ZHENGZESHENGYUGE DE ⊙ LIXIANG LILUN

正则剩余格的⊙理想理论

秦学成　刘春辉　著

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

正则剩余格的⊙理想理论

秦学成　刘春辉　著

内 蒙 古 出 版 集 团
内蒙古科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

正则剩余格的⊙理想理论 / 秦学成，刘春辉著．—
赤峰：内蒙古科学技术出版社，2013.3

ISBN 978-7-5380-2262-9

Ⅰ．①正… Ⅱ．①秦… ②刘… Ⅲ．①模糊数学—研
究 Ⅳ．①0159

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第048501号

出版发行：内蒙古出版集团　内蒙古科学技术出版社
地　　址：赤峰市红山区哈达街南一段4号
邮　　编：024000
电　　话：(0476)8224848 8226867
网　　址：www.nm-kj.com
责任编辑：季文波
封面设计：李树奎
印　　刷：赤峰金源彩色印刷有限责任公司
字　　数：150千
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：7.25
版　　次：2013年3月第1版
印　　次：2013年3月第1次印刷
定　　价：48.00元

前 言

随着科学技术的不断进步，现代数学有了很大的发展。反过来讲，在一定程度上，现代数学的发展为科学技术的进步奠定了基础。无论怎么说，发展到今天的现代数学不仅自身已是一棵枝繁叶茂的参天大树，而且它也深深扎根于现代科学技术的各个领域之中，从那里汲取养分，同时也从那里赋予科学技术以活力。在分支繁多的现代数学中，不同分支的研究内容与方法往往相去甚远，因此，要求数学工作者通晓数学的各个分支是不现实的。然而，正如我国著名学者王国俊教授所言，无论从事哪种数学分支的研究工作，在一定程度上了解和掌握数理逻辑的内容和方法都是必要的。

数理逻辑理论发展至今已有300多年的历史了，如果从1880年前不久正式提出谓词演算和集合论时算起，也有100多年的历史可以追溯了。在数理逻辑的发展史上，经典的二值逻辑以其形式化推理的严谨性而成为现代计算机科学的理论基础。这种以Boole代数为基础建立起来的二值逻辑系统L是一种基于确定性的逻辑系统，其中任一公式要么为真，要么为假，二者必居其一，且仅居其一。然而实际生产和生活中却大量存在着一类命题，其真值无法用真或假来描述。如考虑命题“人的寿命一般不会超过80岁”，由于该命题中含有一个意义不确切的修饰词“一般”，所以我们无法来断定其真伪。这就促使人们去探寻和建立能够概括此类现象的更为广泛的逻辑推理体系。由此，也就诞生了数理逻辑的一个新的研究分支——非经典数理逻辑。

在对非经典数理逻辑的长期探索和研究过程中，人们发现，与经典数理逻辑类似，每一种模糊逻辑系统都以一个逻辑代数作为其基础。因此，利用泛代数的方法来研究逻辑问题也倍受学者们青睐。1958年C.C.Chang引入了一种新的逻辑代数——MV代数，从而成功证明了无限值Łukasiewicz系统的完备性。我国学者徐扬教授把格运算和蕴涵相结合于1993年提出了格蕴涵代数，并对其进行了深入研究，建立了相应的逻辑推理系统。王国俊教授于1996年引入了R0–代数，提出了蕴涵格的概念并得到了其模糊拓扑表现定理，推广了著名的Stone表现定理等。

值得一提的是，在诸多的非经典逻辑代数结构中，作为Heyting代数的推广产物的剩余格是一类广受推崇的代数结构，这是因为，一方面，上述众多的代数结构都可以看成是剩余格的特例；另一方面，更为重要的是其上有序结构、丰富的运算及其伴随的蕴涵运算，特别适合担任多值逻辑推理的真值格的角色。因此，在现代数学的多个分支中基于剩余格的研究课题不胜枚举。理想是研究非经典逻辑代数理论的一个重要的工具性概念，迄今为止，国内外学者基于不同的逻辑代数提出了多种理想的概念，研究成果层出不穷。鉴于此，在广泛深入地分析国内外学者关于理想问题的研究工作的基础上，作者在剩余格和正则剩余格的框架之下，引入⊙运算并提出⊙理想的概念，并借助于格论、拓扑学和模糊集理论的基本思想和基本方法对这一概念的性质和等价刻画等问题作了一些深入和细致的探索。本书正是对作者近年来研究工作的总结。

