運籌學
(作業研究)題庫
上冊

原著　美國教育協會
譯著　方　世　榮

曉　園　出　版　社
世界图书出版公司

运筹学（作业研究）题库上册

美国教育协会　著

方世荣　译

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京新燕印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

1993年6月第一版　开本：850×1168 1/32

1993年6月第一次印刷　印张：24.5

印数：0001－1100　字数：58.8万字

ISBN: 7－5062－1608－6/O·72

定价：17.60元（W9303/10）

运筹学（作业研究）题库下册

美国教育协会 著
方世荣 译

晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司 重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京新燕印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1993 年 6 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1993 年 6 月第一次印刷 印张：11.5
印数：0001－1100 字数：27.6 万字
ISBN: 7－5062－1609－4/O・72
定价：8.70 元 (W9303/11)

運籌學(作業研究)題庫

下冊

原著　美國教育協會
譯著　方　世　榮

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

序　文

本書的目的

學生們一般都會覺得作業研究是一門很難瞭解與學習的科目，因爲此課程範圍廣泛且在作業研究實務上有許多錯綜複雜的關係。儘管這一學門的教科書已出版不少，且每一本都想對以前的教本提供一些改進，但由於用來解題的定理太多且太複雜，致使學生們仍一直感到很困擾。準此，對作業研究中的各個名詞與定理詳加闡釋，將使學生面臨難題時，能迎刃而解。

在經過研究之後，美國教育研究協會發現學生在課堂上對作業研究感到困難的基本原因有下列幾個：

(a) 尙未發展出系統的分析法供學生遵循，來逐步解答經常遭遇的問題。這也許是由於一個問題可能包含許多不同的條件與定理，導致許多不同的可能解法所造成的結果。如果對於每一種可能的變化都要設定一組法則來遵循，將會產生許多需要學生去找尋的法則與步驟，這樣反而比讓學生使用某種嘗試錯誤法（ trial and error ）尋求正確解更爲麻煩。

(b) 現有的教科書通常是由某些對此問題頗有研究的學者所寫的，一個已知的定理往往只使用短短的幾頁來解釋，由於寫得比較抽象而使學生們無法眞正瞭解，以致使用起來十分困難。此外，由於這些解釋往往不夠詳細與周嚴，學生們無法將定理與其應用加以延伸或推廣至其它的問題上。定理中許多可能的變化與應用通常都不加討論，而讓學生們作練習時自行發掘。因此，學生們必須花費許多時間去瞭解早已熟知而教本上未提供的定理與應用。

(c) 通常在主題解釋後面所列舉的例子太少、太簡單，無法使學生徹底地瞭解有關的原理。所作的解釋對學生解答作業或考試上的問題，都未提供充分的基礎。

此外，所舉的例子大都以簡縮的形式表示，其中並把解答各步驟間的許多資料都予以略去，要求學生自己去導出這些略去的資料。結果，學生們發現那些例子很難瞭解，以致不能充份達成舉例的目的。

甚且大多數的例子常以含混的語句寫出，不先陳述問題而後提供解答。相反地，只透過一般性的討論，而沒有表示所要解答的是什麼。

同時在需要的地方，很多例子中未包括圖解，學生們無法練習作圖來簡化和組織他們的思想。

(d) 學生們只能利用做練習與課堂上的複習來學習這門課程，去體認其應用上相關的原理。

在做練習時，學生們發現他們對作業研究所花的時間比其它相當學分的課程要多得多，因為他們不能確定究竟要選用那個定理或原理。於是需要學生們自行找出那些教本中沒有透露的「迷點」，如此才可很容易地解答問題。因此，他們只得求助於嘗試錯誤法一點一點地摸索。結果，解答一題時，往往會花上幾小時的時間。

(e) 當在課堂上複習練習題時，教師常要求學生輪流在黑板上寫出解答，並對全班加以解釋。但這樣的解釋很難使其餘學生保持興趣，因為他們要看黑板上的資料並忙著抄寫下來，無法傾聽口頭解釋並將注意力集中在解法上。

