# 大学物理实验

（第2版）

主编　潘渊　丁健

西北工業大學出版社

高 等 学 校 教 材

# 大学物理实验

（第 2 版）


主　编　潘　渊　丁　健

副主编　张会云　全红娟　戈西平



西北工業大學出版社

【内容简介】 本书介绍了误差及不确定度的相关概念，给出了不确定度的评定方法和测量结果表达形式，并介绍了有效数字的一般规定及常用的数据处理方法，包括作图法、逐差法，最小二乘法等。全书共收入了 33 个典型的实验项目，通过这些实验内容的学习，可以使读者掌握基本的物理实验知识、基本实验仪器的使用方法和基本的实验思想方法，并在综合实验技能方面得到一定的训练。

全书共分 3 章：第 1 章为测量不确定度与数据处理方法，第 2 章为基础实验，第 3 章为综合实验。本书还包含 3 个附录，分别为基本物理量测量、基本实验方法和物理实验常用数据。

本书适合作为非物理类专业的大学物理实验教材，也可供从事物理实验教学的人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

大学物理实验/潘渊，丁健主编．—2 版．—西安：西北工业大学出版社，2010.8(2012.7 重印)
ISBN 978－7－5612－2844－9

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①潘…　②丁…　Ⅲ.①物理学—实验—高等学校—教材　Ⅳ.①O4－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010)第 145081 号

**出版发行**：西北工业大学出版社
**通信地址**：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
**电　　话**：(029)88493844　　88491757
**网　　址**：www.nwpup.com
**印 刷 者**：陕西向阳印务有限公司
**开　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16
**印　　张**：13.875
**字　　数**：335 千字
**版　　次**：2010 年 8 月第 2 版　2012 年 7 月第 3 次印刷
**定　　价**：22.00 元

# 前 言

随着物理实验教学改革的不断深化，实验教学内容也在不断发生变化，本次推出新版教材就是要反映这些变化。本教材在整体结构上，我们仍然采用以往教材的模式，也就是将实验项目分为基础实验和综合实验。本书分为3章：第1章为测量不确定度与数据处理方法；第2章为基础实验部分，共包含19个实验项目，对这些项目不再按“力、热、光、电及近代”的方式分类，在选择实验项目时，主要考虑基本仪器的使用、基本实验思想方法学习和基本技能训练等，这些实验内容可放在物理实验课的第一阶段开出，为学生后续做综合性与设计性实验项目以及其他专业实验打下基础；第3章共包含14个实验项目，综合性实验项目在难度上有所增加，通常放在物理实验课的第二阶段开出。此外，本书将常用物理量的测量和基本测量方法以附录的形式放在书末，以供读者参考。

参加本书编写的有潘渊（绪论，第1章，综合实验3.3，3.9，3.10，3.14）、丁健（基础实验2.3，2.4，2.6，2.12，2.15，综合实验3.13）、张会云（实验基础2.8，2.11，2.13，2.14，综合实验3.4，3.12，附录A、附录B）、全红娟（基础实验2.2，2.5，2.7，2.18，综合实验3.1）、戈西平（基础实验2.9，综合实验3.11，附录C）、薛勇锋（基础实验2.10，综合实验3.6）、许志成（基础实验2.19，综合实验3.7）、王利国（综合实验3.5）、孙伯耳（基础实验2.1，2.16）、魏俊波（综合实验3.8）、邓小涛（综合实验3.2）、朱婧（基础实验2.17）。书中插图由张会云用AutoCAD绘制。全红娟负责文字录入工作。全书最后由潘渊、丁健修改定稿。

在本书编写过程中，西北工业大学李恩普教授和长安大学张士勇教授对第1章中的有关内容提出了许多宝贵的建议，王晋国、石焕文参与了第3章部分内容的审稿工作，在此一并表示感谢。

此外，本书既吸收了长安大学以往物理实验教材的精华，也参考了兄弟院校的实验教材，在此对有关作者表示衷心感谢。

由于我们的业务水平有限，错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2010年6月

# 目　　录

# 绪　　论

## 一、物理实验课的地位和任务

物理学是一门实验科学。在长期的发展过程中，物理实验已形成了自己的一整套理论和方法体系。对工科院校的学生来说，物理实验是学生进行科学实验基本训练的一门必修课，也是学生进入大学后系统学习基本实验知识、实验方法和实验技能的开端。本课程通过对基本物理现象的观察分析，使学生能够掌握基本物理量的测量方法、常用实验仪器的结构原理和使用方法以及典型的实验思想等。通过本课程的学习，可以培养学生实验设计与实验操作的基本能力，对实验数据进行分析，给出实验结果及相应不确定度的能力。

