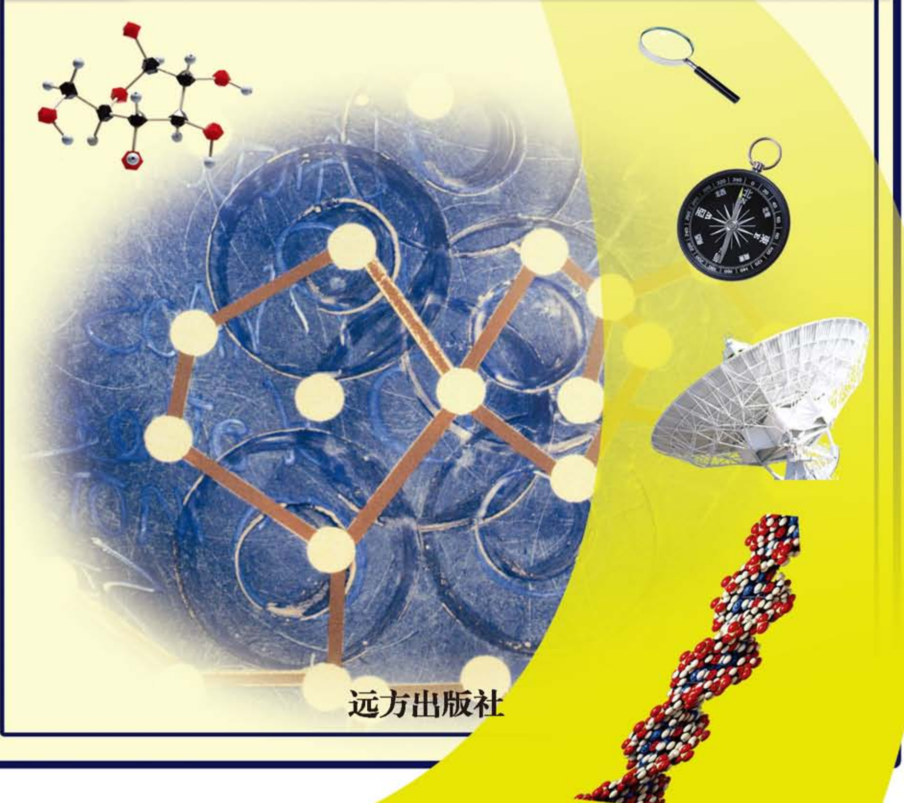
科学新知丛书
KE XUE XIN ZHI CONG SHU

09

KE XUE XIN ZHI CONG SHU

张洪达 著

有趣的最值趣引



远方出版社

科学新知丛书　09

有趣的最值趣引

张洪达　著

远方出版社

图书在版编目(CIP)数据

有趣的最值趣引/张洪达著. －呼和浩特: 远方出版社, 2007.3

(科学新知丛书)

ISBN 978－7－80723－096－0

Ⅰ.有…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数值－普及读物　Ⅳ.O241－49

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第032569号

科学新知丛书

有趣的最值趣引

著　　者	张洪达
出　　版	远方出版社
社　　址	呼和浩特市乌兰察布东路666号
邮　　编	010010
经　　销	新华书店
印　　刷	华北石油廊坊华星印刷厂
版　　次	2007年3月第1版
印　　次	2007年3月第1次印刷
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	135
字　　数	2000千
印　　数	3000
标准书号	ISBN 978－7－80723－096－0
总 定 价	336.00元(共20册)

内容简介

本书从日常生活中遇到的有趣的实际问题入手，向读者较系统地介绍了初等数学中解决最值问题常用的基础知识、基本理论与方法，引导大家在通往数学王国的征途中，鉴赏一道亮丽的风景线。通过阅读这些知识，能使你视野开阔、思路拓宽、知识增长、思维灵活，受到数学美的感染，你会对数学产生兴趣，对数学更加理解。

本书是为初中学生编写的数学科普读物，除供广大中学生阅读之外，还可作为中学数学课外活动的参考教材，供数学教育工作者使用。

编写说明

未来的时代航船已经启动!

