的波动方程. 此外,如果由方程组(4-3-1a)、(4-3-2a)、(4-3-3a)消去 p、ρ' 或 p、v, 则也可得到关于 v 或 ρ' 的类似于 (4-3-7) 式的波动方程.

必须指出,声波方程(4-3-7)式是在忽略了二级以上微量以后得到,故称为线性声波方程. 所以从方程(4-3-7)出发研究声场规律时,必须意识到方程(4-3-7)赖以成立的前提. 本书除非特别说明, 大部分内容均限于理想流体媒质中的线性声学方面的课题,至于实际媒质中粘滞性对声传播的影响、大振幅声波以及存在切变弹性系数的固体中声的传播等将分别在第九章、第十章、第十一章中再作专门的讨论.

§4-3-3 三维声波方程

以上我们都假定声场在 y、z 方向是均匀的, 从而导得了一维声波方程. 为了普遍起见,现在讨论三维情形,即声场在 x、y、z 三个方向上都不均匀, 此时媒质的三个基本方程乃

至波动方程的推导完全类似于一维情形，不同的只是现在还要计及 y、z 方向压强的变化而作用在体积元上的力，体积元的速度也不恰好在 x 方向，而是空间的一个矢量．为避免重复，这里不再逐一推导，只把一维情况的结果简单地推广到三维情况：

对应于 (4-3-1)式、(4-3-2) 式的三维运动方程和连续性方程分别为

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p, \tag{4-3-8}$$

$$-\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{4-3-9}$$

其中 grad 为梯度算符，它代表 $\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$，如作用于 p 就得到声压 p 沿波阵面法线方向的梯度，即 $\mathrm{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$；div 为散度算符，它作用于矢量 $\rho\boldsymbol{v}$ 时得到 $\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$，这里 v_x、v_y、v_z 分别为速度 $\boldsymbol{v}$ 沿三个坐标轴的分量．至于物态方程形式上仍为(4-3-3)式．

在小振幅情况下，经过线性化近似，得到相应于(4-3-1a)式与(4-3-2a)式的三维线性方程为

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p, \tag{4-3-8a}$$

$$-\mathrm{div}\,(\rho_0 \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{4-3-9a}$$

物态方程形式上仍为(4-3-3a)式，其中的系数 c_0^2 已是决定于媒质平衡态参数的一个常数．

消去 $\boldsymbol{v}$、ρ'，例如将(4-3-9a)式两边对 t 求导得