

微積分與解析幾何詳解

上 册

G. B. 小托馬士 R. L. 芬尼 原著

王 心 如

譯著

曉 園 出 版 社
世 界 圖 書 出 版 公 司

丁 11/53/03

微積分與解析幾何詳解

G. B. 小托馬士 R. L. 芬尼 原著
王 心 如 譯著

曉 園 出 版 社
世 界 圖 書 出 版 公 司

微积分与解析几何详解

G.B. 小托马斯、R.L. 芬尼 原著
王心如 译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 11 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1994 年 11 月 第一次印刷 印张: 26.75

印数: 0001—650 字数: 63 万字

ISBN: 7-5062-1979-4/O·147

定价: 35.80 元 (WB9405/8)

世界图书出版公司已向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

1.11/163/13

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

上册目錄

第一章 函數的變化率 1

1. 平面上的座標 1 / 2. 增量和距離 5 / 3. 直線的斜率 10 / 4. 直線方程式 23 / 5. 函數和圖形 40 / 6. 二次及三次曲線的斜率 61 / 7. 曲線 $y = f(x)$ 的斜率、導數 72 / 8. 速度和其他變率 80 / 9. 極限的性質 86 / 10. 無限大 102 / 11. 連續函數 110 / 綜合問題 119

第二章 導 數 143

1. 一般導數 143 / 2. 多項式函數及其導數 143 / 3. 乘積乘冪及商 148 / 4. 隱函數與分數乘冪 156 / 5. 切線逼近 167 / 6. 連鎖規則及參數方程 179 / 7. 三角函數的簡單回顧，曲線的夾角 188 / 8. 三角函數之導數 203 / 9. 牛頓法逼近方程式之解 216 / 10. 反函數及 Picard 方法 222 / 綜合問題 231

第三章 導數的應用 253

1. 描圖，一階導數的正負 253 / 2. 凹面和反曲點 263 / 3. 漸近和對稱 280 / 4. 極大與極小定理 300 / 5. 極大和極小之問題 307 / 6. 相對率 325 / 7. Rolle 定理 322 / 8. 均值定理 335 / 9. 不定形和 L'Hôpital 法則 338 / 10. 均值定理與泰勒展式的應用 343 / 綜合問題 348

第四章 積 分 387

1. 前言 387 / 2. 不定積分 387 / 3. 積分常數之決定及其應用 397 / 4. 三角函數之積分 404 / 5. 定積分，曲線下之面積 412 / 6. 利用極限計算面積 420 / 7. 微積分基本定理 426 / 8. 變數代換 438 / 9. 定積分的逼近法則 453 / 綜合問題 462

第五章 定積分的應用 473

1. 簡言 473 / 2. 兩曲線間面積 473 / 3. 距離 485 / 4. 薄片的旋轉體積 493 / 5. 薄殼和皮圈的體積模型 504 / 6. 平面曲線的長度 512 / 7. 旋轉體的表面積 517 / 8. 函數的平均值 522 / 9. 動量和質量中心 528 / 10. 重心和中心

532 / 11. Pappus's 定理 537 / 12. 流體靜力 539 / 13. 功 542 / 綜合問題 547

第六章 超越函數 567

1. 概論 567 / 2. 反三角函數 567 / 3. 反三角函數的微分及有關的積分 573 / 4. 自然對數及其微分 585 / 5. 自然對數的性質及 $y = \ln x$ 的圖形 599 / 6. 指數函數 613 / 7. a^x 和 a^y 函數 633 / 8. $y = \log_a u$ 函數，及函數的上升率 644 / 9. 指數函數及對數函數的應用 651 / 10. 複利及富蘭克林遺囑 657 / 綜合問題 658

第七章 分部積分 689

1. 基本積分公式 689 / 2. 分部積分 702 / 3. 三角函數的乘積與乘冪 714 / 4. 正弦、餘弦偶次乘方 726 / 5. 三角函數積分代換加入 732 / 6. 關於 $ax^2 + bx + c$ 之積分 744 / 7. 部分分式 750 / 8. 計算下列積分 762 / 9. 瑕積分 765 / 10. 利用積分表 777 / 綜合問題 787