物理实验课的具体任务包括以下几个方面：

(1)加深对物理理论的理解。物理实验课中所开设的绝大多数实验都是以基本物理现象为研究对象，如力学、热学、光学、电磁学以及近代物理中的有关现象，这便是物理理论与物理实验之间的联系。

(2)培养和提高学生的综合实验能力。物理实验课与理论课有着密切的联系，但在教学任务方面却有着很大的区别。物理实验课对学生实验能力的培养包括以下几个方面：

1)通过阅读实验教材、仪器说明书等资料，学习正确使用仪器设备的能力；

2)通过对实验现象的观察，运用理论分析问题和解决问题的能力；

3)正确记录和处理数据，说明实验结果，撰写实验报告的能力；

4)完成简单设计性实验的能力。

(3)培养和提高学生的科学实验素质，即理论联系实际和实事求是的作风，严肃认真的工作态度，不怕困难、勇于探索的精神，爱护公物、遵守纪律的优良品德。

## 二、教学基本要求

物理实验是一门对动手能力要求很强的课程，只有勤于动手，善于动脑，将理论知识与实验操作相结合，通过一个个的实验操作，才能完成基本的实验教学任务。在教学中对以下基本要求应予以特别重视。

(1)掌握误差理论的基本知识。如误差及不确定度的基本概念，误差的分类和误差来源，系统误差的分析和基本消除方法。对实验所用的仪器和方法作出正确选择，在实验中有意识地对误差进行控制，并选择合适的方法对实验数据进行处理。

(2)掌握基本的实验思想和测量方法，如比较法、转换法、放大法、补偿法等。

(3)掌握基本物理量的测量方法，常用实验仪器的使用方法、调试及操作技能。

(4)能够撰写完整的实验报告。

## 三、物理实验教学的三个环节

物理实验课教学通常包括以下三个环节。

1. 预习

课前应仔细阅读实验教材，明确实验任务，了解实验原理、实验方法、实验条件和实验仪器的使用，弄清实验的主要步骤，合理设计数据记录表格。

2. 实验

进入实验室后，必须遵守实验室规则，认真听取教师的有关介绍，记录实验所用仪器的名称、量程、级别、分度值等有关内容。实验时要正确安装仪器，经认真检查或采取一定措施检验后，若无异常现象，方可开始实验。对于实验中出现的异常现象要及时发现，认真思考分析，必要时也可与教师共同讨论，待故障排除后再进行实验。实验原始数据的记录必须严肃认真，不可随意涂改，更不许伪造数据。若原始数据确有错误，可用笔划掉并注明原因，再将正确的数据写在旁边。实验数据经教师检查认可后，方可关闭电源，整理好仪器，打扫室内卫生。

3. 撰写实验报告

实验报告是对自己所取得的实验结果的书面总结，要求内容精练、文字简洁、计算准确、观点明确。实验报告通常包括下列内容：

(1)姓名、班组、学号、实验日期、实验地点、环境条件(天气、室温、气压等)。

(2)实验名称及实验任务。

(3)实验原理。应简要地说明实验所依据的原理、公式及其适用条件，并画出原理示意图。

(4)实验仪器。记录仪器名称、型号、分度值、准确度等级、额定参数及量程等。

(5)原始数据记录及数据处理。数据记录应准确无误，数值计算和不确定度评定应注意有效数字的位数，绘图必须规范，实验结果表达应完整。

(6)分析结果。对实验现象作必要的分析与解释；阐述实验体会及改进建议，并回答指定的问题。

# 第1章 测量不确定度及数据处理方法

测量是科学实验、工农业生产、贸易以及日常生活中不可缺少的一项工作。当完成测量时，应当给出测量结果。一个完整的测量结果不仅要给出待测量的最佳估计值，而且还要给出测量结果的不确定度。这是目前国际上约定的做法，也是我国计量技术规范所要求的。本章在介绍测量与不确定度的相关概念及不确定度评定方法时，所依据参考文献为《测量不确定度表示导则》(简称GUM)1995版。

## 1.1 测量、误差及不确定度的基本概念

1. 量与量值

(1)被测量：作为测量对象的特定量。

测量前首先要对被测的特定量作明确说明，也就是对被测量进行定义。实际上，被测量定义的详细程度是依据所要求的测量准确度而定的。

(2)量的真值：与给定的特定量定义一致的量值。其中“量值”是指一个数乘以计量单位。

1)尽管真值的定义总是不完善的，因而真值不是唯一的，只存在与定义一致的一组真值。但是，当被测量的定义引入的不确定性可以忽略时，认为真值是“实际唯一”的。在物理实验中，我们通常认为真值是唯一的。

2)真值是一个理想的概念，尽管它是客观的实际存在的，但通常是不可知的，只有在少数特殊情况下，我们能知道被测量的真值，例如三角形的内角之和的理论真值是$180^{\circ}$。