《科学新知丛书》是作者们怀着美好的祝愿和殷切的期望,献给未来的主人——广大青少年的一份珍贵礼品。

青少年朋友们,你们生活在一个科学技术高度发达、科技革命蓬勃兴起的时代。现代科学技术发展的速度之快、规模之大、对人类社会影响之深,都是过去任何时代所无法比拟的。作为未来社会的建设者和主人,要想胜任驾驭时代航船的重任,就必须把自己培养成掌握丰富科学文化的创造型人才。

“才以学为本”,学而有进,不学则退。文化科学素质的提高是以科学知识的学习为重要前提和阶梯的,自然科学知识是创造型人才优化知识结构中极其重要的组成部分。我们希望广大青少年能够在知识的海洋中畅游,去采撷知识的浪花。

《科学新知丛书》是针对青少年增长知识、发展智力的需要,在中学生已有课内自然科学知识的基础上加以

拓宽和延伸，广泛吸收天文学、地理学、数学、物理学、化学、生物学、计算机科学和当代各种高科技发展的新成果而精心编写的一套综合性课外读物，旨在以高密度的基础性、前沿性和前瞻性的科技知识武装青少年的头脑，使广大青少年紧跟现代科学技术发展的步伐，综合地、整体地了解当代科学技术的主要成就和发展水平，为青少年的智力发展和科学文化素质的提高，铺垫深厚的知识功底，培养热爱大自然和自然科学的科学意识，激励好奇心、惊奇感、探索欲望和创新精神，学习科学思想和科学方法，培养创新思维和创新能力，以达到开阔视野、活跃思想、增长才干、发展智慧的目的。

《科学新知丛书》内容丰富，题材新颖，图文并茂，形式活泼，文字生动流畅，论述通俗易懂，有很强的可读性，是一套科学性、思想性、趣味性高度统一的精品科普读物。我们希望这套丛书成为青少年成长途径中的良师益友，帮助青少年朋友“站在巨人的肩上”，迅速成长为适应时代需要的杰出人才。

愿你们驾驭着时代的航船，频频闪射出科学创造的眩目光辉!

前　言

●张洪达

翻开这本书的篇目,映入眼帘的有这样的问题:

卫星接收站设在哪儿最好?

动植物具有选择最短路线的本领吗?

在给定的条件下,如何求正数幂的乘积的最大值?

怎样创造最大的经济价值?

为什么正多面体最多只有 5 种?

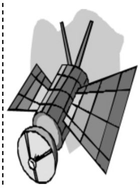
n 个平面最多可将整个空间分成多少份? ……

对这些问题你一定会感到新奇、有疑、有趣、有用,或许你会动脑思考、动手算算。这类问题就是最大值、最小值问题。只要你熟悉中学数学课程,运用观察、比较、分析、综合、归纳、类比等,精巧地构思,大胆地猜测,正确严谨地推理,你就能解决很多有趣的最值问题,品尝到攻克难题后的成功喜悦。在解决问题的过程中,你会发现你的理解能力、分析问题和解决问题能力有一定的提高,课本知识巩固了,知识领域开拓了,数学的素质

增强了,学习数学的兴趣更浓了,把学习数学已经当成是快乐的事情了……从这个意义上说,《有趣的最值趣引》正是启迪大脑的“思维体操”,是增长能力的好课堂。

祝愿你开卷大有收益!

