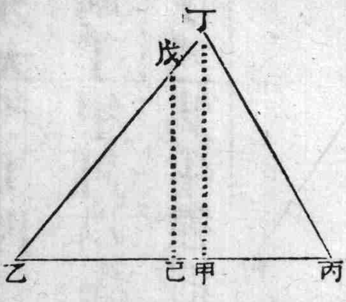
平三角舉要

平三角舉要卷四

或問三角大意首卷略具而入算仍有疑端同學好問事事必求其所以然故不憚爲之詳複以暢厥旨

問各角正弦與各邊皆不平行何以能相爲比例曰凡三角形一邊必對一角其角大者正弦大而所對之邊亦大角小者正弦小而所對之邊亦小故邊與邊之比例如正弦與正弦也

兩正弦爲兩邊比例圖

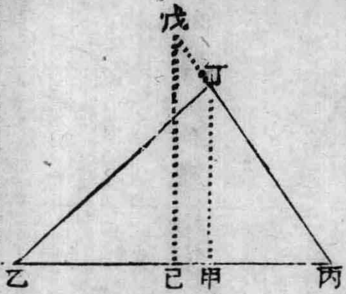


乙丙丁三角形丁乙邊大對丙角丁丙邊小對乙角術爲以丁乙邊比丁丙邊若丙角之正弦與乙角之正弦

解曰試以丁丙爲半徑作丁甲線爲丙角正弦又截戊乙如丁

丙半徑作戊己線爲乙角正弦丁甲正弦大于戊己故丁乙邊亦大于丁丙

問丁甲何以獨爲丙角正弦也曰此以丁丙爲半徑故也若以丁乙爲半徑則丁甲即爲乙角之正弦

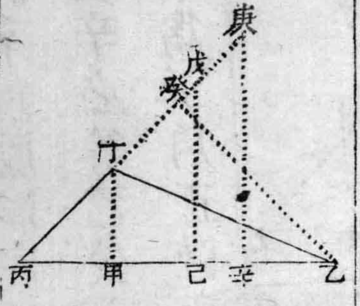


如圖用丁乙爲半徑作丁甲線爲乙角正弦又引丙丁至戊令戊丙如丁乙半徑作戊己線爲丙角正弦即見乙角之正弦丁甲小于戊己故丁丙邊亦小于丁乙

解曰正弦者半徑所生也故必兩半徑齊同始可以較其大小前圖截戊乙如丁丙此圖引丁丙如丁乙所以同之也

三正弦遞相為三邊比例圖

乙丁丙鈍角形丁鈍角對乙丙大邊丙次大角對乙丁次大邊乙小角對丁丙小邊其各邊比例皆各角正弦之比例

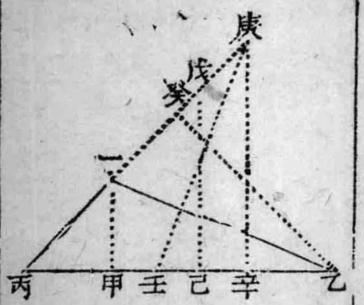


試以乙丁為半徑作丁甲線為乙小角之正弦又引丙丁邊至戊使戊丙如乙丁作戊己線為丙角之正弦又展戊丙線至庚使庚丙如乙丙作庚辛線為丁鈍角之正弦如此則三邊皆若弦三正弦皆若股

其比例為以乙丙大邊同庚丙比乙丁次邊同戊丙若丁鈍角之正弦庚辛與丙角之正弦戊己又以乙丁次大邊同戊丙比丁丙小邊若丙角之正弦戊己與乙角之正弦丁甲又以丁丙小邊比

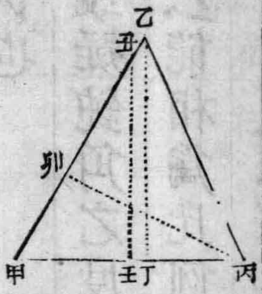