3)真值具有近似可知性，也正因为如此，才使测量有意义。

(3)量的约定真值：对于给定目的、具有适当不确定度的、赋予特定量的值。约定真值仅是真值的估计值，有时是约定采用的，有时是由测量标准确定而赋予被测量的值，所以也称为指定值、标准值、参考值等。

2. 测量与测量结果

(1)测量。

测量的定义：以确定量值为目的的一组操作。

1)测量的目的就是要确定被测量的值，也就是要确定被测量的“真值”。由于实际的测量都不可能是非常完善的，因而通过测量赋予被测量的值只能是真值的一个估计值，即测量结果。

2)测量是一个过程，任何测量过程都包含五个要素：被测对象、测量方法、测量设备、测量环境、测量人员。

3)测量方法按不同分类方式有多种类型，这里只介绍两种常用的分类方式。

按测量值获得的方法不同，可分为直接测量和间接测量。

直接测量的数学模型为 $Y = X$。直接测量可以是单次测量，也可以是多次测量。

间接测量的数学模型为 $Q = f(X, Y, \cdots, Z)$。式中，$Q$ 为间接测量量，也称为输出量；$X, Y, \cdots, Z$ 是各直接测量量，也称为输入量。

按测量条件的不同，分为等精度测量和不等精度测量。等精度测量指测量的五个要素即测量对象、测量方法、测量设备、测量环境、测量人员均不发生改变的条件下多次重复测量；等精度测量又称为重复性测量。它是一个理想的概念，实际上的等精度测量是指各要素在测量过程中不发生显著变化，也正是由于这种不显著的微小变化导致各次测量值不尽相同。不等精度测量是指五个测量要素中除被测对象不能改变外，其他四个因素的任何一个发生改变所进行的测量。不等精度测量又称为复现性测量。

(2) 测量结果：由测量所得到的赋予被测量的值。

1) 测量结果仅是被测量的估计值。

2) 对于直接多次测量，测量结果就是所测得的多个测量值的平均值。数学上可以证明，算术平均值是真值的最佳估计值；对于单次直接测量，其测量结果也只能是仅有的这个测量值；对于间接测量，测量结果是由各直接测量结果根据函数关系计算而得到的值。

3) 由于测量结果仅仅是被测量真值的一个估计值，在表达测量结果时，必须给出它的不确定度（不确定度概念将在后文进行讨论）。

4) 有些时候还应说明，所给测量结果是未修正的测量结果还是已修正的测量结果。

3. 误差与修正值

(1) 误差。测量结果与被测量的真值之差称为测量误差，简称为误差。用公式表示如下：

$$\text{误差} = \text{测量结果} - \text{真值}。$$

误差有两种表示形式，即

$$\text{绝对误差} = \text{测量结果} - \text{真值}$$

$$\text{相对误差} = \text{绝对误差} / \text{真值}$$

1) 由于真值未知，所以也无法获得误差。因此，误差只是一个理想的概念，一般不用测量误差描述测量结果。

2) 当用约定真值代替真值时，可得到误差的估计值而不是准确的误差。用公式表示为

$$\text{误差估计值} = \text{测量结果} - \text{约定真值}$$

它反映了测量结果偏离参考值的程度，误差估计值存在正、负之分。获得测量误差估计值的目的是为了对测量结果进行修正。

(2) 系统误差。系统误差是在重复测量中保持不变或按可预见的方式变化的测量误差分量。它是在重复性条件下，对同一被测量进行无穷多次测量所得测量值的平均值（期望值）与被测量的真值之差。用公式表示为

$$\text{系统误差}\ \varepsilon = \text{期望值}\ \mu - \text{真值}\ x_0$$

系统误差也是一个理想化的术语。只有当用约定真值代替真值，用期望值的估计值代替期望值时，可得到系统误差的估计值。获得了系统误差的估计值，就可以对测量结果进行修正。

此外，分析系统误差产生的原因并采取适当的措施可以减小或消除系统误差。

(3) 随机误差。随机误差是在重复性测量中按不可预见的方式变化的测量误差的分量。它是测量结果与在重复性条件下对同一被测量进行无穷多次测量所得结果的平均值（即期望值）之差。用公式表示为

$$随机误差\ \delta = 测量结果\ \bar{x} - 期望值\ \mu$$

由于期望值 $\mu$ 是一个理想的概念，所以每一个测量结果的随机误差就无法确定。通常随机误差 $\delta$ 服从一种概率分布，并且期望值为零。所以可以通过增加观测次数来减小随机误差。