下冊目錄

第八章 平面解析幾何 847

1 圓錐 847 / 2 利用距離公式產生方程式 847 / 3 圓 850 / 4 拋物線 857
5 橢圓 868 / 6 雙曲線 880 / 7 二次曲線 887 / 8 利用判別式判定拋物線、橢圓抑或雙曲線 891 / 9 圓錐截面 892 / 綜合問題 894

第九章 雙曲線函數 919

1 簡介 919 / 2 定義及等式 919 / 3 導數和積分 921 / 4 反雙曲函數 929
/ 5 吊索 935 / 綜合問題 938

第十章 極坐標 947

1 極坐標 947 / 2 極坐標方程式的描繪 959 / 3 錐線和其他曲線的極座標
方程式 964 / 4 積分 976 / 綜合問題 986

第十一章 數列與級數 1005

1 簡介 1005 / 2 數列 1007 / 3 常用之極限 1018 / 4 無窮級數 1023 / 5
正項級數的收斂判別法 1034 / 6 絕對收斂 1045 / 7 交錯級數、條件收斂
1052 / 綜合問題 1061

第十二章 冪級數 1069

1 函數的冪級數 1069 / 2 有餘項之泰勒展式：正弦、餘弦、指數函數
1078 / 3 進一步計算對數函數 $\tan^{-1} x$ 及 π 1086 / 4 不定型 1096 / 5
級數的收斂、積分與乘除 1103 / 綜合問題 1119

第十三章 向 量 1135

1 向量的分量和單位向量 1135 / 2 拋射運動 1141 / 3 解析幾何中的參數
方程 1146 / 4 空間坐標系 1155 / 5 空間中的向量與距離 1162 / 6 兩個向
量的內積 1167 / 7 空間中兩向量的向量積 1178 / 8 直線、線段和平面方
程式 1184 / 9 三個或更多向量的積 1194 / 10. Cylinders (圓柱) 1201 /
11. 二次曲面 1205 / 綜合問題 1215

第十四章 向量值函數及其導函數 1237

1 向量值函數的導函數 1237 / 2 切向量、速度及加速度 1242 / 3 空間中曲線的弧長及單位切向量 T 1249 / 4. 曲線及法向量 1253 / 5. 向量乘積的導數。 v 及 a 的切向量法向分量 1266 / 6. 平面運動及人造衛星 1273 / 綜合問題 1278

第十五章 偏導數 1295

1 二變數或多變數函數 1295 / 2 極限與連續 1301 / 3 偏導數 1307 / 4. 鏈鎖法則 1314 / 5. 非獨立變數 1323 / 6. 梯度，方向導數及切平面 1326 / 7. 高階導數，物理中的偏微分方程 1347 / 8. 線性逼近和增加量估計 1355 / 9. 極大、極小及鞍點 1365 / 10. Lagrange 乘值法 1379 / 11. 恰當型微分方程 1391 / 12. 最小平方 1398 / 綜合問題 1403

第十六章 多重積分 1425

2 重積分 1425 / 3 面積 1437 / 4. 物理的應用 1441 / 5. 變換成極坐標 1450 / 6. 直角坐標系中的三重積分 1457 / 7. 三維中的物理應用 1464 / 8. 柱面坐標與球面坐標上之積分 1470 / 9. 曲面面積 1484 / 綜合問題 1490

第十七章 向量分析 1513

1 向量場 1513 / 2 曲面積分 1515 / 3 線積分及功 1523 / 4. 二維向量場，平面曲線流速 1538 / 5. 格林定理 1542 / 6. 散度定理 1552 / 7. 史托克定理 1567 / 綜合問題 1574

第十八章 微分方程 1585

1 簡介 1585 / 2 微分方程解 1585 / 3. 一階：分離變數 1586 / 4. 一階：齊次 1589 / 5. 一階：線性 1592 / 6. 一階：恰當型 1596 / 7. 二階方程式之特殊型 1599 / 8. 常係數線性方程 1602 / 9. 二階線性常係數齊次方程式 1602 / 10. 二階非齊次常係數線性方程式 1603 / 11. 高階常係數線性方程 1620 / 12. 振動 1622 / 13. 逼近方法冪級數 1625 / 14. 方向場及 Picard 定理 1629 / 15. 數字方法 1634 / 綜合問題 1637