乙丙大邊同庚丙若乙小角之正弦丁甲與丁鈍角之正弦庚辛

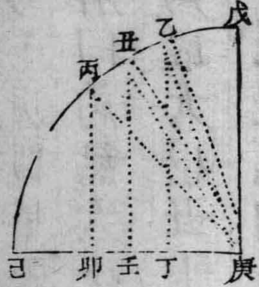
問庚辛何以爲丁角正弦曰鈍角以外角之正弦爲正弦試作乙癸線爲丁角正弦乙丁癸外角也故其正弦即丁鈍角正弦必與庚辛等何也庚丙辛句股形與乙丙癸形等庚丙弦既同乙丙又同用丙角辛與癸又同爲方角其形必等則庚辛必等乙癸而乙癸既丁角正弦矣等乙癸之庚辛又安得不爲丁角正弦乎凡取正弦必齊其半徑此以丁甲爲乙角正弦是用乙丁爲半徑也而取丙角正弦戊己必引戊丙如乙丁其丁角正弦庚辛又即外角之正弦乙癸是三半徑皆乙丁也



試取壬丙如丁丙作庚壬線即同乙丁半徑則壬角同丁角壬外角即丁外角而庚辛正弦之半徑仍爲乙丁庚壬同乙丁故

如右圖以庚壬當乙丁易乙丁丙形爲庚壬丙則庚辛正弦亦歸本位與前圖互明





試以各角正弦同居一象限較其弧度

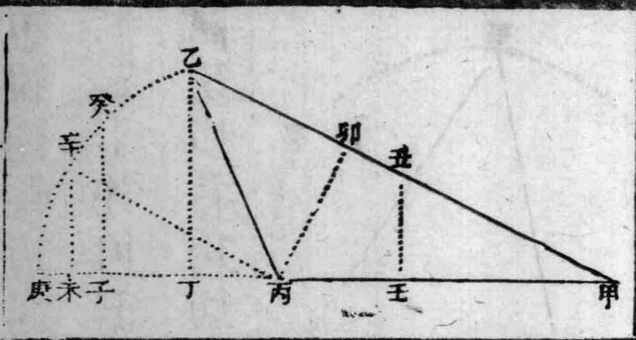
如圖甲乙丙形丙角最大其正弦乙丁亦最大所對甲乙邊亦最大甲角次大其正弦丑壬亦次大所對乙丙邊亦次大乙角最小其正弦丙卯亦最小所對丙甲邊亦最小丙乙二角正弦並乙丙爲半徑甲角取正弦截丑甲如乙丙亦以乙丙爲半徑乃別作一象弧如戊己仍用乙丙爲半徑取戊庚如乙丙而以先所得各角之餘弦取度于丁作乙丁爲丙角之正弦于壬作丑壬爲甲角之正

弦于卯作丙卯爲乙角之正弦卽各如原度而各角之差數覩矣戊庚半徑既同乙丙則丁庚卽丁丙而爲丙角餘弦又壬庚卽甲壬爲甲角餘弦卯庚卽卯乙爲乙角餘弦

解曰角無大小以弧而知其大小今乙丁正弦其弧乙己是丙角最大也丑壬正弦其弧丑己是甲角次大也丙卯正弦其弧丙己是乙角最小也而對邊之大小亦如之故皆以正弦爲比例也

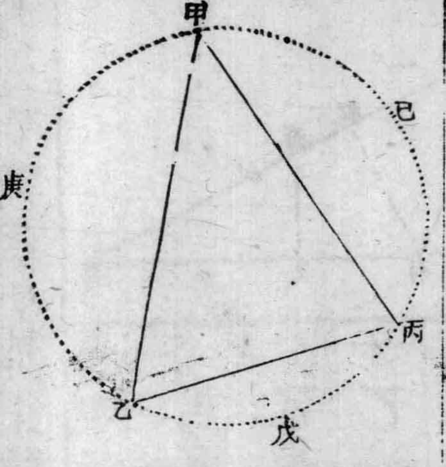
或疑鈍角之度益大其正弦反漸小而其所對之邊則漸大何以能相爲比例乎曰此易知也凡鈍角正弦卽外角之正弦而外角度原兼有餘兩角之度故鈍角之正弦必大于餘兩角而得爲大邊之比例也