本書編寫的目的是想以詳細解說解答方法的方式，幫助學生在學習作業研究上克服所遇到的這些困難。這些解法所採用的問題，都是選自作業或考試上的題目。書中所列出的問題都是按其難易程度排列，使學生能從複習問題來加強對一個特殊課程的學習與瞭解。詳細的逐步解說這些問題，可大量節省學生的時間。

美國教育研究協會認為作業研究最好是讓學生用觀察分析法與解題技巧來學習。這種方法與各種科學實驗中（尤指醫學臨床實驗）所使用的相

似。

使用本書時，學生們可按自己的步調來複習與學習解說的問題，不受時間的限制。

當學生需要找出一種特別的問題與解答時，可查看書中的目錄；也可查看每個問題方框內的資料。爲了便於快速查出問題，除了對每個問題加上方框外，方框外右上角還加上粗體的問題序號。

欲從本書獲得最大的裨益，學生們應先詳閱「如何使用本書」一節。

爲了符合本書的編寫目的，美國教育研究協會挑選了常在考試中或家庭作業中出現的問題，很詳細地解答每個問題，並且解說過程中的每個步驟。基於此目的，本書特別敦聘學有專長的教授，貢獻其傑出學識，相信對於研習作業研究的學生有很大的幫助。

本書原稿經過無數次的改變、修正及增加篇幅，必須歸功於任勞任怨的打字小姐們以及無數的教育研究協會同仁，他們對這種煩雜、枯燥工作的熱心及技巧，有助於本書的編輯。

本書中所繪各種圖形及外觀設計必須感謝 Carl Fuchs 先生，因爲他對本書出版之美工人員提供訓練與指導。

最後必須感謝 Helen Kaufmann 女士，因爲她的建設性提議及幫助使本書能夠順利出版。

Max Fogiel,Ph. D.
Program Director

如何使用本書

本書對於學習作業研究的學生是很有幫助的，它可用作教本的補充教材。全書共分13章，每章均討論不同的課題。從線性規劃的介紹開始，依序爲非線性、整數與動態規劃，並推廣至網路分析，二次式與可分離規劃存貨控制及機率方法的探討。有關運輸問題、排程、生產規劃、等候理論、競局理論與馬可夫鏈也包括在內。此外，亦包括了許多廣泛的應用，這些應用對學生來說似乎是最困難的，

對課題的徹底學習與瞭解

1. 參考教本、閱讀與課題有關的章節，熟悉討論的原理。
2. 參考本書目錄，找出需要的課題。
3. 複習此課題下的各個問題；這些問題都是依深淺難易程度編排。有些問題可能與其它問題相似，但每個問題的選取都是用來解說一個不同的觀點或解說方法。

要將一個課題徹底學習與瞭解並牢記其內容，通常要求學生複習相關的問題好幾次。爲了認識原理的應用，並從中選出最佳的解法，重複的複習或許是最基本的途徑。

尋找特殊的問題

需注意到索引中，每個名詞或術語後面的數字是表示題碼，而非頁碼。將索引以這種方式編排，是爲了便於很快找到所要的問題，因爲一頁上可能有兩三個問題，有了題碼便可直接找出相關的問題了。

要找尋一個特殊的問題，可查看本書的目錄或索引，先找出與問題有關的課題之章節，然後再細察每個方框內的題材。從觀察目錄著手去熟悉本書的組織，就能快速找到所需要的問題。

爲了準備考試，可從目錄中找到有關的課題，將這些課題下的問題多看幾次，便可幫助學生辨別那些問題可能是考試所需要的。

目　　錄

目　　錄

第一章
線性作業研究問題的圖解

1-1 假設你想要安排一天8小時的生活方式，亦即，你想要分配你的時間資源；並假設你認爲在休息室玩乒乓球的樂趣（ fun ）爲工作的5倍，但亦覺得工作的時間至少應爲玩乒乓球時間的3倍。此決策的問題是，多少小時玩乒乓球，多少小時工作，才可最大化你的目標：「樂趣」。