附錄 A 1647

A·1 行列式及 Cramer 法則 1647 / A·2 矩陣與線性方程式 1653 / A·3 極限定理的證明 1659 / A·5 數學歸納法 1661 / A·8 創造數系，複數 1664

第八章 平面解析幾何

8.1 圓錐

8.2 利用距離公式產生方程式

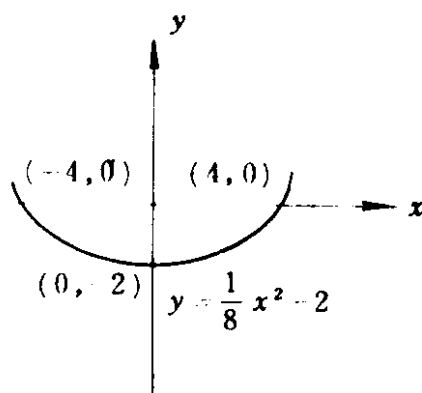
於問題 1 ~ 11 中，利用距離公式求滿足 $P(x, y)$ 的方程式，並畫出每一方程式。

1 P 至原點與直線 $y = -4$ 等距離。

$$\text{解 } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+4)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (y+4)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 - 2$$

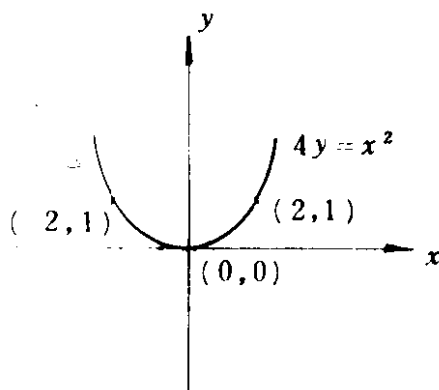


2 P 至點 $(0, 1)$ 及至 $y = -1$ 等距離。

$$\text{解 } \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = |y+1|$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4y$$



3 P 至 $A(-2, 1)$ 及至 $B(2, -3)$ 等距離。

$$\text{解 } \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$$

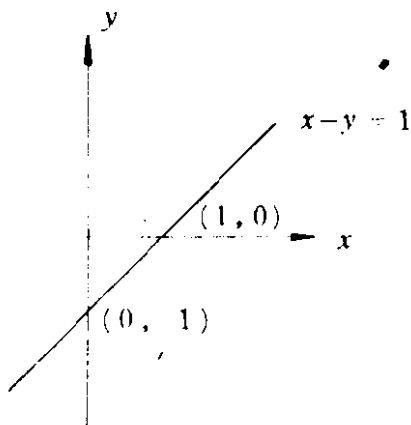
$$(x+2)^2 + (y-1)^2$$

$$= (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$4x + 4 - 2y + 1 = 4x + 4 + 6y + 9$$

$$8x - 8y = 8$$

$$\Rightarrow x - y = 1$$

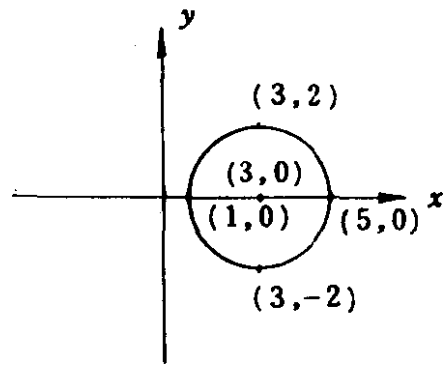


4. 令 $F_1(-1, 0)$, $F_2(2, 0)$, $\overline{PF_1} = 2\overline{PF_2}$

$$\text{解 } y^2 + (x+1)^2 = 4[(x-2)^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow 3(x-3)^2 + 3y^2 = 12$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$$