随机误差具有以下几个性质。

抵偿性：设多次测量出现的随机误差为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，且

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$$

单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多。

有界性：误差的绝对值不会超过某一范围，即

$$|\delta_i| \leqslant |\delta_{\max}|$$

对称性：绝对值相等而符号相反的误差出现的概率相同。

由此得出结论：随机误差服从截尾正态分布，如图 1.1.1 所示。

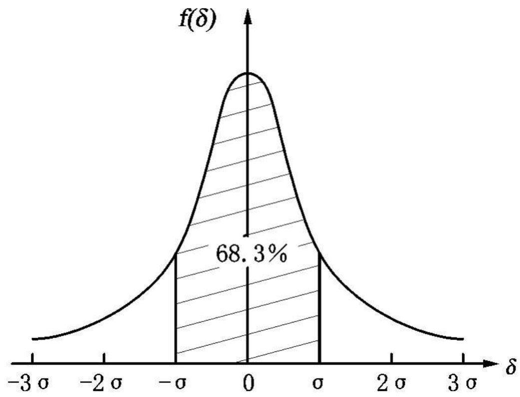


图 1.1.1　截尾正态分布图

随机误差产生的原因为多种因素的共同作用，这些因素包括前面提到的方法、人员、环境、仪器以及被测对象等等，其中每一因素对测量结果的影响可能并不大，但众多因素的总和则将产生明显的影响，随机误差除服从统计规律外，无其他确定的规律。因此，随机误差不能修正。

值得提出的是，对于超出规定条件下预期的误差，通常称做粗大误差，它是由于实验者粗心大意或操作不当造成的一种人为误差。含有粗大误差的测量值称为坏值或异常值。粗大误差实质上是一种差错，它不属于测量误差，应在数据处理时予以剔除。

测量误差 $\Delta$、系统误差 $\varepsilon$、随机误差 $\delta$ 三者都是理想的概念，不可能通过测量得到它们的准确值。三者的关系可以表示为

$$\Delta = \varepsilon + \delta$$

如图 1.1.2 所示。

(4) 修正值。修正值等于负的系统误差的估计值。

将修正值与测量结果相加，是为了在很大程度上减小系统误差。由于修正值只是负的系统误差的估计值，而不完全等于负的系统误差，因而经过修正后的测量结果仍含有一个比较小的未知的系统误差。

(5) 对测量结果质量的定性描述：准确度与精密度。

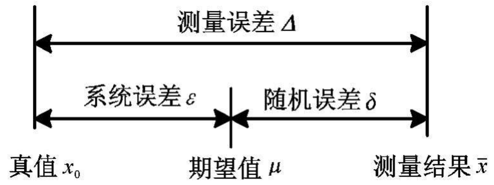


图 1.1.2　系统误差与随机误差的关系图

测量准确度的定义：测量结果与被测量的真值之间的一致程度，有时也称为精确度。测量准确度只是对测量误差(包括系统误差与随机误差)的一个定性描述。准确度只有高低之分，没有具体的数值大小之分。

测量精密度的定义：在规定条件下，对同一个被测对象重复测量所得的测量结果间的一致程度。测量精密度也只是一个定性的概念。

这里要说明的是，人们在习惯中经常使用的"测量精度"一词有时指精确度(即准确度)，有时指精密度，比较含混，所以建议不再使用[1]。

4. 测量不确定度的概念

(1) 测量不确定度：表征测量结果的分散性，与测量结果相联系的参数。

下面利用实验结果的一种表达形式来说明不确定度的含意。设物理量 $Y$ 的测量结果表达为

$$Y=(y\pm U)\text{ 单位}$$

式中，$y$ 为测量结果；$U$ 为不确定度，$U=ku_{(y)}$，是一个恒正的值。上式给出的是一个区间 $[y-U,y+U]$，这个结果表达的含意是，被测量 $Y$ 的真值以某一概率落入上述区间。因此，不确定度 $U$ 可以理解为"表征被测量的真值所处的量值范围的估计"，这正是国际通用计量学基本术语 1984 版本中对不确定度的定义。由于这个定义着眼于不可知的量 —— 真值，因而现在不用了，但用于理解不确定度含意却相对容易些。而 GUM 对不确定度的新定义着眼的是被测量 $Y$ 的测量值。由于各种因素的影响，$Y$ 的测量值呈现一种概率分布，而测量值的分散性是用随机变量 $Y$ 的概率分布的标准偏差 $u_{(y)}$ 来表征的。$u_{(y)}=U/k$，其中 $k$ 通常取 $2\sim3$ 之间的一个数。后面会说明 $U$ 和 $u_{(y)}$ 是两种不同形式的不确定度。

