

一九八〇年

全国弹性与塑性力学学术交流会

论文选集

上册

1980年6月 重 庆

PDG

前 言

一九八〇年六月教育部和中国力学学会委托清华大学和重庆大学等单位在重庆举办了“全国弹性与塑性力学学术交流会”。会议按弹性力学、塑性力学、板壳力学、稳定及动力学四个学科组进行了交流和讨论。经会议领导小组讨论商定，按会议上宣读的先后次序将部分论文汇编成册，供有关单位的科技工作者及大专院校师生参考。

1980年全国弹性与塑性力学学术交流会 秘书组

一九八一年六月

目 录

弹性力学与塑性力学

(上册)

- 1 复合材料在横向荷载作用下的应力集中
合肥工业大学 蔡四维
- 2 曲面上压入硬度值的修正问题
哈尔滨工业大学 盖秉政
- 3 单列球轴弹性接触变形和最大接触压力的简化计算
洛阳轴承研究所 马家驹
- 4 轴对称弹性体的有限元分析
清华大学 钱伟长
- 5 非均匀变厚度弹性体力学的一般解
兰州大学 叶开源
- 6 样条有限元法
广西大学 秦 荣
- 7 厚壁T.C.L形悬臂梁弯曲中心计算方法
西北工业大学 陈宜周
- 8 方差泛函变分与高斯配点离散型最小二乘法
七机部二院 210 所 邱吉宝
- 9 弹性力学三维问题的最小二乘解法
西南交通大学 陈 虬
- 10 平面粘弹性问题的一种数值解法
吉林大学 王在申
- 11 分区和全区混合能量原理
清华大学 龙驭球
- 12 关于应力函数和应变函数
湖南大学 熊祝华
- 13 线性粘弹性体的广义变分原理
吉林大学 胡定钟
- 14 蠕变理论的广义变分原理
大连工学院 郭瑞铎 奚肖凡
- 15 偶应力的弹性理论
中山大学 谭忠棠
- 16 带孔各向异性体平面问题精确解
工程力学所 刘殿魁 周 折

- 17 回转体轴对称受力问题的一个积分方程解法
华中工学院 云天铨
- 18 土的弹塑性应力应变关系的合理形式
南京水利科学研究所 沈珠江
- 19 各向均匀应力对塑性应力—应变关系的影响
哈尔滨工业大学 张泽华 盖秉政
- 20 建议一个关于大变形的极限分析定理
北京工业学院 薛大为
- 21 符合热工定律的通用非常温塑性应力应变关系的探讨
六机部七〇二所 李业智
- 22 单向纤维增强复合材料的载荷集中因子和裂纹扩展统计理论
华南工学院 范赋群
- 23 二维裂纹体的弹性有限元解
科学院力学所 张晓堤
- 24 弹塑性力学的边界积分方程—边界元法
清华大学 姚振汉
- 25 幂规律强化材料的斜弯曲和偏心拉伸
天津大学 严宗达
- 26 变厚度锥壳极限分析的薄膜理论
长春光机学院 王长兴
- 27 扁球壳的塑性分析
清华大学 徐秉业
- 28 立式园柱壳受液压荷载的极限分析
华南工学院 范业立
- 29 平面应变条件下复合挤压的极限载荷
上海交通大学 金永杰 李康先
- 30 极材弯曲成型过程的弹塑性应力应变分析
重庆大学 陈如欣 许剑欧 邓立信
- 31 复杂应力场电测数据的塑性理论分析
大连工学院 周承倜
- 32 环向加肋园柱壳弹塑性稳定性试验研究
六机部七〇二所 王作玉
- 33 光塑性贴片的塑性理论分析
大连工学院 周承倜
- 34 轴对称变形强化护环残余应力与新工艺的研究
东北重型机械学院 刘助柏 郭会光 杨跃田 叶伟容
江跃宗