設

X爲花在工作的時間，且

Y爲花在玩樂的時間。

欲最大化你的樂趣，F，其中

$$F = X + 5Y. \tag{1}$$

每天總共的時間限制爲8小時：

$$X + Y \leq 8. \tag{2}$$

最後，你工作的時間應至少三倍於玩樂：

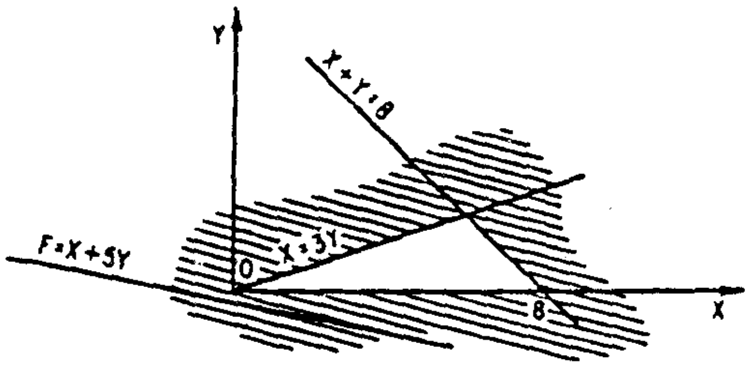
$$3Y \leq X. \tag{3}$$

又，時間不可能爲負數，因此

$$X \geq 0,\ Y \geq 0. \tag{4}$$

解：將「目標函數」，即方程式1與「限制式」，即方程式2，3，4繪於一座標平面上，結果顯示於圖1。

圖1中的斜線部分表示「不可行區域（ infeasible region ）」，此可由限制式，即方程式2至4得知。現在的論點就是針對此時間分配問題求出「最佳」解。



最大化 F = X + 5Y.