(2) 标准不确定度：以标准偏差表示的测量不确定度，其符号用 $u$ 表示。

对每个不确定度来源评定的标准偏差，称为标准不确定度分量，用 $u_i$ 表示。

标准不确定度的分量有两类评定方法：A 类评定和 B 类评定。

A 类标准不确定度：对于一系列测量值，用统计分析的方法进行不确定度评定得到的标准不确定度，用符号 $u_A$ 表示。A 类标准不确定度用实验标准偏差来定量表征。

B 类标准不确定度：用非统计方法进行不确定度评定，得到的标准不确定度，用符号 $u_B$ 表示。B 类标准不确定度用估计的标准偏差定量表征。

(3) 合成标准不确定度：由各标准不确定度分量合成得到的标准不确定度，用符号 $u_c$ 表示。合成的方法称为测量不确定度传播律(传递律)，由国际文件统一规定。

合成标准不确定度也可以用相对形式 $u_c(q)/|q|$ 来表示，称为相对不确定度，有时也用符号 $u_{rel}$ 或 $u_r$ 表示。

(4) 扩展不确定度：扩展不确定度由合成标准不确定度的倍数得到，用符号 $U$ 表示，即 $U$

$=ku_c$。其中，$k$ 称为包含因子(在数理统计中 $k$ 称为置信因子)，通常 $k$ 的取值在 2 ～ 3 之间。

扩展不确定度在使用时分为两种情况，即 $U$ 与 $U_p$。这里 $U=ku_c$，$U_p=k_pu_c$。$Y=y\pm U$ 说明 $Y$ 的真值以较高的概率落入区间 $[y-U, y+U]$，具体的概率值并未说明；$Y=y\pm U_p$ 说明 $Y$ 的真值以概率 $p$ 落入区间 $[y-U_p, y+U_p]$，此时 $p$ 称为包含概率(在数理统计中称为置信概率)。当 $p=95\%$ 时，$U_p$ 可写做 $U_{95}$；同样，当 $p=99\%$ 时，$U_p$ 可写作 $U_{99}$。这都是规定的表示形式。区间 $[y-U_p, y+U_p]$ 称为统计包含区间，$U_p$ 就是该区间的半宽度。

**[阅读材料] 对不确定度概念的几点说明**

测量不确定度是测量结果表达时必不可少的一个参数，由于以前长期将"确定的误差"与"可能的误差"相混淆来描述测量结果，加之对不确定度概念的正确理解和使用还处于推行阶段，这里有必要对测量不确定度概念再作几点必要的说明。

(1) 在统计学中，标准偏差作为随机变量的一个数字特征，用来描述随机变量取值的分散性。当测量结果为单次测量值时，随机变量就是直接测量的待测量 $X$；当测量结果以多次测量的平均值表示时，随机变量就是 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；当待测量为间接测量量时，随机变量就是 $Q=f(X,Y,\cdots,Z)$。这三种情况下，分别用标准偏差的估计值 $u_{(x)}$，$u_{(\bar{x})}$，$u_{(q)}$ 来描述 $X$，$\bar{X}$，$Q$ 的取值的分散性。由此就可以理解，单次测量值也是有分散性的，也就是说，以单次测量值作为测量结果时也是有不确定度的。

(2) 测量不确定度的来源主要与测量的五个要素有关，每个测量要素或其不同的组合都会影响测量不确定度，因而不确定度通常可能有多个分量。在评定这些分量时不区分其性质，只关心评定的方法，因而也就不存在"随机不确定度"和"系统不确定度"这样的说法。

(3) 在使用不确定时分为两种情形：第一种情形是不带形容词的测量不确定度用于一般概念和定性描述；第二种情形是带形容词的测量不确定度，包括标准不确定度、合成不确定度和扩展不确定度，用于对测量结果的不确定度进行定量的描述。

(4) 测量误差与测量不确定度的主要区别。测量不确定度是经典的误差理论的产物，使用测量不确定度的目的是为了澄清一些模糊的概念以及便于实际使用，使用不确定度来描述测量结果并不是停止使用误差的概念。测量误差与测量不确定度由于其概念不同，各有各的用处，不能相互代替。误差与不确定度的主要区别有两点：第一，误差表示测量结果偏离真值的程度，而不确定度表明了测量结果的分散性，测量结果不同，其误差一定不同，但对于不确定度而言，不同的测量结果(例如测量列中的任何一个值)可以有相同的不确定度；第二，误差是一个客观存在的值(尽管通常不知道它的大小)，它不以人的认识程度而改变，测量不确定度与人们对被测量的影响量及测量过程的认识有关。测量不确定度很小，并不代表误差很小，有的时候实际误差可能很大，但由于人们的认识不足，掌握的相关信息不够，造成了给出的不确定度可能很小。例如，当存在还未发现的较大系统误差时。

有的资料中将不确定度称为不确定性误差的变化程度[5]，也有称做可能误差的量度[4]，而误差一般只用于表示确定性的误差，这种提法有助于理解误差与不确定度之间的区别。