如乙丙甲鈍角形丙鈍角最大其正弦乙丁亦最大而所對乙甲邊亦最大乙角次大其正弦丙卯亦次大而所對甲丙邊亦次大甲角最小其正弦丑壬亦最小而所對乙丙邊亦最小截甲丑如乙丙從丑作丑壬即甲角正弦乃從乙作乙庚弧以丙為心乙丙為半徑為丙外角之度又作辛丙半徑與甲乙平行分乙庚弧度為兩則辛庚即甲角之弧度其餘辛乙亦即乙角之弧度從辛作辛未正弦與丑壬等又自庚截癸庚度如辛乙則癸庚亦乙角之弧作癸子正弦與丙卯等此顯丙外角之度兼有乙甲兩角之度其正弦必大于兩角正弦



也雖丙鈍角加大而外角加小則乙甲兩角必又小于外角又何疑于鈍角正弦必爲大邊比例乎

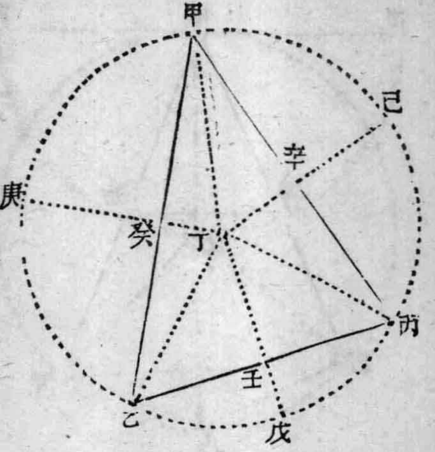
試更以各角切員觀之則各角之對邊皆爲其對弧之通弦



如圖三角形以各角切員則乙丙邊爲丙戊乙弧之通弦而對甲角甲丙邊爲丙己甲弧之通弦而對乙角甲乙邊爲乙庚甲弧之通弦而對丙角則是各角之對邊即各角對弧之通弦也夫通弦者正弦之倍數則三邊比例即三正弦之比例矣

又試以各邊平分之則皆成各角之正弦

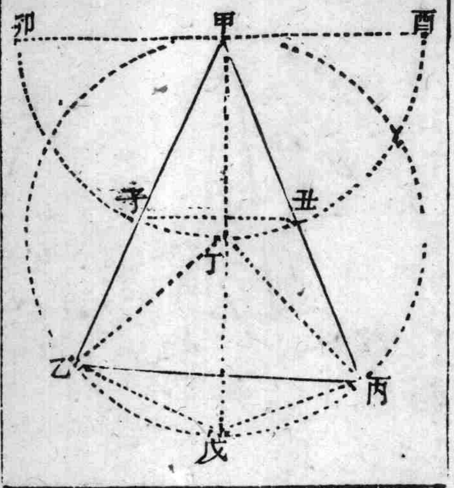
于前圖內更以各邊所當之弧皆平分之丙戊乙弧平分于戊點丙己甲弧平分于己點乙庚甲弧平分于庚點自員心丁各作半徑至其點即分各邊爲兩平分以丁壬戊半徑分乙丙邊于壬以丁辛己半徑分甲丙邊于辛以丁癸庚半徑分甲乙邊于癸則所分之邊皆爲兩平分則弧之平分者即原設各角之度而邊之平分者即皆各角之正弦丙丁



戊角以丙戊爲弧丙壬爲正弦而丙丁戊角原爲丙丁乙角之半必與甲角同大故丙戊半弧即甲角之本度丙壬半邊即甲角之正弦乙丁戊角亦然準此論之則甲丁己角原爲甲丁丙角之半必與乙角同大故甲己半弧即乙角之本度甲辛半邊即乙角之正弦己丁丙角亦然又乙丁庚角原爲乙丁甲角之半必與丙角同大故乙庚半弧即丙角之本度乙癸半邊即丙角之正弦庚丁甲角亦然夫分其邊之半即皆成正弦則邊與邊之比例亦