在内容安排上，本书共分4章。第1章讲预备知识，主要介绍在本书行文过程中需要用到的有关集合论、格与序理论、拓扑学和模糊数学方面的基本概念和基本结论。第2章介绍剩余格和正则剩余格的概念、性质和运算。重点介绍了正则剩余格中的⊙理想及其性质。第3章引入正则剩余格的⊙理想、生成⊙理想、素⊙理想和强素⊙理想等概念，并借助于格与序理论和拓扑学的基本思想和方法，对这些概念的性质和等价刻画作了深入的分析和探索。第4章，将Zadeh提出的模糊集思想和方法引入到正则剩余格的 理想问题的研究中，提出了正则剩余格的模糊⊙理想和$(\in,\in\vee q)$–模糊⊙理想概念，并详细讨论了它们的性质特征。

在本书的写作过程中，得到了赤峰学院众多领导和老师们的支持和鼓励，正是他们的支持与鼓励才使得作者能够全力以赴地投身于书稿的写作，从而使得本书能够顺利出版。在此，表示衷心的感谢。

虽然经过多次校对，力求减少书中的错误和疏漏，但是由于作者水平所限，本书中的疏漏、不妥乃至谬误之处仍在所难免，希望读者多多批评指正。

作者

2013年1月10日

目　录

第 1 章 预备知识

在本章，主要对本书中所涉及到的有关集合论、偏序、格论以及拓扑学等方面的基本概念和基本理论作简单介绍，为本书后续内容的讨论做准备。

§1.1 集合及其运算

集合是一个容易被读者理解的概念，它指的是某些具有某种共同特点的个体构成的集体。例如“全体整数的集合”等。集合也常称为**集**。

集合（即通常所谓的“集体”）是由它的**元素**（即通常所谓的“个体”）构成的。例如所有整数的集合以每一个整数为它的元素。元素也常称为**元**或**点**。

通常用大写的英文字母 A，B，C，$\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 a，b，c，$\cdots$ 表示集合的元素。

集合也可以没有元素。没有元素的集合我们称之为**空集**，记作 $\varnothing$。

由一个元素构成的集合，我们常称为**单点集**。

用文句来描述一个集合由哪些元素构成，是定义集合的一种重要方法。此外，我们还可以通过如下方式来定义集合：记号

$$\{x \mid 关于\ x\ 的一个命题\ P\}$$

表示使花括号中竖线后面的那个命题 P 成立的所有元素 x 构成的集合。当然，我们通常也将一个集合的所有元素列举出来再加上花括号来表示这个集合。例如

$$\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$$

表示由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的集合。

需要提醒读者的是：不论你用任何一种方式定义集合，最重要的是不允许产生歧义，也就是说你所定义的集合的元素应当是完全确定的。

在本书中，我们常用：

表示全体实数构成的集合，称为**实数集**；

表示全体自然数构成的集合，称为**自然数集**；

*表示全体正整数构成的集合，称为**正整数集**。

并且假定读者熟知这些集合。

定义 1.1.1 设 A 是一个集合，a 是一个元素。如果 a 是 A 的元素，记作

$$a \in A,$$

称为 a **属于** A。

如果 a 不是 A 的元素，记作

$$a \notin A,$$

称为 a **不属于** A。

定义 1.1.2 设 A 和 B 是两集合。若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则称 A **包含于** B，或 B **包含** A。记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A。$$

否则，称 A **不包含于** B，或 B **不包含** A。记作

$$A \not\subset B。$$

定义 1.1.3 设 A 和 B 是两个集合。如果 A 与 B 是由完全相同的元素构成的集合，即集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，并且集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，则称集合 A **等于** B，记作

$$A = B。$$

如果集合 A 中至少有一个元素不是集合 B 的元素，或者集合 B 中至少有一个元素不是集合 A 的元素，则称集合 A **不等于** B，记作

$$A \neq B。$$

定理 1.1.1 设 A 和 B 是两个集合。

$$A = B \text{ 当且仅当 } A \subset B \,\&\, B \subset A。$$

定义 1.1.4 设 A 和 B 是两个集合。如果 $A \subset B$，则称 A 是 B 的**子集**；

如果 A 是 B 的子集，但 A 又不等于 B，即

$$A \subset B，但 A \neq B，$$

也即集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，但集合 B 中至少有一个元素不是集合 A 的元素，则称 A 是 B 的**真子集**。