纤维复合材料在横向荷载下的应力集中论

合肥工业大学 蔡四维

提 要

单向加劲的纤维复合材料，在正交纤维方向的均布荷载作用下，基体内将出现超过外载强度的局部应力集中。最初有1963年J.C.Schulz^[1]提出的研究结果，认为这种应力、应变的集中值可以达到很高。1966年R.L.Foye^[2]用有限元素法得到的数值解，说明Schulz得到的数据，有夸大现象。1967年H.Schuerch^[3]提出均质平面弹性体（基体）中间具有一个弹性核（纤维）——以下称单核模型——的应力集中理论解；1978年L.C.Lee、H.D.Conway^[4]从基体中具有一群核的情况出发——以下称群核模型——得出了一系列的数值结果。从后面这两种模型理论结果来看，也可以得出Schulz应力集中系数过大的论断。

本文先扼要介绍Schulz、Schuerch、Lee—Conway的工作。在这些研究工作的基础上，作者提出评论，并建议一个作为一般计算的模型。

一、Schulz的工作

设纤维方向与 x_1 轴平行，如图1。Schulz取宽度等于一个纤维直径和两纤维间基体的薄片（如图的阴线部分。）来分析。假定横向荷载作用下，纤维内具有均匀的应力 σ_{f1} 、 σ_{f2} 、 τ_{f12} 及应变 ϵ_{f1} 、 ϵ_{f2} 、 γ_{f12} ，基体内具均匀应力 σ_{m1} 、 σ_{m2} 、 τ_{m12} 及应变 ϵ_{m1} 、 ϵ_{m2} 、 γ_{m12} 。见图2。命基体和纤维的弹性系数 E_m 、 μ_m 、 G_m 、 E_f 、 μ_f 、 G_f 。则：

$$\begin{aligned} E_f \epsilon_{f1} &= \sigma_{f1} - \mu_f \sigma_{f2}, \\ E_f \epsilon_{f2} &= \sigma_{f2} - \mu_f \sigma_{f1}, \\ \tau_{f12} &= \tau_{f21} = G_f \gamma_{f12}, \\ E_m \epsilon_{m1} &= \sigma_{m1} - \mu_m \sigma_{m2}, \\ E_m \epsilon_{m2} &= \sigma_{m2} - \mu_m \sigma_{m1}, \\ \tau_{m12} &= \tau_{m21} = G_m \gamma_{m12}. \end{aligned} \quad (1)$$

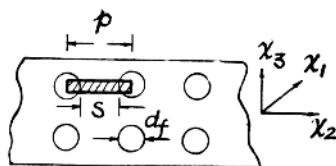


图 1

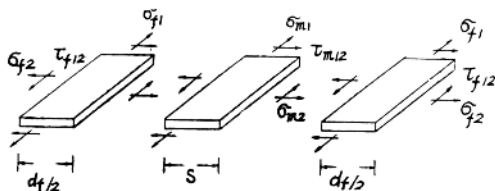


图 2

Schulz另设定有一均质片，它的尺度与上述计算薄片相同，这均质片具均匀应力 σ_{c1} 、 σ_{c2} 、 τ_{c12} ，应变 ε_{c1} 、 ε_{c2} 、 γ_{c12} 。他应用如下条件：

$$1. \quad \varepsilon_{c1} = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1},$$

$$2. \quad \varepsilon_{c2} = \frac{d_f \varepsilon_{f2} + S \varepsilon_{m2}}{p},$$

$$3. \quad r_{c12} = \frac{d_f r_{f12} + S r_{m12}}{p},$$

$$4. \quad \sigma_{c1} = \frac{d_f \sigma_{f1} + S \sigma_{m1}}{p}, \quad (2)$$

$$5. \quad \sigma_{c2} = \sigma_{f2} = \sigma_{m2},$$

$$6. \quad \tau_{c12} = \tau_{f12} = \tau_{m12}.$$

由此得到 $\varepsilon_{m1} = \varepsilon_{c1}$,

$$\varepsilon_{m2} = \frac{1}{\frac{d_f \cdot E_m}{p \cdot E_f} [(1 - \mu_f^2)/(1 - \mu_m^2)] + \frac{S}{p}} \cdot \left\{ \varepsilon_{c2} + \varepsilon_{c1} \frac{d_f}{p} \left(\mu_f - \mu_m \frac{1 - \mu_f^2}{1 - \mu_m^2} \cdot \frac{E_m}{E_f} \right) \right\}$$