圖1

當X = Y = 0 ，則F = 0 ，此意謂著既不工作亦不玩樂，亦即無所適事。此時解F = 0示於圖2 。

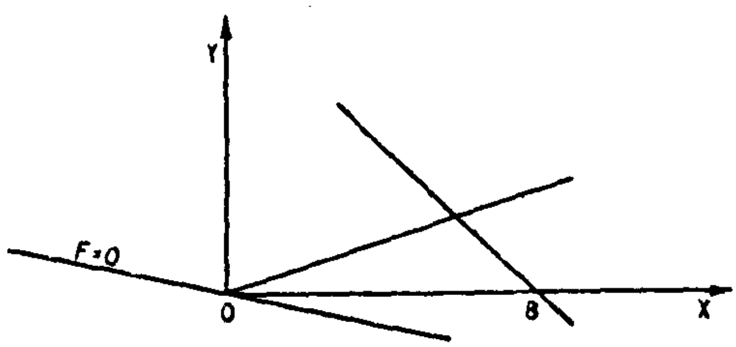


圖2

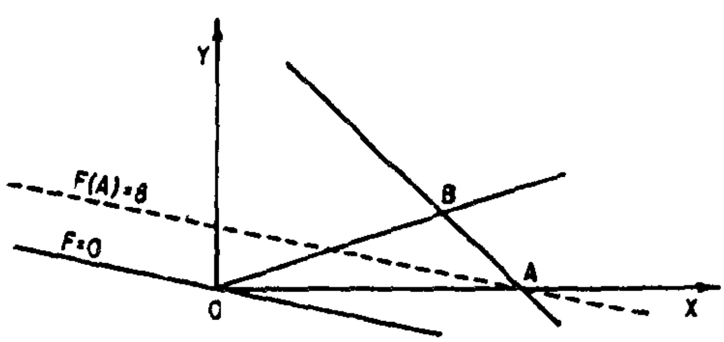


圖3

由於你想作某些事，故X增加，但其限制點在8（點A），此即你每天所能安置的時間。於是，F(A) = X + 5Y = 8 + 0（見圖3）。

圖4說明了F的値從0升至8，對應於直線F平行上移。又，F可依相同的方向更往上移動，而且必定通過此可行區域的某些點，直至B點。

由於B爲下列二條直線的交點

$$X + Y = 8$$

與

$$-X + 3Y = 0.$$

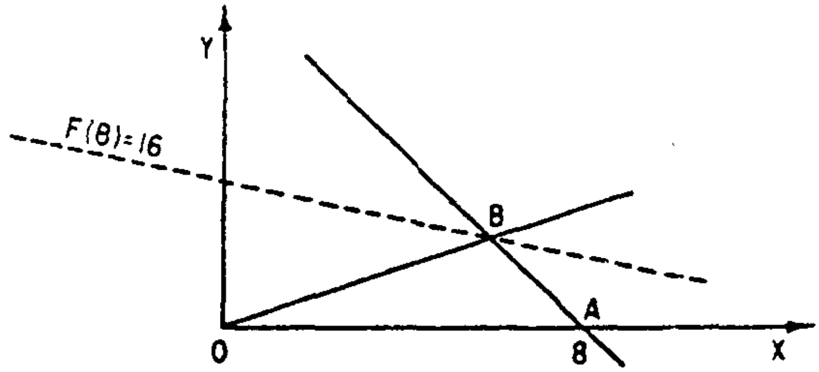


圖 4

亦即，

$$B = \{X = 6,\ Y = 2\}$$

故假設目標在B點達到最大值：

$$F(B) = 6 + 5 \times 2 = 16.$$

1-2　某一小工廠製造二種機車零件。該廠購買加工、鑽孔、磨光過的鑄件，資料示於表1。

零件A的鑄件每個成本 \$2，零件B的爲 \$3。且每種零件售價分別爲 \$5與 \$6。此三種機器運轉的成本分別爲每小時 \$20，\$14 與 \$17.50。假設零件A與B的任意組合皆可銷售，則那一種產品組合可使利潤最大？

表1

	零件A	零件B
加工產能	每小時 25	每小時 40
鑽孔產能	每小時 28	每小時 35
磨光產能	每小時 35	每小時 25

解： 第一步是計算每種零件的利潤，此如表2所示。由表2中的結果顯示出，若平均每小時製造零件A爲x個，而零件B爲y個，則利潤爲

$$z = 1.20x + 1.40y. \tag{1}$$

由於x與y爲負數時無意義，故

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0. \tag{2}$$

表 2

	零件 A	零件 B
加工	20/25 = 0.80	20/40 = 0.50
鑽孔	14/28 = 0.50	14/35 = 0.40
磨光	17.50/35 = 0.50	17.50/25 = 0.70
購買	2.00	3.00
總成本	3.80	4.60
售價	5.00	6.00
利潤	1.20	1.40

因爲考慮機器產能的限制，故 x 與 y 不能隨意選擇。因此，可得出下面的結果：

加工 $\quad \dfrac{x}{25} + \dfrac{y}{40} \leq 1$

鑽孔 $\quad \dfrac{x}{28} + \dfrac{y}{35} \leq 1$

磨光 $\quad \dfrac{x}{35} + \dfrac{y}{25} \leq 1$

將上面各式通分，可得：

加工 $\quad 40x + 25y \leq 1000$

鑽孔 $\quad 35x + 28y \leq 980 \qquad (3)$

磨光 $\quad 25x + 35y \leq 875$

將方程式 $40x + 25y = 1000$ 繪於圖 1，此直線將平面分成二個區域（圖 1）。一個區域包含 $40x + 25y < 1000$；另一個區域包含 $40x + 25y > 1000$。(3) 式中的另二個不等式亦以相似的方式將平面分割。於是，若將 x 與 y 值之決策視爲選擇此平面上的一點，則此點必在區域OABC之內（包括邊界）。由於直線 $35x + 28y = 980$ 位於此區域之外，故鑽孔的限制式爲多餘的。換句話說，滿足加工與磨光限制式的任意 x 與 y 之組合，將自動地滿足鑽孔的限制式。使得利潤達最大的點（x，y）必定位於OABC之角點；於是，可能的最大值爲 O（0，0），A（0，25），B（16.93，12.90）與 C（25，0）。其相對應的利潤爲 $z_0 = 0$，$z_A = 35$，$z_B = 38.39$，與 $z_C = 30$