5. 令 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$,

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = 4$$

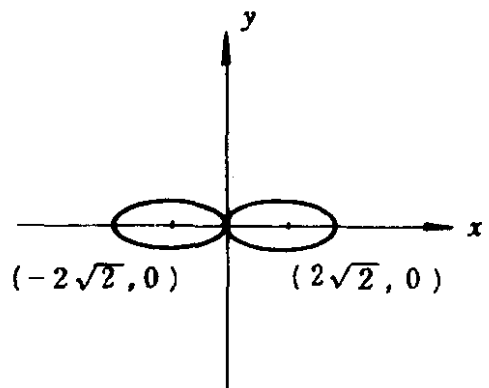
$$\text{解 } [(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2]$$

$$= 16$$

$$\Rightarrow x^4 - 8x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 8y^2$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 4)^2 + 16y^2 - 16 = 0$$



6. 令 $F_1(1, 0)$, $F_2(0, 1)$, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = C$ 常數, 又曲線通過原點。

$$\text{解 } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

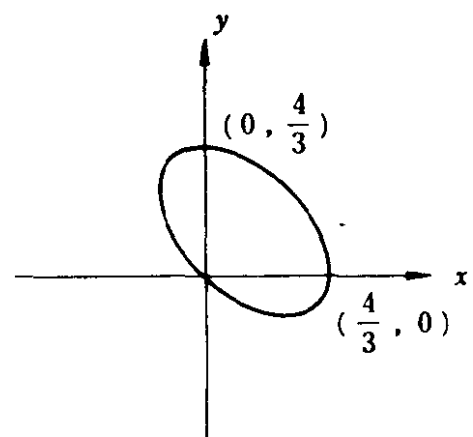
$$= C$$

$$(0, 0) \text{ 代入, } C = 2$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= 2$$

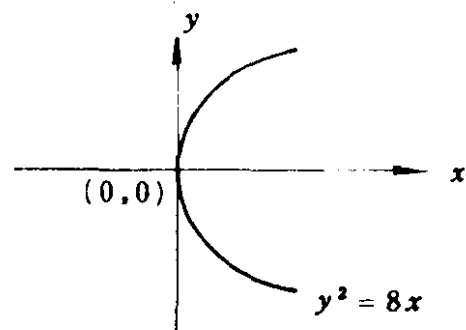
$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$$



7. P 至 $x = -2$ 之距離為 P 至 $(2, 0)$ 之距離的兩倍。

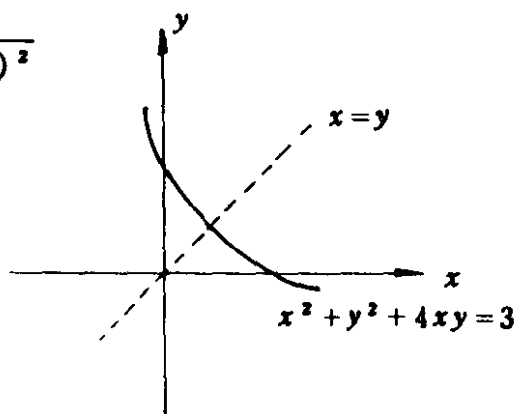
$$\text{解 } (x+2)^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 8x$$



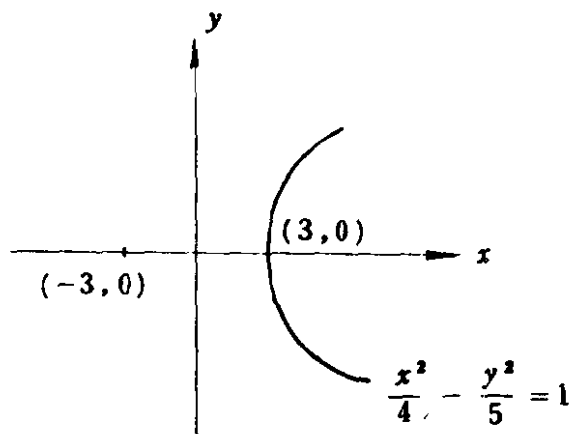
8. P 至 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 之距離為 2 加上 P 至 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 之距離。

$$\begin{aligned} \text{解 } & \sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} \\ & = 2 + \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 + 4xy = 3 \\ & \left(\text{但 } x+y \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$