目录



1 什么是“最值”问题

问题是数学的核心。我们每个人在生活和工作中都有自己的问题,这些问题的解决,往往反映着我们的理想和愿望。走路,总希望在可选择的路途中找最近的路。在材料一定时,总想设计窗户透过最多的光线。当体积一定时,总想设计用料最省的茶杯。在生产建设中,要求使产品达到优质、高产、低消耗……掌握了这些问题的规律,不仅使我们的工作在多快好省的基点上,出色地完成生产和工作任务,而且也能提高生活的质量。

一般地说,一群同类量中,如果有一量大于其他的量,那么这个量叫做这群量的最大;如果有一量小于其他的量,那么这个量叫做这群量的最小。这样的最大、最小叫做绝对极大、极小,以区别高等教学中通常考虑的所谓局部极大、极小。求最大值、最小值问题叫做最大、最小问题,这里简称“最值”问题。我们所理解的绝对极大、绝对极小是指:

设 $f(x)$ 是定义域和值域都是实数集上的函数,如果

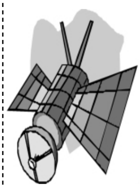
存在 x_0 属于定义域，对于定义域内的一切值 x 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，那么我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值；如果对定义域内一切值 x 都有 $f(x) \geqslant f(x_0)$，那么我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值。

当我们把这些实际问题抽象成数学问题时，就可以利用数学工具来解决它们。在探求最值问题时，根据需要解决问题的性质，我们建立了很多方法，如理论很强的微分法、变分法，到应用数学的运筹学等。为了使本书具有更大的普及性和实用性，针对问题的类型和中学生的知识结构和接受能力，寻找他们能接收的数学方法，从几何的短程线、代数中的最大最小问题提取了大量的方法，并将重点之处突出出来，加以引伸，以资应用。为扩大知识领域，开阔眼界，又简要介绍了中学生可以接受的运筹学、图论的一些方法，以弥补初等数学之不足。

解决最值问题，我们可以根据数学模型的性质分类，采用相应的数学方法解决。

几何中的短程线是从“二点间距离以直线距离为最短”的原理引伸出来的，将各种短程线在平面展开都是直线。应用几何图形的性质和几何量间的不等量关系，也可以求解最值问题。

代数中的最值问题，利用函数图像可以直观地读得最大、最小值，它具有简捷、明确的特点；也可以把函数的最值问题转化成属于其定义域的某个点的距离的最



值问题: 也可以利用三角函数的周期性求得函数的最值问题; 还可以利用算术——几何均值不等式及其推论解决这类问题; 还可以利用方程理论,如用换元法将分式函数转变为整式函数,从值域求函数的最值,或将无理函数转变为有理函数求最值等。如能做到判断准确、有的放矢,解题效率会事半功倍。

为了做到具体问题具体分析,要特别注意求最值的几个基本原则,它是解最值问题的几个重要的策略思想。正确运用这些原则会使我们解决有关最值问题的能力向前飞跃一大步。

运筹学强调“最优化”这个概念,能够为企业和各单位服务。它可以协助管理中的调度计划、安排检验等问题,还可以帮助某些工程的最优设计、生产中的最佳工艺条件以及科学研究的一些课题。运筹学使用了很多数学方法(代数、分析、概率、数理统计、图论、组合分析等) 和逻辑判断方法,也使用了一些只有实验性质的模拟方法,特别是使用了电子计算机。总之,运筹学在解决问题的过程中从整体出发,使用建立模型的方法来处理问题,应用范围更为广阔。

本书最后还给出了利用现代数学方法解决世界最值的名题,以此激励人们去发现、去创造,去进取、去登攀。

2 几何中的“最值”问题

从二点的最短距离谈起

人们谈到两地之间的距离一般指的是连接这两点的直线段的长度。在实践中,人们认识到连结两点的所有线段中以直线段为最短。

有一天,你可以做一个实验,给狗扔一块香喷喷的肉,观察它的行迹,一定是照两点的直线段追踪这块肉。实验证明:狗具有选择最短路线的本领。由此引发我们从几何角度探索最大、最小的问题。

例 2.1　卫星接收站设在哪儿最好?