我们常常需要讨论以集合作为元素的集合，为了强调这一特点，这类集合常称为**集族**。并且常用花写的英文字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，$\cdots$ 来表示。例如

$$\mathscr{A} = \left\{\{1\}, \{1,2\}, \varnothing\right\}$$

表示一个含有三个元素的集族，其三个元素分别为：单点集$\{1\}$，二元素集$\{1,2\}$和空集$\varnothing$。

定义 1.1.5 设X是一个集合，称由X的所有子集构成的集族$\mathscr{P}(X)$为集合X的**幂集**。

例 1.1.1 设集合$X=\{1,2\}$，则集合X的幂集

$$\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}。$$

定义 1.1.6 设A和B是两个集合。集合

$$\{x \mid x\in A\text{或者}x\in B\}$$

称为集合A与集合B的**并集**或**并**。记为$A\cup B$。

定义 1.1.7 设A和B是两个集合。集合

$$\{x \mid x\in A\text{且}x\in B\}$$

称为集合A与集合B的**交集**或**交**。记为$A\cap B$。

如果$A\cap B=\varnothing$，则称集合A与集合B**无交**或**不相交**；如果$A\cap B\neq\varnothing$，则称集合A与集合B**有（非空的）交**。

定义 1.1.8 设A和B是两个集合。集合

$$\{x \mid x\in A\text{且}x\notin B\}$$

称为集合A与集合B的**差集**。记为$A\setminus B$或$A-B$。

关于集合的并、交、差运算之间，有以下的基本规律：

定理 1.1.2 设A，B和C都是集合。则以下各等式成立：

（1）幂等律

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$

（2）交换律

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

（3）集合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

（4）分配律

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

（5）De Morgan 对偶律

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

定理 1.1.3 设A和B是两个集合。则

$$A\subset B \text{ 当且仅当 } A\cap B=A \text{ 当且仅当 } A\cup B=B \text{。}$$

我们在讨论某一具体问题时，所涉及到的各个集合往往都是某一个特定的“大的”集合的子集。例如在空间几何学中，我们研究的所有图形都是“全平面”这样一个集合的子集。像这样，包含着在特定情况下讨论的所有集合的这样一个集合，我们称之为**基础集**或**全集**。需要说明的是，当我们所研究问题的基础集自明时，不必每次都提起。

定义 1.1.9 设X是一个基础集。对于X的任一子集A，我们称$X-A$为A（相对于基础集X而言的）**补集**或**余集**。记为A^c。

还需要提醒读者注意的是：有时我们会用到“有限多个集合的并（或交）”这样一个说法，这样说时总是指“某$n\in {}^{*}$个集合的并（或交）”。但请读者务必注意，迄今为止，我们并未定义过 0 个集合的并（或交），尽管在某些场合可能会以某种方式定义“0 个集合的并”，但永远不会使用“0 个集合的交”这种说法。

最后，介绍集族的概念：

设Λ是一个集合。如果对每一个$\alpha\in\Lambda$，指定了一个集合A_α，我们就说给定了一个**有标集族**$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，或者在不至于引起混淆的情况下干脆说给定了一个**集族**$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，同时，称$\Lambda$为（有标）集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的**指标集**。

定义 1.1.10 设给定一个集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$。集合

$$\{x\mid \exists\alpha\in\Lambda \ni x\in A_\alpha\}$$

称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的**并集**或**并**，记为$\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$。当指标集$\Lambda$非空时，集合

$$\{x\mid \forall\alpha\in\Lambda, x\in A_\alpha\}$$

称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的**交集**或**交**，记为$\cap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$。

§1.2 关系与映射

1.2.1 关系

为了给出关系的定义，我们首先定义笛卡尔积的概念。

定义 1.2.1 设X和Y是两个集合。集合

$$\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$$

称为X与Y的**笛卡尔积**，记为$X\times Y$。

其中(x,y)是一个有序偶，x称为(x,y)的第一个坐标，y称为(x,y)的第二个坐标。X称为$X\times Y$的第一个坐标集，Y称为$X\times Y$的第二个坐标集。