$$r_{m12} = \frac{p r_{c12}}{S + d_f \frac{G_m}{G_f}}. \quad (3)$$

称 $\epsilon_{m1}/\epsilon_{c1}$ 、 $\epsilon_{m2}/\epsilon_{c2}$ 、 $\gamma_{m12}/\gamma_{c12}$ 叫应变集中系数。对某种玻璃钢 $E_m/E_f=1/20$, $G_m/G_f=1/17$, $\mu_f=0.3$, $\mu_m=0.4$ 。並取 $\epsilon_{c1}=\epsilon_{c2}$, 按 (3) 得应变集中系数绘出如图 3。根据纤维与整体体积比值 V_f 不同, 应变集中系数为 6~15。此外, 利用 (3) 按均质片应变表达出基体应力。将均质片在某种应变下相应的基体应力 σ_{m1} 与纯基体材料在同样应变状态下的应力 σ_{i0} 之比, 定义为应力集中系数。对上述玻璃钢应力集中系数绘出如图 4。不同纤维体积比时 σ_{m1}/σ_{i0} 从 2.5~5, σ_{m2}/σ_{i20} 、 τ_{m12}/τ_{i20} 从 5~12。

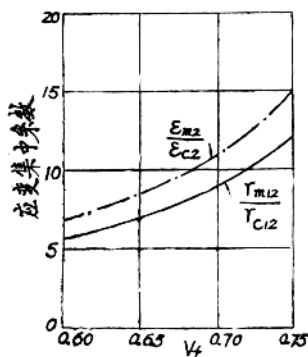


图 3

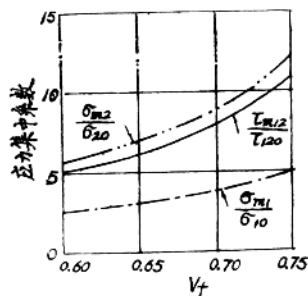


图 4

二、Schuerch 的工作

无限平面弹性体中央具有园核的情况。求平面体在无限远处具有均匀应力 S 时, 核内外的应力分布。如图 5。为满足 $\gamma \rightarrow \infty$ 时应力为有限值这条件而取用二维应力函数:

$$\phi = A \cdot \log \gamma + C_0 r^2 + (A_2 \gamma^2 + B_2 \gamma^4 + C_2 \frac{1}{r^2} + D_2) \cos 2\theta \quad (4)$$

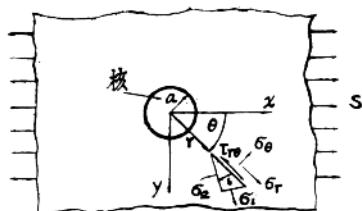


图 5

在核内及核外, 各有一组 $A_0 \dots D_2$ 由两者介面连续性条件、无限远处边介条件及核心应力为有限值等因素来决定它们。平面应力问题中引进:

$$K_1 = \frac{E_f(1-\mu_m) - E_m(1-\mu_f)}{E_f(1+\mu_m) + E_m(1-\mu_f)}, \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{K_f(1+\mu_m) - E_m(1+\mu_f)}{K_f(1-\mu_m) + E_m(1+\mu_f)}.$$

平面应变问题引进:

$$K_1 = \frac{E_f(1-2\mu_m)(1+\mu_m) - E_m(1-2\mu_f)(1+\mu_f)}{E_f(1+\mu_m) + E_m(1-2\mu_f)(1+\mu_f)}, \quad (6)$$

$$K_2 = \frac{E_f(1+\mu_m) - E_m(1+\mu_f)}{E_f(3-4\mu_m)(1+\mu_m) + E_m(1+\mu_f)}。$$

就得到如下的结果:

核内应力 ($r < a$):

$$\frac{\sigma_r}{S} = \frac{1}{2}(1+K_1) + \frac{1}{2}(1+K_2)\cos 2\theta, \\ \frac{\sigma_\theta}{S} = \frac{1}{2}(1+K_1) - \frac{1}{2}(1+K_2)\cos 2\theta, \quad (7)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{S} = -\frac{1}{2}(1+K_2)\sin 2\theta。$$

$$\text{平面应变问题 } \frac{\sigma_z}{S} = \mu_f(1+K_1)。 \quad (8)$$

基体应力 ($r > a$):

$$\frac{\sigma_r}{S} = \frac{1}{2}(1+K_1\frac{a^2}{r^2}) + \frac{1}{2}\left[1-K_2\left(3\frac{a^4}{r^4}-4\frac{a^2}{r^2}\right)\right]\cos 2\theta, \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{S} = \frac{1}{2}\left(1-K_1\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\left[1-3K_2\frac{a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{S} = -\frac{1}{2}\left[1+K_2\left(3\frac{a^4}{r^4}-2\frac{a^2}{r^2}\right)\right]\sin 2\theta。$$

$$\text{平面应变问题 } \frac{\sigma_z}{S} = \mu_m(1+2K_2\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta)。 \quad (10)$$