必如正弦與正弦矣全與全若半與半也

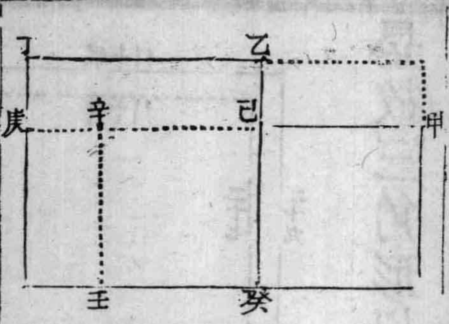
問三角之本度皆用半弧何也曰量角度必以角爲圓心員度乃見今三角皆切員邊則所作通弦之弧皆倍度也故半之乃爲角之本度



如圖以甲角爲心甲丁爲半徑作員則其弧丑丁子乃甲角之本度也而平分之丙戊及戊乙兩弧並與丑丁子弧等試作戊丙及乙戊兩弦必相等又並與丑子弦等凡弦等者弧亦等故乙戊丙弧必爲甲角之倍度餘角類推

問三邊求角何以用和較相乘也曰欲明和較之用當先知和

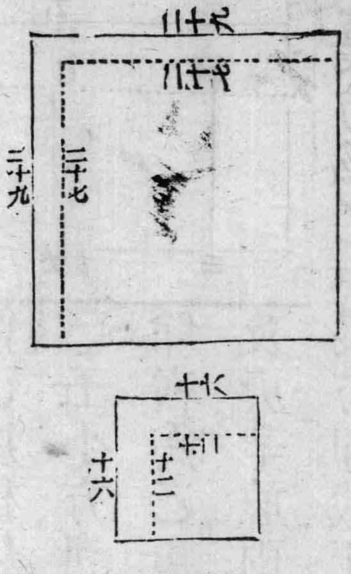
較之根凡大小兩方以其邊相併謂之和相減謂之較和較相乘者兩方相減之餘積也



如圖甲癸小方丁癸大方于大方內依小方邊作己庚橫線又取己辛如小方邊作辛壬線成己壬小方與甲癸等大方內減己壬小方則賸餘者爲乙庚及庚壬兩長方形夫乙己及丁庚及庚辛並兩邊之較也甲己庚則和也若移庚

壬長方爲乙甲長方卽成丁甲大長方而爲較乘和之積故凡兩方相減之餘積爲實以和除之得較以較除之亦得和矣依此論之若有兩方形相減又別有兩方相減而其餘積等則

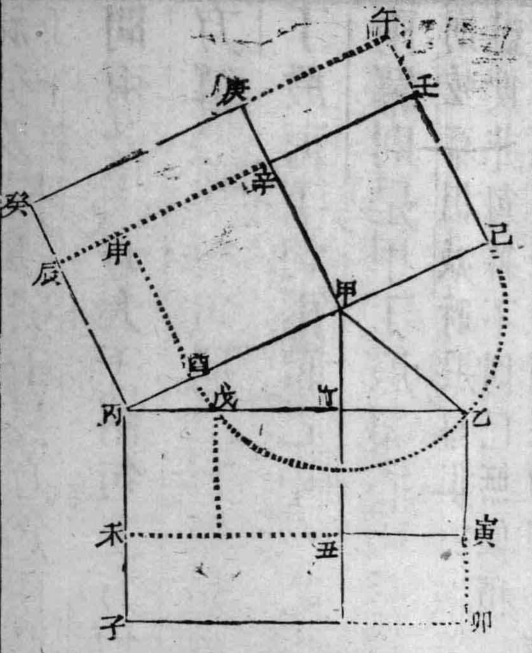
爲公積故以此兩方之和較相乘爲實而以彼兩方之和爲法
除之得彼兩方之較或以彼兩方之較爲法除之亦必得和