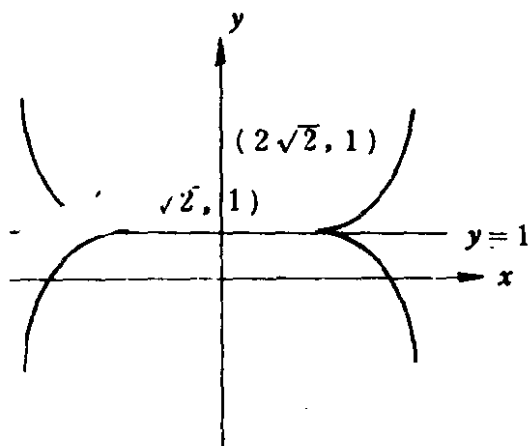
9. P 至 $(-3, 0)$ 之距離減去 P 至 $(3, 0)$ 之距離為 4。

$$\begin{aligned} \text{解 } & \sqrt{(x+3)^2+y^2} \\ & = 4 + \sqrt{(x-3)^2+y^2} \\ \Rightarrow & \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \\ \text{但 } & x \geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$



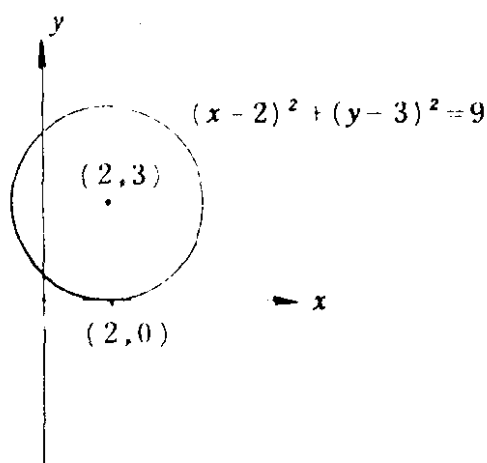
10. P 至 $y=1$ 之距離，比 P 至原點之距離小 3。

$$\begin{aligned} \text{解 } & y \geq 1 \text{ 時, } x^2 + y^2 = (y+2)^2 \\ & \Rightarrow x^2 = 4(y+1) \\ & y < 1 \text{ 時, } x^2 + y^2 = (4-y)^2 \\ & \Rightarrow x^2 = -8(y-2) \end{aligned}$$



11. P 至 $(2, 3)$ 之距離為 3。

$$\text{解 } \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 3 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 9$$



12. 求位於 $x - y = 1$ 上與 $(3, 0)$ 相距 2 之點。

$$\text{解} \quad \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{解得 } x = 1, y = 0 \text{ 或 } x = 3, y = 2$$

13. 求距離至 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(4, 3)$ 三點皆相等之點，又經過 A, B, C 三點之圓半徑為何？

$$\text{解} \quad \begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ \text{由 } x^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + y^2 \text{ 得 } y = x \text{ 代入} \\ y^2 + (y-1)^2 &= (y-4)^2 + (y-3)^2 \\ \Rightarrow y = 2 \quad x &= 2 \end{aligned}$$

此點為 $(2, 2)$ 又為圓心

$$\therefore \text{半徑為 } \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

14. 求 $P_1(x_1, y_1)$ 至 $Ax + By = C$ 之距離。

$$\text{解} \quad d = \frac{|Ax_1 + By_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.3 圓