核内主应力 ($r < a$):

$$\frac{\sigma_1}{S} = 1 + \frac{1}{2}(K_1+K_2), \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_2}{S} = \frac{1}{2}(K_1+K_2)。$$

$$\text{主应力方向由 } \tan 2\delta = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta} \text{ 得 } \delta = -\theta。 \quad (12)$$

基体内主应力 ($r > a$):

$$\frac{\sigma_1}{S} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} (2K_2 \cos 2\theta + K_1 \cos 2\delta) + \left[1 - K_2 \left(3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \right\}.$$

$$\cos 2\theta \cos 2\delta - \left[1 + K_2 \left(3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \sin 2\theta \sin 2\delta \Big\}, \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_2}{S} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} (2K_2 \cos 2\theta - K_1 \cos 2\delta) - \left[1 - K_2 \left(3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \right\}.$$

$$\cos 2\theta \cos 2\delta + \left[1 + K_2 \left(3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \sin 2\theta \sin 2\delta \Big\},$$

$$\tan 2\delta = - \frac{\left\{ 1 + K_2 \left[3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right] \right\} \sin 2\theta}{\left\{ 1 - K_2 \left[3 \frac{a^4}{r^4} - 2 \frac{a^2}{r^2} \right] \right\} \cos 2\theta + K_1 \frac{a^2}{r^2}}. \quad (14)$$

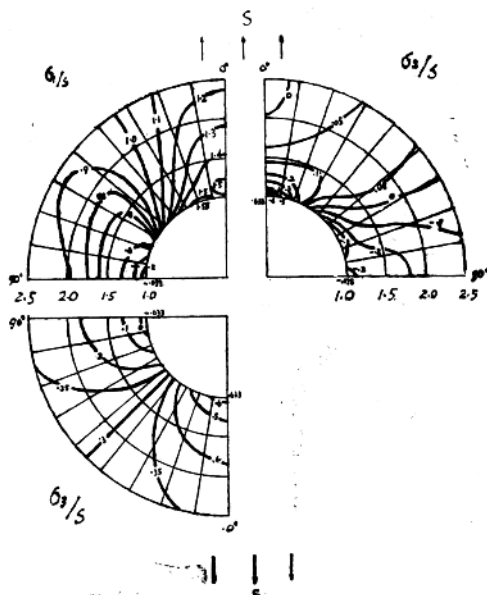


图 6

利用上述算式，绘出平面应变状态下基体应力分布图如图6—图8。图6是刚性核而基体 $\mu_m = 0.3$ 的结果。图7是 $E_t = 0$ 即具圆孔的情况， μ_m 仍为 0.3。图8是 $E_m = E_t$ 、 $\mu_t = 0$ 、 $\mu_m = 0.5$ 的情况。从图见孔口情况最大应力集中系数（主应力）是 $\frac{\sigma_1}{S} = 3$ 。刚核情况其值 1.55。 $E_t = E_m$ 的情况其值 1.14。将平面应变问题 E_t/E_m 具各种值而 $\mu_m = \mu_t = 0.3$ 时核与基体接面处应力集中系数变化绘出如图 9。