集合X与其自身的笛卡尔积$X\times X$称为X的**二重（笛卡尔）积**，通常记为X^2。

需要注意的是，一般来讲集合X与集合Y的笛卡尔积$X\times Y$完全不同于集合Y与集合X的笛卡尔积$Y\times X$。

定义 1.2.2 设X和Y是两个集合。如果R是X与Y的笛卡尔积$X\times Y$的一个子集，即

$$R\subset X\times Y$$

则称R是从X到Y的一个**关系**。

定义 1.2.3 设R是从集合X到集合Y的一个关系，即$R\subset X\times Y$。如果$(x,y)\in R$，则称x与y是R**相关的**，记为xRy。

定义 1.2.4 设X是一个集合。称从集合X到集合X的一个关系为**集合X中的一个关系**。

定义 1.2.5 设R是集合X中的一个关系。

（1）称关系R是**自反的**，如果$\forall x\in X$都有xRx；

（2）称关系R是**对称的**，如果$\forall x,y\in X$，$xRy\Rightarrow yRx$；

（3）称关系R是**反对称的**，如果$\forall x,y\in X$，$xRy\ \&\ yRx\Rightarrow x=y$；

（4）称关系R是**传递的**，如果$\forall x,y,z\in X$，$xRy\ \&\ yRz\Rightarrow xRz$。

定义 1.2.6 设R是集合X中的一个关系。如果R同时是自反的、对称的和传递的，则称R为集合X上的一个**等价关系**。

定义 1.2.7 设 R 是集合 X 中的一个等价关系。如果集合 X 中的两个点 x 和 y 满足 xRy，则称 x 与 y 是 R **等价的**，或简称为**等价的**。

对每个 $x \in X$，集合 X 的子集

$$\left\{ y \in X \mid xRy \right\}$$

称为 x 的 R **等价类**或**等价类**，常记为 $\left[x \right]_R$ 或 $\left[x \right]$，并且任一 $y \in \left[x \right]_R$ 称为 R 等价类 $\left[x \right]_R$ 的一个**代表元**。集族

$$\left\{ \left[x \right]_R \mid x \in X \right\}$$

称为集合 X 相对于等价关系 R 而言的**商集**，记为 X / R。

定理 1.2.1 设 R 是非空集合 X 中的一个等价关系。则

（1）如果 $x \in X$，则 $x \in \left[x \right]_R$，从而 $\left[x \right]_R \neq \varnothing$；

（2）对任意的 $x, y \in X$，或者 $\left[x \right]_R = \left[y \right]_R$，或者 $\left[x \right]_R \cap \left[y \right]_R = \varnothing$。

1.2.2 映射

映射是数学中的一个至关重要的概念。当然也是读者最熟知的数学概念之一。这里我们只介绍一些基本概念。

定义 1.2.8 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系。如果对每一个 $x \in X$，存在唯一的一个 $y \in Y$，使得 xfy，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**映射**。记为

$$f : X \to Y。$$

定义 1.2.9 设 X 和 Y 是两个集合，$f : X \to Y$ 是从 X 到 Y 的一个映射。对每个 $x \in X$，使得 xfy 的唯一的那个 $y \in Y$ 称为 x 的**象**或**值**，记为 $f\left(x \right)$。集合

$$f\left(X \right) = \left\{ f\left(x \right) \mid x \in X \right\}$$

称为映射 f 的值域。

对每个 $y \in Y$，如果 $x \in X$，使得 xfy（即 y 是 x 的象），则称 x 是 y 的**原象**（注意：$y \in Y$ 可以没有原象，也可以有不止一个原象）。

定义 1.2.10 设 X 和 Y 是两个集合，$f : X \to Y$。

（1）如果 Y 中每一个点都有原象，即 f 的值域为 Y，也即

$$f\left(X \right) = Y，$$

则称 f 是一个**满射**，或称 f 为一个**从 X 到 Y 上的映射**；

（2）如果 X 中不同点的象是 Y 中的不同的点，即

$$\forall x, y \in X，\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)。$$

则称 f 是一个**单射**；

（3）如果 f 既是一个满射，又是一个单射，则称 f 是一个**双射**或**一一映射**。

定义 1.2.11 设 X 和 Y 是两个集合，$A \subset X$。映射 $f: X \to Y$ 和 $g: A \to Y$ 如果 $g \subset f$，即 $\forall a \in A$，都有 $f(a) = g(a)$，则称 g 是 f 的限制，也称 f 是 g 的扩张，记为 $g = f|_A$。

§1.3 序与格

1.3.1 序

无论是通俗意义还是严格的数学意义，序的概念都呈现出了平凡而伟大的特征。平凡表现在其意义容易理解而又时时伴随着人们的思维过程；伟大则表现在它被 Bourbaki 学派冠名为数学三大母结构（代数结构、拓扑结构和序结构）之一。下面我们将为读者介绍一些有关序的基本知识。