## 1.2　测量不确定度的评定与测量结果的报告

评定测量不确定度的一般步骤是在明确测量的五个要素(即被测量的定义，测量方法，测

量仪器，测量条件及测量人员）的基础上建立数学模型，也就是给出被测量与各直接测量量以及影响量之间的函数关系，分析不确定度来源，评定标准不确定度分量，计算合成标准不确定度，确定扩展不确定度。在评定不确定度时，不仅须要有一定的数理统计知识，还须要对不确定度的来源有一定的分析能力，而且还须要掌握充分可靠的相关信息。这对于初学者来说具有一定的困难，因而本书采用简单化处理的方法来评定测量不确定度，也就是认为各不确定度分量独立，在 B 类评定中，仅限于考虑由仪器产生的不确定度分量。

1. *标准不确定度的 A 类评定*

用统计的方法对标准不确定度进行评定，称为 A 类评定。

设 $X$ 为待测量，在重复性条件下，进行 $n$ 次独立观测得到的测量列为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

（1）测量列的算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$\bar{x}$ 又称为样本平均值，它就是 $X$ 在无穷多次测量时所得平均值（即期望值）$\mu$ 的最佳估计值。因此，$X$ 的测量结果就是 $\bar{x}$。

（2）实验标准偏差 $s(x)$。实验标准偏差也就是测量列的标准偏差（标准偏差也称为标准差），它是 $X$ 所服从的统计分布的标准差 $\sigma$ 的估计值。$s(x)$ 通常用贝塞尔公式计算（在测量次数很少时可用其他方法计算）：

$$s(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.2.1}$$

如果用测量列中的任意一个值作为测量结果，其 A 类标准不确定度分量就是 $s(x)$。

（3）平均值的实验标准偏差。由于测量结果是用测量列的平均值 $\bar{x}$ 表示的，而 $\bar{X}$ 作为一个随机变量，它的标准差 $\sigma/\sqrt{n}$ 的估计值为 $s(x)/\sqrt{n}$，以 $\bar{x}$ 作为实验结果时，按 A 类方法评定得到的标准不确定度分量为

$$u_{\mathrm{A}}(x)=s(\bar{x})=s(x)/\sqrt{n}$$

即

$$u_{\mathrm{A}}(x)=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1.2.2}$$

从式(1.2.2)可以看出，$u_{\mathrm{A}}(x)$ 与 $1/\sqrt{n}$ 成正比，增加测量次数 $n$ 可以减小不确定度 $u_{\mathrm{A}}(x)$；但当 $n>20$ 时，$1/\sqrt{n}$ 的减小变得很缓慢，通常取 $n$ 为 $6\sim20$。

2. *标准不确定度的 B 类评定*

用非统计的方法对标准不确定度进行评定，称为 B 类评定。B 类标准不确定度评定的一般做法是：先利用一切可以利用的信息和经验判断被测量 $X$ 的值落入区间 $(x-a,x+a)$ 的概率 $p$，再假设被测量的概率分布，进而获得对应于置信水平 $p$ 的置信因子 $k$，则 B 类标准不确定度 $u_{\mathrm{B}}$ 可由下式计算：

$$u_{\mathrm{B}}=\frac{a}{k} \tag{1.2.3}$$

式中，$a$ 为置信区间的半宽度；$k$ 为置信因子。

可以看出，评定 B 类标准不确定度的关键是要获得置信区间的半宽度 $a$ 和置信因子 $k$。

现在就几种常见的情况说明 $a$ 和 $k$ 的确定方法。

(1) 在获得仪器的“最大允许误差”的情况下。最大允许误差是指对于给定的测量仪器，规程、规范等所允许的误差极限值，有时也称为允许误差限。经检验合格的仪器设备在使用时，示值的误差不超过这一“误差限”。设仪器的允许误差限为 $\pm\Delta_{仪}$，并认为误差的分布为均匀分布，此时 $a=\Delta_{仪}$，$k=\sqrt{3}$，则

$$u_{B}(x)=\Delta_{仪}/\sqrt{3} \tag{1.2.4}$$

利用电表的准确度等级信息来评定 B 类不确定度分量也属于这一类型。例如，某电表为 2 级，其测量上限为 $x_{m}$，则最大引用误差(示值的最大相对误差)为 $\pm 2\%$，$\Delta_{仪}=x_{m}\cdot 2\%$，则有

$$u_{B}=x_{m}\cdot 2\%/\sqrt{3}$$

(2) 在获知仪器分辨力为 $\delta_{x}$ 的情况下。分辨力是指仪器能有效辨别的最小示值差。对于数字式仪器，其分辨力就是最末一位读数改变“1”时的读数差。此时，取 $a=\delta_{x}/2$，并认为误差分布为均匀分布，则

$$u_{B}(x)=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\delta_{x}}{2\sqrt{3}}=0.29\delta_{x} \tag{1.2.5}$$