从这些见到用单核模型所得结果来近似分析纤维复合材料（属群核情况）的横向荷载应力集中情况时，则基体最大应力集中系数决不应大于 3。当然还要论证群核之间的影响。

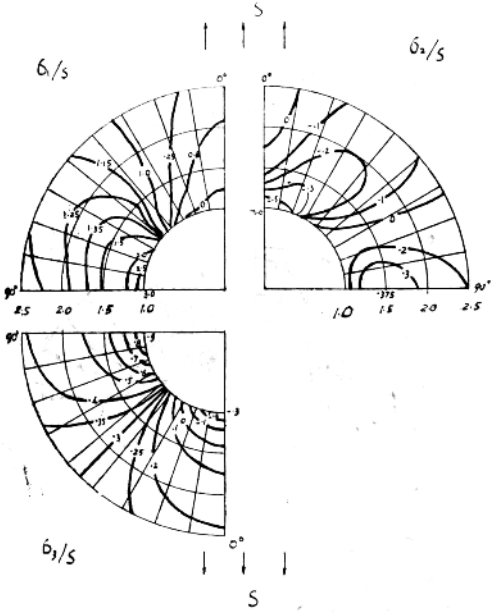


图 7

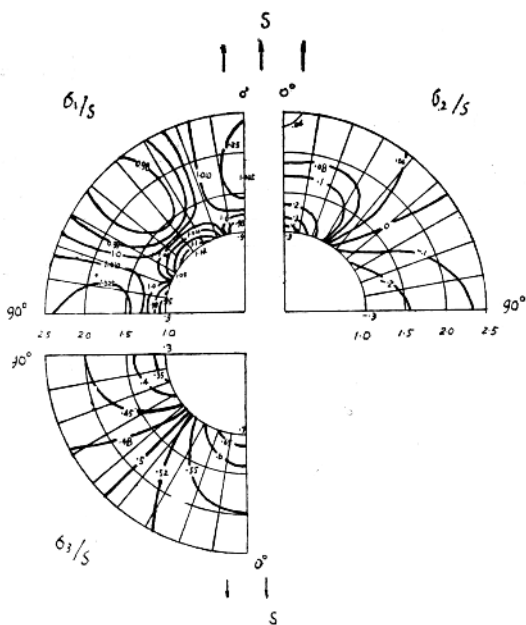


图 8

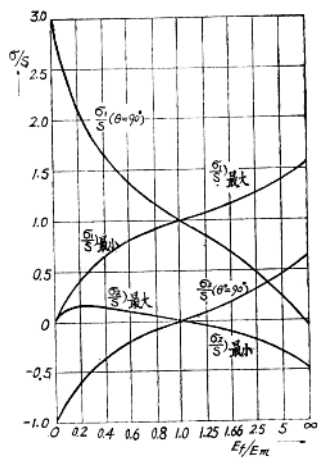


图 9

三、园核群与 Lee, Conway 的工作。

文献[4]就复合体横断面上园核群按矩形或三角形排列时,按平面弹性理论的复变函数解法求出了一系结果。兹以矩形排列的情况为例说明他们的方法和结论。取用复平面 $z = x + iy$, 如图10。平面体无限远处荷载是 σ_{xx} 、 σ_{yy} 。

由于断面所具有的对称性,一点沿 x 、 y 轴向的位移 u 、 v 有如下关系:

$$u(z) = u(\bar{z}) = -u(-\bar{z}),$$

$$v(z) = -v(\bar{z}) = v(-\bar{z}).$$

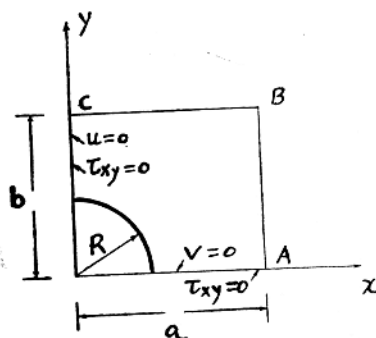
这就给出如下条件:

$$x=0 \text{ 轴上} \quad u=0, \tau_{xy}=0.$$

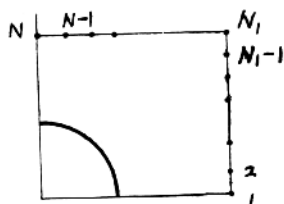
(15)

$$y=0 \text{ 轴上} \quad v=0, \tau_{xy}=0.$$

而全部计算只需取 $\frac{1}{4}$ 单元来进行, 如图11。



(a)



(b)

图 11

为满足(15)可取,

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^l a_k z^{2k-2}, \psi_1(z) = \sum_{k=1}^m a'_k z^{2k-2}. \quad (16)$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=-n}^r b_k z^{2k}, \psi_2(z) = \sum_{k=-s}^t b'_k z^{2k}. \quad (17)$$