定义 1.3.1 设 X 是一个非空集合，$\prec$ 是 X 中的二元关系。如果 $\forall x, y, z \in X$ 满足

（1）$x \prec x$（自反性）；

（2）若 $x \prec y$ 且 $y \prec z$，则 $x \prec z$（传递性），

则称 $\prec$ 为 X 上的一个**预序**，此时，称 $(X, \prec)$ 为一个**预序集**。

例 1.3.1 任取 $x \in$ ，以 $|x|$ 表示 x 的绝对值，规定

$$x \prec y \text{ 当且仅当 } |x| \leq |y|，\forall x, y \in \quad 。$$

则 $(\quad , \prec)$ 是一个预序集。

定义 1.3.2 设 $(P, \prec)$ 是预序集。如果预序 $\prec$ 还满足反对称性，即

$$\text{当 } x \prec y \text{ 且 } y \prec x \text{ 时，} x = y，\forall x, y \in P。$$

则称 $\prec$ 是 P 上的一个**偏序**，此时，称 $(P, \prec)$ 为一个**偏序集**。

定义 1.3.3 设 $(P, \prec)$ 是偏序集。如果对任意的 $x, y \in P$，必有 $x \prec y$ 或 $y \prec x$ 之

一成立，则称$\left(P,\prec\right)$为一个**全序集**。

例 1.3.2 如图 1.1 所示，设P是黑点构成之集，规定位置较低的点不大于位置较高的点，也不大于自身，则各图中的P都是偏序集。

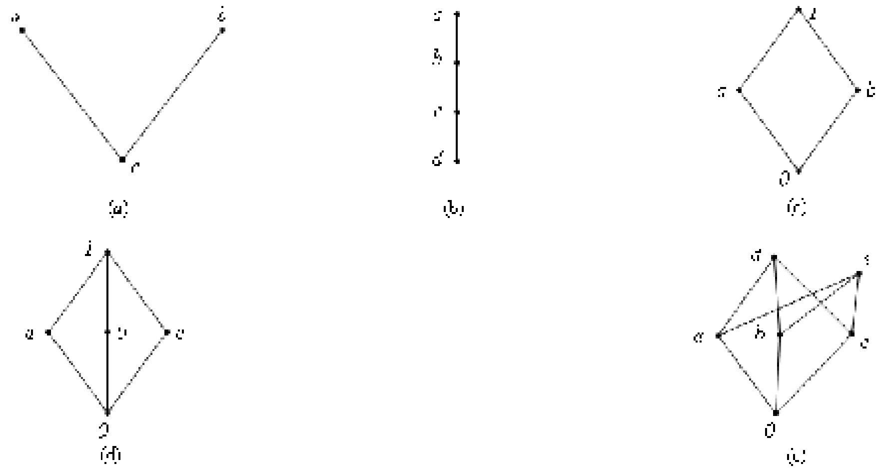

图 1.1

例 1.3.3 设X是一个非空集合。在X的幂集$\mathscr{P}\left(X\right)$上规定

$$\forall A,B\in\mathscr{P}\left(X\right)，\ A\prec B\text{ 当且仅当 }A\subset B\text{。}$$

则$\left(\mathscr{P}\left(X\right),\subset\right)$是一个偏序集。

注 1.3.1 在定义 1.3.2 中，$x\prec y$读作“x小于或等于y”或“y大于或等于x”或“x不大于y”或“y不小于x”。因此，为方便起见，以下我们常将P上的偏序$\prec$记为$\le$。

定义 1.3.4 设$\left(P,\le\right)$是偏序集，$X\subset P$且$a\in P$。

（1）如果对任意$x\in X$，有$a\le x$，则称a为X的一个**下界**；

（2）如果对任意$x\in X$，有$x\le a$，则称a为X的一个**上界**；

（3）设a为X的一个下界，如果对X的任一下界b均有$b\le a$，则称a为X的**最大下界**，也称**下确界**，记为$a=\inf X$或$a=\wedge X$；

（4）设a为X的一个上界，如果对X的任一上界b均有$a\le b$，则称a为X的**最小上界**，也称**上确界**，记为$a=\sup X$或$a=\vee X$。