如圖有方二十九之冪八百四十一與方二十七之冪七百二十九相減成較二乘和五十六之積又有方十六之冪二百五十六與方十二之冪一百四十四相減成較四乘和二十八之積兩積同爲一百一十二故以先有之較二和五十六相乘爲實以今有之和二十八爲法除之即得較四爲今所求數

是故三角形以兩弦之和乘較爲實以兩分底之和爲法除之得較者爲兩和較相乘同積也兩和較相乘同積者各兩方相減同積也

何以明之曰凡三角形以中長線分爲兩句股則兩形同以中長線爲股而各以分底線爲句是股同而句不同也句不同者弦不同也弦大者句亦大弦小者句亦小故兩弦上方相減必與兩句上方相減之餘積等而兩和較相乘亦等



如圖甲乙丙三角形以甲丁中長線分爲兩句股形則丙乙爲兩句之和未寅及子卯並同丙戊爲兩句之較未子及寅卯並同未卯長方爲兩句之較乘和也又丙己爲兩弦之和辰壬同酉丙爲兩弦之較

辰癸及辛庚壬午並同癸壬長方爲兩弦之較乘和也此兩長方必等積

問兩弦上方大于兩句上方何以知其等積曰依句股法弦上方冪必兼有句股上方冪是故甲丙弦冪內即癸甲大方必兼有甲丁股丙丁句兩冪乙甲弦冪內即辛己小方亦兼有甲丁股乙丁句兩冪則是甲丁股冪者兩弦冪所同也其不同者句冪耳股冪既同則弦冪相減時股冪俱對減而盡使非句冪不同已無餘積然則兩弦冪相減之餘積于癸甲大方內減己辛相同之申甲小方所餘者癸辛申丙兩長方成磬折形豈不即爲兩句冪相減之餘積乎于丁子方內減丁寅相同之戊丑小方所餘者丑子及戊未兩長方成磬折形由是言之兩和較相乘之等積信矣于弦冪相減之癸辛申丙磬折形內移申丙補庚壬即成和較相乘之癸壬長方又于句冪相減之丑子未戊磬折形內移戊未補丑卯即成和較相乘之未卯長方兩磬折形既等積則兩長方亦等積

問和較之列四率與諸例不同何也曰此互視法也同文算指謂之變測古九章謂之同乘異除乃三率之別調也何則凡異乘同除皆以原有兩率之比例爲今兩率之比例其首率爲法必在原有兩率之中互視之術則反以原有之兩率爲二爲三以自相乘爲實其首率爲法者反係今有之率與異乘同除之序相反故曰別調也

然則又何以仍列四率曰以相乘同實也三率之術一三相乘與一四相乘同實故可以三率求一率二三相乘以一除之得四以四除之即仍得一若一四相乘以二除之亦可得三以三除之亦仍得二互視之術以原有之兩率自相乘與今有之兩率自相乘同實故亦以三率求一率原兩率自相乘以今有之

率除之得今有之餘一率若今兩率自相乘以原有之率除之亦即得原有之餘一率但三率之術以比

例成其同實互視之術則以同實而成其比例既成比例即有

四率故可以列而求之也

如圖長方形對角斜剖成兩句股則相等而其中所成小句股亦相等甲壬戊與甲己戊等則甲乙丙與甲辛丙等丙丁戊與丙庚戊等並長方均剖故也即所于甲壬戊句股形內減相等之甲乙丙及丙丁戊兩小句股存乙丙丁壬長方

成長方之積亦必相等

又于甲己戊句股形內減相等之甲辛丙及丙庚戊兩小句股存辛己庚丙長方所減之數等則所存之數亦等故兩長方雖長濶不同知其必為等積

今以甲乙為首率乙丙為次率丙丁為三率丁戊

為四率則乙丁長方即乙丙丁壬形為一二三相乘之積此形以乙丙二率為濶丙丁三