其中 a, a', b, b' 是未定常数。 l, m, n, r, s, t 是任意整数。在单连域 $|z| \leq R$ 内, $\Phi_1(z), \psi_1(z)$ 是正则函数。在复连域 $|z| \geq R, |x| \leq a, |y| \leq b$ 内, $\Phi_2(z), \psi_2(z)$ 是正则函数。

假定核和基体之间是完全粘着的。则 $|z| = R$ 处有应力连续条件:

$$(\sigma_r - i\tau_r)_1 = (\sigma_r - i\tau_r)_2 \quad (18)$$

下标 1、2 分别表明为属核和基体的有关量。以 (16)、(17) 函数表达应力, (18) 作:

$$\begin{aligned} & \{ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{i2\theta} [\overline{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] \}_1 \\ &= \{ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{i2\theta} [\overline{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] \}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

将 $z = Re^{i\theta}$ 代入并比较 $e^{i2k\theta}$ 项系数得:

$$2a_1 = 2b_0 - R^{-2}b'_{-1}. \quad (20)$$

$$(1-2K)a_{k+1} - R^{-2}a'_k = (1-2K)b_k + R^{-4k}b_{-k} - R^{-2}b'_{k-1}, \quad K \geq 1,$$

$$R^{4k}a_{k+1} = (1+2k)b_{-k} + R^{4k}b_{-k} - R^{-2}b'_{-(k+1)}, \quad K \geq 1$$

此外, 在 $|z| = R$ 处还有位移连续条件:

$$(u+iv)_1 = (u+iv)_2 \quad (21)$$

平面应变问题有 $2G(u+iv) = h\phi(z) - \overline{z\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}$.

其中 $\phi(z) = \int \dot{\phi}(z) dz, \psi(z) = \int \dot{\psi}(z) dz, h = 3-4\nu, G$ 是材料的剪切模量。由 (16)、(17)、

(21) 又给出:

$$(h_1-1)G_2Ra_1 = (h_2-1)G_1Rb_0 + G_1R^{-1}b_{-1}',$$

$$R^{4k}a_{k+1} = \frac{G_1h_2}{G_2h_1}R^{4k}b_k - (2k+1)\frac{G_1}{G_2h_1}b_{-k} + \frac{G_1}{G_2h_1}R^{-2}b'_{-(k+1)}, \quad K \geq 1,$$

$$\begin{aligned} (1-2k)a_{k+1} - a^{-2}a'_k &= -\frac{G_1h_2}{G_2}R^{-4k}b_{-k} + \frac{G_1}{G_2}(1+2k)b_k \\ &\quad - \frac{G_1}{G_2}R^{-2}b'_{k-1}, \quad K \geq 1. \end{aligned} \quad (22)$$

从(20)、(22)可解出以 b_k 表 b'_k :

$$b'_{k-1} = S_1 b_0,$$

$$b'_{-(k+1)} = R^2(1+2K)b_{-k} + S_2 R^{k+2}b_1, \quad K \geq 1, \quad (23)$$

$$b'_{k-1} = R^2(1-2K)b_k + S_3 R^{2-k}b_{-k}, \quad K \geq 1.$$

其中
$$S_1 = \frac{2R^2[(h_1-1)G_{21} - (h_2-1)]}{2 + (h_2-1)G_{21}},$$

$$S_2 = \frac{G_{21}h_1 - h^2}{G_{21}h_1 + 1},$$

(24)

$$S_3 = \frac{G_{21} + h_2}{G_{21} - 1},$$

$$G_{21} = G_2/G_1.$$

于是决定了 b_k 之后, 就可以得到 b'_k , 再从(20)、(22)到 a_{k1} 、 a'_k 。然后按常规求出应力。

求 b_k 时, 按 $K = -q \sim p$ 先求出基体内各项应力、位移以 b_k 表达的式子, 它们是:

$$\tau_{xy})_2 = \text{Im}[\bar{z} \phi_2'(z) + \psi_2(z)] = \sum_{k=-q}^p D_k b_k, \quad (25)$$

$$\sigma_x)_2 = \text{Re}[\phi_2(z) + \overline{\phi_2(z)} - \bar{z} \phi_2'(z) - \psi_2(z)] = \sum_{k=-q}^p E_k b_k,$$