为使远离城市的偏僻山区看上电视,给位于公路 l 同侧的甲、乙两村装卫星接收站。甲村距公路 a 千米,乙村距公路 b 千米,若两村在平行公路方向距离为 h 千米,试问接收站装在公路何处,才能使所需电缆线最短?

分析:如图 2 - 1 所示,若 F 点为所求的点,则

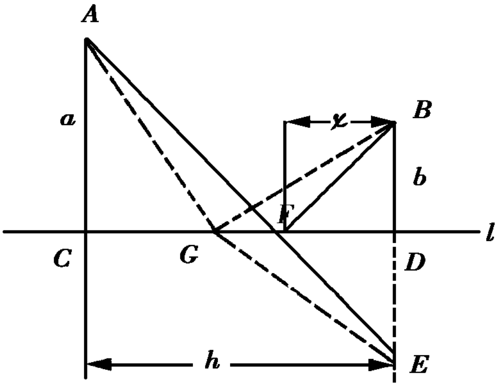


图 2－1

AFB 是折线，希望将折线变成直线段，可以利用 B 点关于直线 l 对称的方法求得点 E，连结 AE 交公路 l 于 F，接收站装在 F 处，得到总长为 $AF+BF$ 的电缆线最短。

$\because$ B 关于 l 的对称点是 E，$\therefore$ $BD=ED$，$\angle BDF=\angle EDF=90°$，$DF$ 为公共边，我们有 $\triangle BFD \cong \triangle EFD$，$\therefore$ $BF=EF$

$\therefore$ 电缆线总长为 $AF+FB=AF+FE=AE$。

根据平面上的短程线原理知道，A、E 两点直线段最短。这一结论也可用平面几何证明。

不妨设点 G 在 l 上点 F 的左侧为接收站的另一位置，连接 AG、BG，则接收站装在 G 处时到甲、乙两村的电缆线总长为 $AG+BG$，连接 EG。用和上面同样的方法证出：$\triangle BDG \cong \triangle EDG$，$BG=EG$，$AG+GB=AG+GE$，$\therefore$ $AG+GE>AE$

用同样方法证出，当点 G 在 l 上且在 F 的右侧时，该点到甲、乙两村的电缆线总长大于 AE。因此，点 F 是我们寻找接收站的最佳位置。如何求 FD 的距离呢？

今设 $FD=x$，则 $CF=h-x$，由于 $\angle AFC=$
$\angle EFD=\angle BFD$，$\angle ACF=\angle BDF=90°$，
故有 $\triangle AFC \backsim \triangle BFD$，

$\therefore \dfrac{CF}{DF}=\dfrac{AC}{BD}$，即 $\dfrac{h-x}{x}=\dfrac{a}{b}$，解得 $x=\dfrac{bh}{a+b}$（千米）

因此卫星接收站装在离 D 点 $\dfrac{bh}{a+b}$ 千米处。

注意：此处 $x\neq 0$。

例 2.2　这座桥如何驾设？

村庄 A 和村庄 B 位于一条小河的两侧，若河岸彼此平行，要架设一座与河岸垂直的桥，桥址应如何选择才使由 A 经过桥到 B 之间的路程最短？

如果 A 与 B 之间隔着两条河，河岸彼此平行，上述问题应该如何解决？

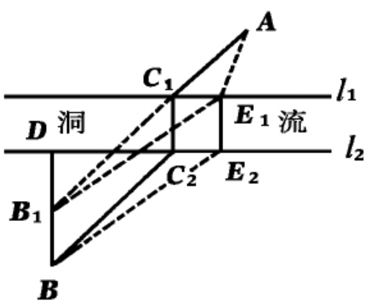


图 2－2(a)

我们这样分析这个问题：如图 2－2(a) 设 l_1、l_2 为河岸，作 $BD\perp l_2$ 取 BB_1 为河宽，连接 AB_1，交 l_1 于 C_1，作 $C_1C_2\perp l_2$，交 l_2 于 C_2，则 AC_1C_2B 为最短路程。