例 1.3.4 如图 1.1 所示。

（1）在图(a)中，$\{a,b\}$有下确界c，但没有上界；

（2）在图(b)中，$\{a,b,c\}$的上、下确界分别是a和c；

（3）在图(e)中，$\{a,b,c\}$有下确界0，X有两个上界d与e，但没有上确界。

例 1.3.4 在偏序集$(\mathscr{P}(X),\subset)$中，设$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}\subset\mathscr{P}(X)$，则$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$的下确界和上确界都存在，就是$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$中各集合的交与并，即

$$\inf\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}=\cap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha \text{ 且 } \sup\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}=\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha 。$$

例 1.3.5 设$P=[0,1]$，$\le$是通常序，$X=\varnothing$，则$\sup X=0$且$\inf X=1$。这是因为：空集$\varnothing$以P中的每个元素为上（下）界，上确界作为最小上界当然为0，而下确界作为最大下界当然为1。这里需要注意：当$x\in\varnothing$时，$x\le a$（或$a\le x$）对P中的每个元素a都成立。

定义 1.3.5 设$(P,\le)$是偏序集，$X\subset P$且$a\in X$。

（1）如果对任意$x\in X$，恒有$a\le x$，则称a是X的**极小元**；

（2）如果对任意$x\in X$，恒有$x\le a$，则称a是X的**极大元**。

定理 1.3.1（Zorn’s Lemma） 设$(P,\le)$是非空偏序集。如果P的任一非空全序子集都有上（下）界，则X必有极大（小）元。

定义 1.3.6 设$(X,\prec)$是预序集，$Y\subset X$。如果对任意二元素$a,b\in Y$，都存在元素$c\in Y$使得$a\prec c$且$b\prec c$，则称Y为X的**定向子集**。

特别的，当$Y=X$时，称$(X,\prec)$为**定向集**。

例 1.3.6 在例 1.3.3 中，偏序集$(\mathscr{P}(X),\subset)$是定向集。

1.3.2 格

定义 1.3.7 设$(L,\le)$是偏序集，如果对L中任意两个元a与b，$\inf\{a,b\}$和$\sup\{a,b\}$恒存在，则称$(L,\le)$为**格**。

注 1.3.2 在格$(L,\le)$中，$\inf\{a,b\}$和$\sup\{a,b\}$常分别记为$a\wedge b$和$a\vee b$。

定理 1.3.2 设$(L,\le)$是格。

（1）设X是L的非空子集，则$\inf X$和$\sup X$都存在；

（2）$a\wedge b=b\wedge a$，$a\vee b=b\vee a$，$\forall a,b\in L$；

（3）$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$，$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$\forall a,b,c\in L$；

（4）$a\le b$ 当且仅当 $a\wedge b=a$ 当且仅当 $a\vee b=b$，$\forall a,b\in L$。

定义 1.3.8 设$(L,\le)$是偏序集，如果对L的任一子集X，$\inf X$和$\sup X$都存在，则称$(L,\le)$为**完备格**。

注 1.3.3 完备格$(L,\le)$有最大元，即$\sup L$，记为1_L，在不至引起混淆的情况下也简记为1。完备格$(L,\le)$也有最小元，即$\sup\varnothing$，记为0_L，在不至引起混淆的情况下也简记为0。

例 1.3.7 （1）全序集一定是格。特别地，仅含两个元素0和1的全序集$\{0,1\}$是格；

（2）$(\quad,\le)$是格，但非完备格；

（3）$([0,1],\le)$是完备格；

（4）$(\mathscr{P}(X),\subset)$是完备格，通常称之为**幂集格**；

（5）设$(L,\le)$是格，且L含有有限多个元素，则$(L,\le)$是完备格。为此只需说明L的空子集$\varnothing$有上确界和下确界。事实上，有限格有最大元1和最小元0，所以$\sup\varnothing=0$和$\inf\varnothing=1$都存在；

（6）图 1.1 中的（b）、（c）和（d）都是完备格。

定义 1.3.9 设$(L,\le)$是格，如果对L中任意的元素$a,b,c\in L$都有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),$$

则称$(L,\le)$是**分配格**。

例 1.3.4 事实上，可以证明：在格$(L,\le)$中，对任意的$a,b,c\in L$，$a\wedge(b\vee c)=$ $=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$当且仅当 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。于是，我们有：

定理 1.3.3 设$(L,\le)$是格。则$(L,\le)$是分配格当且仅当定义 1.3.9 中的两个条件