(3) 在获得扩展不确定度及包含因子 $k$ 的情况下。这是一个由扩展不确定度求标准不确定度的情况。由于这个扩展不确定度是引用的，所以对引用者而言就是 B 类分量。此时

$$u_{B}(x)=\frac{U(x)}{k}\quad 或 \quad u_{B}(x)=\frac{U_{p}}{k_{p}} \tag{1.2.6}$$

扩展不确定度及其包含因子可由仪器的检定证书或校准证书等信息来源得到。

3. 计算合成标准不确定度

合成标准不确定度 $u_{c}$ 是由各标准不确定度分量合成得到的，不必区分是由 A 类还是 B 类方法评定得到，因而待测量 $X$ 的测量结果的各标准不确定度可以统一用 $u_{i}(x)$ 表示，而不一定非要明确表示成 $u_{A}$ 或 $u_{B}$。

这里分两种情况说明合成标准不确定度的计算。

(1) 直接测量结果的合成标准不确定度的计算。假设各不确定度分量互不相关，$x$ 有 $m$ 个标准不确定度 $u_{i}(x)$，$i=1,2,\cdots,m$，则

$$u_{c}(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}u_{i}^{2}} \tag{1.2.7}$$

(2) 间接测量结果的合成标准不确定度的计算。设 $Q=f(X,Y,\cdots,Z)$，其中 $Q$ 是间接测量量，$X,Y,\cdots,Z$ 均为直接测量量；并设各直接测量量互相不相关，被测量的测量结果为 $q=f(x,y,\cdots,z)$。$q$ 的合成标准不确定度 $u_{c}(q)$ 由下式计算：

$$u_{c}(q)=\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}u_{c}(x)\right]^{2}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}u_{c}(y)\right]^{2}+\cdots+\left[\frac{\partial f}{\partial z}u_{c}(z)\right]^{2}} \tag{1.2.8}$$

其中，$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\cdots,\frac{\partial f}{\partial z}$ 称为灵敏系数。式(1.2.8) 称为不确定度传播律或不确定度传递律。

相对合成不确定度 $u_{rel}$ 由下式计算：

$$u_{rel}=\frac{u_{c}(q)}{|q|}=\sqrt{\left[\frac{\partial \ln f}{\partial x}u_{c}(x)\right]^{2}+\left[\frac{\partial \ln f}{\partial y}u_{c}(y)\right]^{2}+\cdots+\left[\frac{\partial \ln f}{\partial z}u_{c}(z)\right]^{2}} \tag{1.2.9}$$

以上两式是实验中经常要用到的两个公式。通常为便于计算，对于函数表达式 $Q=f(X,Y,\cdots,Z)$ 为和、差关系时，按式(1.2.8) 计算合成标准不确定度；而对于函数表达式为

积、商、幂的形式时，可先按式(1.2.9)求出相对合成不确定度 $u_{\mathrm{rel}}$，再乘以 $|q|$ 求出合成标准不确定度。

表1.2.1给出了常用函数的合成标准不确定度传递公式。

**表1.2.1　常用函数的合成标准不确定度传递公式**

| 函数关系式 | 合成标准不确定度传递公式 |
| --- | --- |
| $q=x\pm y$ | $u_{\mathrm{c}}(q)=\sqrt{u_{\mathrm{c}}^2(x)+u_{\mathrm{c}}^2(y)}$ |
| $q=x\cdot y,\quad q=\dfrac{x}{y}$ | $\dfrac{u_{\mathrm{c}}(q)}{\lvert q\rvert}=\sqrt{\left(\dfrac{u_{\mathrm{c}}(x)}{x}\right)^2+\left(\dfrac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}\right)^2}$ |
| $q=kx$ | $u_{\mathrm{c}}(q)=\lvert k\rvert u_{\mathrm{c}}(x)$ |
| $q=x^k$ | $u_{\mathrm{rel}}(q)=\lvert k\rvert\cdot\dfrac{u_{\mathrm{c}}(x)}{\lvert x\rvert}$ |
| $q=\dfrac{x^k\cdot y^m}{z^n}$ | $u_{\mathrm{rel}}(q)=\sqrt{k^2\left(\dfrac{u_{\mathrm{c}}(x)}{x}\right)^2+m^2\left(\dfrac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}\right)^2+n^2\left(\dfrac{u_{\mathrm{c}}(z)}{z}\right)^2}$ |
| $q=\sin x$ | $u_{\mathrm{c}}(q)=\lvert\cos x\rvert\cdot u_{\mathrm{c}}(x)$ |
| $q=\ln x$ | $u_{\mathrm{c}}(q)=\dfrac{u_{\mathrm{c}}(x)}{x}$ |