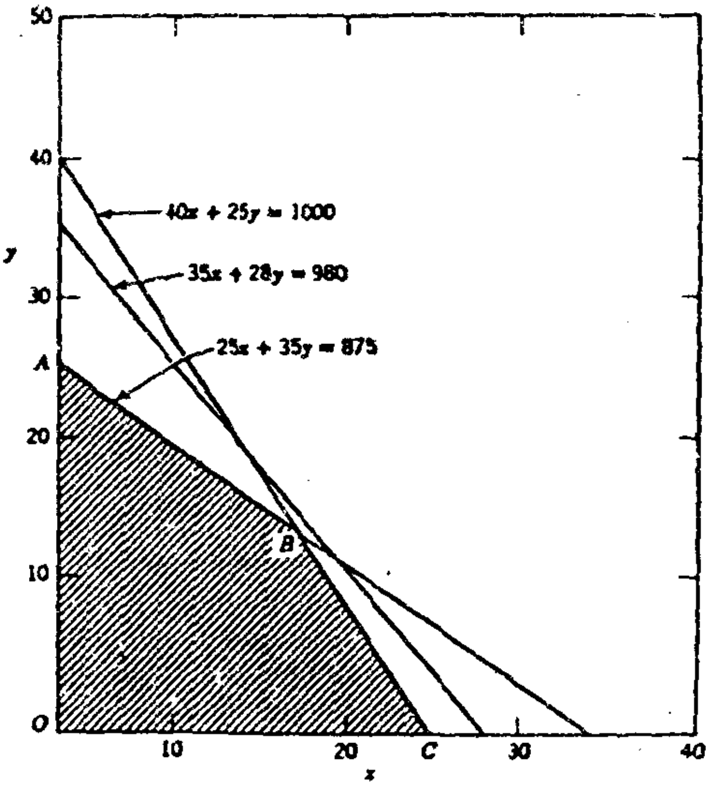


圖 1

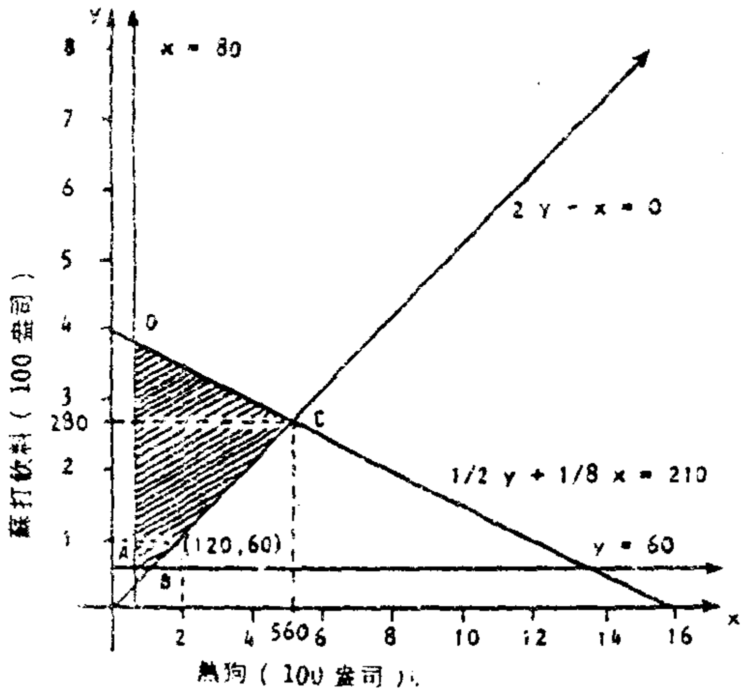
，因此，最佳的生產計劃是零件A每小時 16.93 ，零件B每小時 12.90。我們不難瞭解爲何最大點（ x ， y ）必位於角點。考慮方程式 1 的幾何意義，若 z 保持固定不變（如， z = 20 ），則當 x 與 y 變動時，(1)必表示爲等利潤的直線。若選擇另一個 z 值（如， z = 25 ），則可求得一條平行且更遠離原點 O 的直線。當逐漸地增加 z ，則可得出一平行線族。很顯然，此平行線族中最遠離原點且至少有一點在OABC之邊界內的直線，可使得 z 達到最大值。此一直線通過B。由此可知，不論邊界圖形如何繪出，最大值直線必通過一角點。