$$\sigma_y)_2 = \text{Re}[\phi_2(z) + \overline{\phi_2(z)} + \bar{z} \phi_2'(z) + \psi_2(z)] = \sum_{k=-q}^p F_k b_k,$$

$$2G_m u_2 = \text{Re}[h_2 \phi_2(z) - \bar{z} \overline{\phi_2(z)} - \psi_2(z)] = \sum_{k=-q}^p G_k b_k,$$

$$2G_m v_2 = \text{Im}[h_2 \phi_2(z) - \bar{z} \overline{\phi_2(z)} - \psi_2(z)] = \sum_{k=-q}^p H_k b_k.$$

其中 $D_k = \text{Im}[S_1 z^{-2}],$

$$K = 0$$

$$\text{Im}[DC1_k],$$

$$-q \geq K \leq -1.$$

$$\text{Im}[DC2_k],$$

$$1 \leq K \leq p.$$

$$E_k = \text{Re}[2 - S_1 z^{-2}],$$

$$K = 0.$$

$$\text{Re}[2z^{2k} - DC1_k],$$

$$-q \leq K \leq -1.$$

$$\text{Re}[2z^{2k} - DC2_k],$$

$$1 \leq K \leq p.$$

$$F_k = \text{Re}[2 + S_1 z^{-2}],$$

$$K = 0.$$

(26)

$$\operatorname{Re}[2z^{2k} + DCl_k], \quad -q \leq k \leq -1.$$

$$\operatorname{Re}[2z^{2k} + DC2_k], \quad 1 \leq k \leq p.$$

$$G = \operatorname{Re}[h_2 z - z + S_1 z^{-1}], \quad K = 0.$$

$$\operatorname{Re}[GCl_k], \quad -q \leq K \leq -1.$$

$$\operatorname{Re}[GC2_k], \quad 1 \leq K \leq p.$$

$$H_k = \operatorname{Im}[h_2 z - z + S_1 z^{-1}], \quad K = 0.$$

$$\operatorname{Im}[GCl_k], \quad -q \leq k \leq -1.$$

$$\operatorname{Im}[GC2_k], \quad 1 \leq K \leq p.$$

$$DC1_k = 2k z z^{2k-1} + S_2 R^{2(2k+1)} z^{-(2k+2)} - R^2(2k-1)z^{2k-2},$$

$$DC2_k = 2k \bar{z} z^{2k-1} + S_2 R^{2(2k+1)} \bar{z}^{-(2k+2)} - R^2(2k-1)z^{2k-2},$$

$$GCl_k = \frac{h_2}{2k+1} z^{2k+1} - z \bar{z}^{2k} + R^2 \bar{z}^{2k-1} + \frac{S_2}{2k+1} R^{2(2k+1)} \bar{z}^{-(2k+1)},$$

$$GC2_k = \frac{h_2}{2k+1} z^{2k+1} - z \bar{z}^{2k} + R^2 \bar{z}^{2k-1} + \frac{S_2}{2k+1} R^{2(2k+1)} \bar{z}^{-(2k+1)}.$$

之后考虑AB、BC边(图11)的边介条件:

$$\text{AB或BC边:} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (27)$$

$$\text{AB边:} \quad u = d_1 \quad (28)$$

$$\text{BC边:} \quad V = d_2$$

d_1 、 d_2 是未知常量, 应使AB、BC边上的平均法向应力分别等于 $\sigma_{x\infty}$ 、 $\sigma_{y\infty}$ 这条件来决定。文献[4]对处理条件(27)、(28)采取了一种放松的办法, 即不要求全边介满足(27)、(28)而仅使这条件在边介的有限个点上得到满足。这即是所谓“Point Matching”法。如图11(b), 在AB、BC边上取1、2、... N_1-1 、 N_1 、... $N-1$ 、 N 诸点, 既知点的坐标 z_i , 就可以算出这点的 $D_k(z_i)$ 、 $G_k(z_i)$ 、 $H_k(z_i)$ 按(27)、(28)而列出如下的方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-q}^p D_k(z_i) b_k &= 0, & 2 \leq i \leq N-1. \\ \sum_{k=-q}^p G_k(z_i) b_k &= d_1, & 1 \leq i \leq N_1. \\ \sum_{k=-q}^p H_k(z_i) b_k &= d_2, & N_1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (29)$$