求問題 1 ~ 4 中給予之中心 $C(h, k)$ 及半徑 r 之圓方程式。

1 $C(0, 2), r = 2$

$$\text{解} \quad x^2 + (y-2)^2 = 4$$

2 $C(-2, 0), r = 3$

$$\text{解} \quad (x+2)^2 + y^2 = 9$$

3 $C(3, -4), r = 5$

$$\text{解} \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

4 $C(1, 1), r = \sqrt{2}$

解 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

5. 用不等式表示出位於圓心為 $(-2, -1)$ ，半徑為 $\sqrt{6}$ 之圓內部的點。

解 圓方程式為 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 6$

內部的點為 $(x+2)^2 + (y+1)^2 < 6$

6. 用不等式表示出位於圓心為 $(-4, 2)$ ，半徑為 4 之圓外部的點。

解 圓方程式為 $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

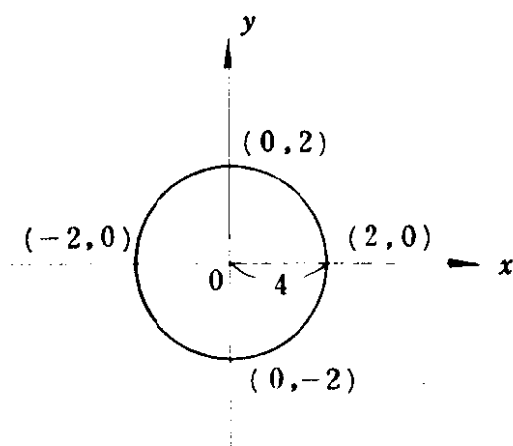
外部的點為 $(x+4)^2 + (y-2)^2 > 16$

於問題 7 ~ 16 中求給予之圓的中心及半徑並畫此圓。

7. $x^2 + y^2 = 16$

解 圓心： $(0, 0)$

半徑(4)