1-3 某人推動一手推車，並販賣熱狗與蘇打飲料。此人的車能負載重 210 磅（ lb ），熱狗每枝重 2 盎司（ ounce ），蘇打飲料每瓶重 8 盎司。依據經驗，此人至少必需裝載 60 瓶飲料與 80 枝熱狗，此外，每賣出 2 枝熱狗必至少會賣出一瓶飲料。已知每枝熱狗的利潤爲 8¢ ，而每瓶飲料的利潤爲 4¢ ，試求出此人必需裝載多少熱狗與飲料，才能使得利潤最大。

解．此爲一線性規劃問題。繪出熱狗對蘇打飲料的圖，並求出使利潤最大的點。

利潤的式子爲

$$\$.08 \cdot X + \$.04 \cdot Y = 利潤$$



其中X爲賣出的熱狗數而Y爲蘇打飲料數。

在下列的限制式下，使利潤最大化：

(1) $1/2 \cdot Y + 1/8 \cdot X \leq 210$

(2) $Y \geq 60$

(3) $X \geq 80$

(4) $2Y - X \geq 0$

這些限制式的意義爲：

(1) 蘇打飲料每瓶重½磅，熱狗每枝重⅛磅，且此車最大負載重量爲 210 磅。
(2) 此人至少必需裝載 60 瓶蘇打飲料。
(3) 此人至少必需裝載 80 枝熱狗。
(4) 此人擁有熱狗的數量至多爲蘇打飲料的 2 倍（或者說，蘇打飲料至少爲熱狗的½）。

接著將這些限制繪於圖上，且依據線性規劃理論，知最大利潤必定在由這些限制式所決定的區域內之角點。

上面圖形中的斜線部分即是由這些限制式所構成的區域，此區域的角點爲：

A)	$X = 80$	$Y = 60$
B)	$X = 120$	$Y = 60$
C)	$X = 560$	$Y = 280$
D)	$X = 80$	$Y = 420$

現在將這些點代入利潤公式以求出最大利潤值。

A)	$\$.08\cdot 80 + \$.04\cdot 60 = \$8.80$
B)	$\$.08\cdot 120 + \$.04\cdot 60 = \$12.00$
C)	$\$.08\cdot 560 + \$.04\cdot 280 = \$56.00$
D)	$\$.08\cdot 80 + \$.04\cdot 420 = \$18.40$

最大利潤出現在點 C 。因此，此人將裝載 560 枝熱狗與 280 瓶蘇打飲料，且可使利潤達最大值 $56.00 。

1-4 某一汽車製造商在一工廠製造汽車與卡車，而此工廠又分爲二個分工廠。廠 1 爲完成基本的組合作業，對每輛卡車需 5 人一日的工作天而每輛汽車需 2 人一日的工作天。廠 2 爲完成產品的作業，且對每輛汽車或卡車皆需 3 人一日的工作天。由於受到人與機器的限制，廠 1 每週有 180 人一日的產能而廠 2 有 135 人一日。若此製造商每生產一輛卡車可獲得利潤 $300 ，而每輛汽車爲 $200 ，試問每種車各應生產多少，才可獲得最大的利潤？

解：設 x_1 爲每週生產的卡車數；x_2 爲每週生產的汽車數，因此：

$$5x_1 + 2x_2 \le 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \le 135.$$

目標在於最大化線性函數 $300x_1 + 200x_2$ ，其中 $x_1 \ge 0$ 與 $x_2 \ge 0$ 。

定義下列的量

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 180 \\ 135 \end{pmatrix} \quad 與 \quad c = (300, 200).$$