(29)中未知数 b_k 共 $p+q+1$ 个, 方程个数 $2N-1$ 。可按精度要求定出 p 、 q 、 N 的数值, 使方程个数等于未知数个数而能解出 b_k 。注意(29)中 d_1 、 d_2 也属未知, 文献[4]计算时是分别取,

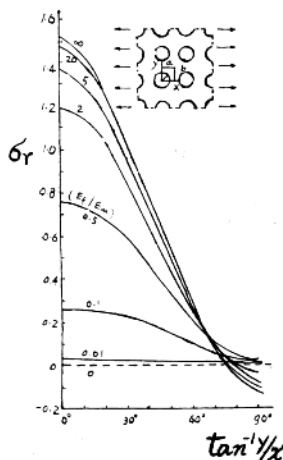
$=1, d_2=0$ 得一组解 b_{K1} ,

$d_2=1, d_1=0$ 得另一组解 b_{K2} 。

令计算对应于这两组解的AB、BC边平均法向应力 $\sigma_{x=1}, \sigma_{y=1}, \sigma_{x=2}, \sigma_{y=2}$ 。显然, 对应于实际 $\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}$ 作用下的 b_K 是:

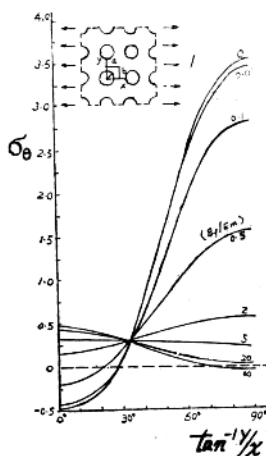
$$b_K = \frac{\sigma_{x\infty}\sigma_{y=2} - \sigma_{y\infty}\sigma_{x=2}}{\sigma_{x=1}\sigma_{y=2} - \sigma_{x=2}\sigma_{y=1}} b_{K1} + \frac{\sigma_{y\infty}\sigma_{x=1} - \sigma_{x\infty}\sigma_{y=1}}{\sigma_{x=1}\sigma_{y=2} - \sigma_{x=2}\sigma_{y=1}} b_{K2} \quad (30)$$

$a=b=1.7$



(a)

$a=b=1.7$

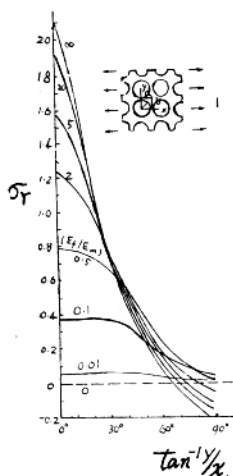


(b)

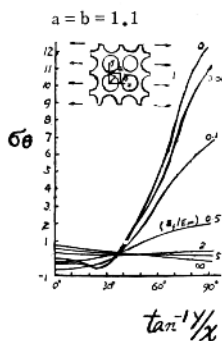
图 12

从文献[4]得出 $R=1, a=b=1.7$ 及 $R=1, a=b=1.1$ 时不同 E_f/E_m 下核与基体界面上的法向和环向应力变化如图12, 这是核群按矩形排列的情况。图13则是核群按三角形排列时的计算结果。这些计算都取用 $\mu_f = \mu_m = 0.3$ 。

$$a=b=1.1$$

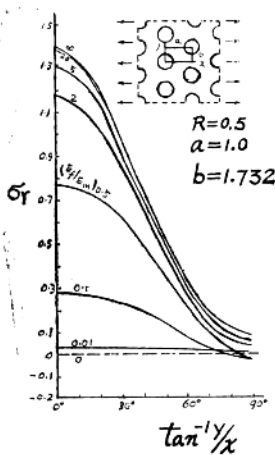


(c)

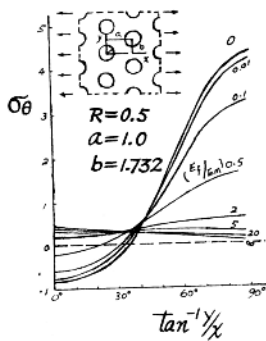


(d)

图 12



(a)



(b)

图 13