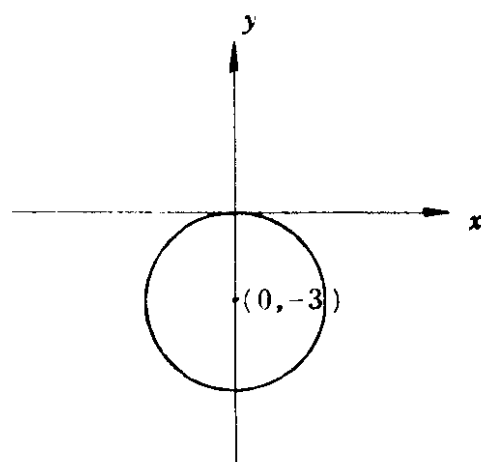


8. $x^2 + y^2 + 6y = 0$

解 $x^2 + (y+3)^2 = 9$

∴ 圓心為 $(0, -3)$

半徑為：3

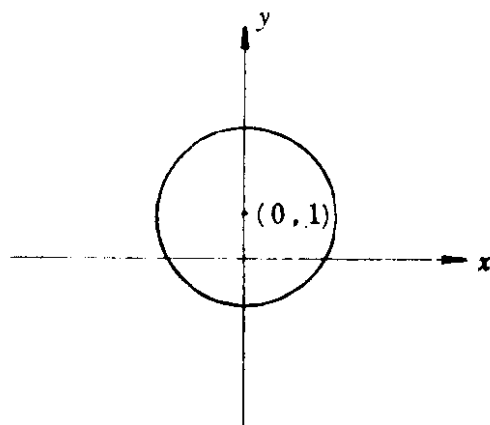


9. $x^2 + y^2 - 2y = 3$

解 $x^2 + (y-1)^2 = 4$

圓心： $(0, 1)$

半徑：2

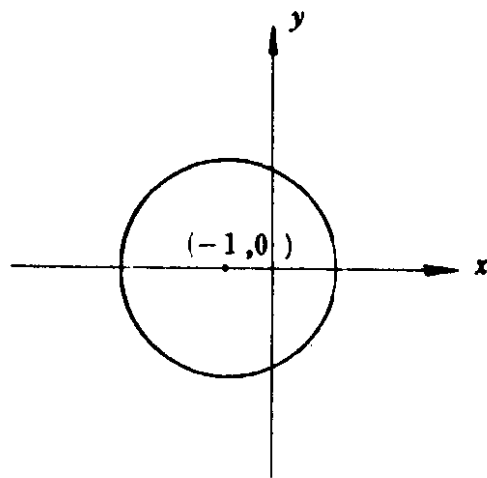


10. $x^2 + y^2 + 2x = 8$

解 $(x+1)^2 + y^2 = 9$

圓心： $(-1, 0)$

半徑：3

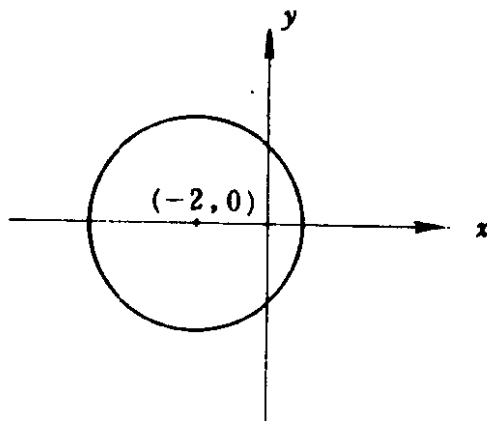


11. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

解 $(x+2)^2 + y^2 = 16$

圓心： $(-2, 0)$

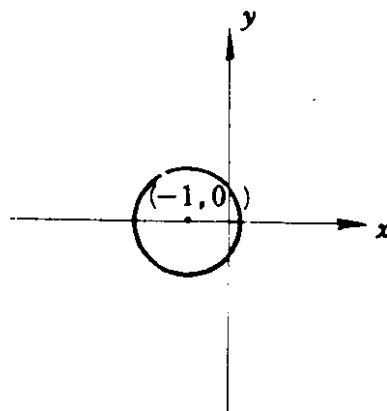
半徑：4



12. $3x^2 + 3y^2 + 6x = 1$

解 $3(x+1)^2 + 3y^2 = 4$

$(x+1)^2 + y^2 = 4/3$

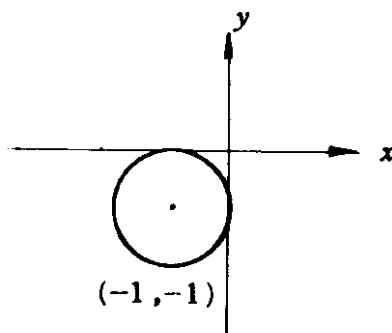
圓心為 $(-1, 0)$ 半徑： $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 

13. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = -1$

解 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

圓心： $(-1, -1)$

半徑：1

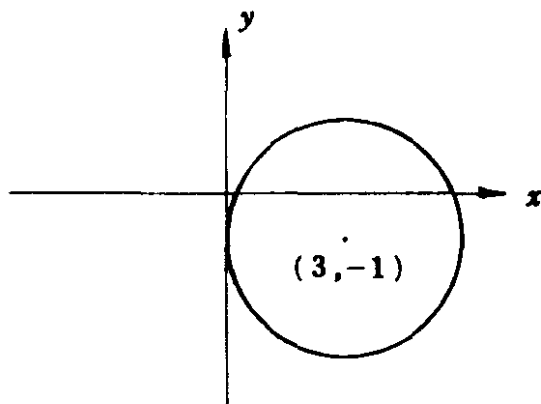


14. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

解 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$

圓心：(3, -1)

半徑：3



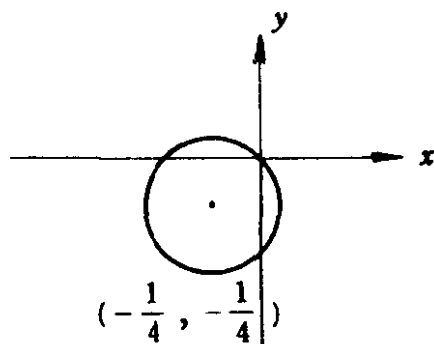
15. $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$

解 $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

圓心： $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

半徑： $\frac{1}{2\sqrt{2}}$



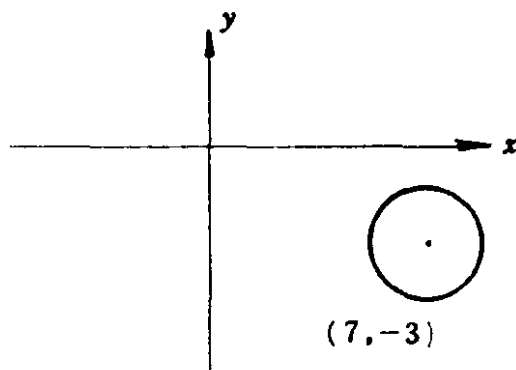
16. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

解 $2(x-7)^2 + 2(y+3)^2 = 2$

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = 1$$

圓心：(7, -3)