4. *确定扩展不确定度*

确定扩展不确定度就是确定公式 $U=ku_{\mathrm{c}}$ 中的包含因子 $k$ 或 $U_p=k_pu_{\mathrm{c}}$ 中的 $k_p$。对于 $U=ku_{\mathrm{c}}$，国际上约定采用 $k=2$；美国及西欧一些国家规定未注明 $k$ 值时是指 $k=2$；我国规定采用扩展不确定度时，必须注明 $k$ 值。

取 $k=2$ 的理由是：当待测量 $Q$ 的分布接近正态分布时，包含区间 $[q-2u_{\mathrm{c}},q+2u_{\mathrm{c}}]$ 具有的置信水平约为95%，包含区间 $[q-3u_{\mathrm{c}},q+3u_{\mathrm{c}}]$ 具有的置信水平约为99%。在工程应用中，人们不须要将 $k$ 值计算得十分准确，而且一般取95%左右的置信水平也就足够了，所以在 $Q$ 的分布不清楚时，取 $k=2$ 意味着区间 $[q-2u_{\mathrm{c}},q+2u_{\mathrm{c}}]$ 具有比较高的置信水平。

如果对置信水平提出明确要求时，则采用 $U_p=k_pu_{\mathrm{c}}$，此时须要了解待测量的分布情况，还要计算合成标准不确定度的有效自由度。

5. *测量结果及其不确定度的报告*

完整的测量结果报告应当包括两项内容：测量结果及其不确定度。其中，测量结果就是待测量的最佳估计值，包括数值和单位。这里要说明的是，日常生活中由于对测量的要求不是很严格，通常只给出了测量结果，虽然没有给出测量结果的不确定度，但其不确定度也是可以评定的。

测量结果的不确定度可以使用合成标准不确定度，也可以使用扩展不确定度或者是它们的相对形式，但在使用场合上是有区别的。合成标准不确定度一般用于基本物理常量测定和基础计量学研究，而一般的测量及应用性测量都是以扩展不确定度的形式报告。

(1) 合成标准不确定度的三种报告形式。设某物的质量 $m_{\mathrm{s}}$ 的测量结果为100.028 76 g，其

合成标准不确定度 $u_c(m_s)$ 为 0.32 mg，则报告形式有以下三种：

1) $m_s = 100.028\ 76$ g；$u_c = 0.32$ mg。

2) $m_s = 100.028\ 76(32)$g；括号中的数是合成标准不确定度 $u_c$ 的数值，$u_c$ 与测量结果的最后位对齐。

3) $m_s = 100.0287\ 6(0.000\ 32)$g；括号中的数是 $u_c$ 的值，以所说明的测量结果的单位表示。

这里要特别说明的是，一般不提倡采用"$m_s = (100.028\ 76 \pm 0.000\ 32)$g"形式，因为这种形式已被传统地用于表示高置信水平的区间。

(2) 扩展不确定的两种报告形式。扩展不确定度分 $U$ 和 $U_p$ 两种形式。这里只说明当 $U = ku_c$ 情况下的两种报告形式，仍以前述测量为例。

1) $m_s = 100.028\ 76$ g；$U = 0.64$ mg，$k = 2$。

2) $m_s = (100.028\ 76 \pm 0.000\ 64)$g；$k = 2$。

6. 测量不确定度评定举例

(1) 测量目的：测量圆柱体的体积 $V$。

(2) 测量方法：用千分尺测量圆柱体的直径 $D$，用分度值为 0.02 mm 的游标卡尺测量圆柱体的长度 $L$，则

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 L$$

(3) 测量数据及测量结果见表 1.2.2。

**表 1.2.2　圆柱体直径与长度测量数据**

| 次数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 平均值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$/mm | 18.008 | 18.012 | 18.018 | 18.020 | 18.006 | 18.022 | 18.014 33 |
| $L$/mm | 50.02 | 50.04 | 50.12 | 50.00 | 50.08 | 50.18 | 50.073 3 |

测量结果 $\overline{V} = \frac{\pi}{4} (\overline{D})^2 \overline{L} = 12\ 762.404\ \text{mm}^3$。

(4) 测量不确定度主要来源分析。

1) 圆柱体直径测量的重复性；

2) 圆柱体长度测量的重复性；

3) 千分尺不准；

4) 游标卡尺不准。

(5) 标准不确定度分量的评定。

1) 用 A 类方法评定由圆柱体直径测量重复性引入的标准不确定度。

测量圆柱体直径所得测量列的实验标准偏差 $s(D)$ 为

$$s(D) = \sqrt{\frac{1}{(6-1)} \sum_{i=1}^{6} (D_i - \overline{D})^2} = 0.006\ 623\ \text{mm}$$

圆柱体直径平均值的实验标准偏差 $s(\overline{D})$ 为