半徑：1



那些點滿足問題 17, 18 中之不等式。

17. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \leq 0$

解 $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 0$

$\therefore x = -1, y = 2$ 僅一點 $(-1, 2)$

18. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 \geq 0$

解 $(x+2)^2 + (y+2)^2 + 1 \geq 0$

\Rightarrow 所有點均滿足，即解集合為 $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

19. 一圓之圓心為 $(2, 2)$ ，又通過 $(4, 5)$ ，求此圓方程式。

解 設此方程式為

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

$$(4, 5) \text{ 代入, 得 } r = \sqrt{13}$$

$$\therefore \text{方程式為 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$$

20. 一圓之圓心為 $(-1, 1)$ ，此圓又與 $x + 2y = 4$ 相切，求此圓方程式。

$$\text{解 } r = d = \frac{|-1 + 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{方程式為 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{5}$$

21. 一圓過 $A(2, -2)$ 及 $B(3, 4)$ 兩點又中心位於 $x + y = 2$ 上，求此圓方程式。

解 設圓心為 $(t, 2-t)$ ，則

$$(t-2)^2 + (4-t)^2 = (t-3)^2 + (t+2)^2$$

$$t = \frac{7}{10} \quad \therefore \text{圓心為 } \left(\frac{7}{10}, \frac{13}{10} \right)$$

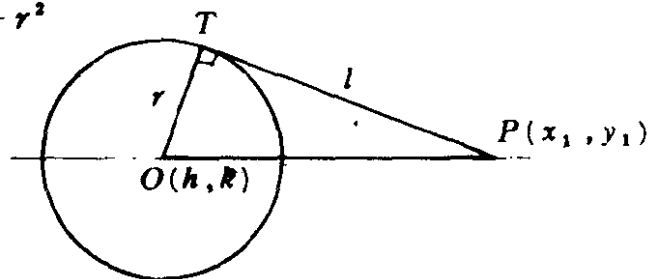
$$\text{半徑為 } \frac{\sqrt{1258}}{10}$$

$$\therefore \text{圓方程式為 } \left(x - \frac{7}{10} \right)^2 + \left(y - \frac{13}{10} \right)^2 = \frac{629}{50}$$

22. 證明自圓 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 外一點 $P(x_1, y_1)$ 做切線，切點到 $P(x_1, y_1)$ 之距離 l ，使得 $l^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2$

證 如圖

$$\begin{aligned} l^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 \\ &= (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2 \end{aligned}$$



23. 求過 $(2, 3)$ ， $(3, 2)$ ， $(-4, 3)$ 三點之圓方程式。

解 設圓方程式為

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(2, 3), (3, 2), (-4, 3) \text{ 代入}$$

$$\begin{cases} 13 + 2D + 3E + F = 0 \\ 13 + 3D + 2E + F = 0 \\ 25 - 4D + 3E + F = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = E = 2 \quad F = -23$$

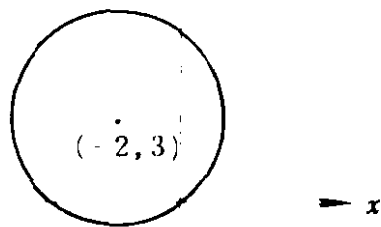
$$\therefore \text{方程式爲 } x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$$

24. $P(x, y)$ 至 $(-5, 2)$ 之距離和至 $(1, 4)$ 之距離的平方和為 52, 求此方程式。並劃出圖形。

解 $(x+5)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2 + (y-4)^2 = 52$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x + 2y^2 - 12y = 6$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$



25. $(0.1, 0.3)$ 位於 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ 的內側抑或外側? 為何?

解 $\because (0.1)^2 + (0.3)^2 - 2(0.1) - 4(0.3) + 3 = 1.7 > 0$

\therefore 在外側。

26. $P(x, y)$ 至 $(6, 0)$ 之距離為至 $(0, 3)$ 之距離的兩倍, 證明 P 在一圓上, 並求此圓之圓心及半徑。

證 $(x-6)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-3)^2]$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$$

\therefore 圓心為 $(-2, 4)$, 半徑為 $2\sqrt{5}$

27. 證明圓 $x^2 + y^2 = a^2$ 之任一條法線皆通過原點。

證 圓上任何一點 (x_1, y_1) 其切線斜率為

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=y_1} = -\frac{x_1}{y_1}$$

故法線斜率為 $\frac{y_1}{x_1}$

法線方程式為 $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$